Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

2 (2)

Análisis Matemático I
Resumen y Ejercicios Resueltos

2. Funciones entre Espacios Métricos

Proyecto CLAVEMAT

FASCÍCULOS DE MATEMÁTICA
DEL PROYECTO CLAVEMAT

PROYECTO CLAVEMAT

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

RESUMEN Y EJERCICIOS RESUELTOS

2. Funciones entre Espacios Métricos

Fascículo de Matemática No. 2 (2)

ANÁLISIS MATEMÁTICO I: RESUMEN Y EJERCICIOS RESUELTOS
2. FUNCIONES ENTRE ESPACIOS MÉTRICOS

PROYECTO CLAVEMAT

Escrito por: Cristian Guachamín, Roque Miño, Luis Pozo
Responsable de la Edición: Andrés Merino
Revisión Académica: el texto aún no cuenta con revisión académica de pares

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-111-22-7

Publicado por el proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

Índice general

Fascículo 2

Funciones entre espacios métricos

2.1. Resumen

Definición 2.1 (Límite)**.** Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, $f\colon E \to F$ una función, $a \in E$ y $L \in F$. Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < d_1(x, a) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), L) < \varepsilon).$$

Proposición 2.1 (Unicidad del límite)**.** Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, $f\colon E \to F$ una función y $a \in E'$. Entonces $\lim_{x \to a} f(x)$ es único.

Definición 2.2 (Continuidad en un punto)**.** Sean (E, τ) y (F, σ) espacios topológicos, $a \in E$ y $f\colon E \to F$ una función. Se dice que f es *continua en a* si para toda vecindad W de $f(a)$, $f^{-1}(W)$ es una vecindad de a.

Proposición 2.2. Sean (E, τ) y (F, σ) espacios topológicos, $A \subseteq E$ y $f\colon A \to F$ una función. Si $a \in A$ es un punto aislado de A, entonces f es continua en a

Proposición 2.3. Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, $a \in E$ y $f\colon E \to F$ una función. Se tiene que f es continua en a si y sólo si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Proposición 2.4. Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, $a \in E$ y $f\colon E \to F$ una función. Se tiene que f es continua en a si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de E tal que $x_n \to a$ se cumple que $f(x_n) \to f(a)$.

Definición 2.3 (Continuidad)**.** Sean (E,τ) y (F,σ) espacios topológicos, y $f\colon E \to F$ una función. Se dice que f es *continua* si

$$(\forall A \in \sigma)(f^{-1}(A) \in \tau),$$

es decir, la preimagen de todo abierto de F es un abierto de E.

Proposición 2.5. Sean (E,τ) y (F,σ) espacios topológicos, y $f\colon E \to F$ una función. Se tiene que f es *continua* si y sólo si para todo C cerrado en F se verifica que $f^{-1}(C)$ es cerrado en E.

Proposición 2.6. Sean (E,d_1) y (F,d_2) espacios métricos, y $f\colon E \to F$ una función. Se tiene que f es continua si y sólo si es continua en todos los puntos de E.

Observación. La función f es continua si y sólo si

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in E)(d_1(x,y) < \delta \implies d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon).$$

Definición 2.4 (Continuidad uniforme)**.** Sean (E,d_1) y (F,d_2) espacios métricos, y $f\colon E \to F$ una función. Se dice que f es *uniformemente continua* si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E)(\forall y \in E)(d_1(x,y) < \delta \implies d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon).$$

Proposición 2.7. Sean (E,d_1), (F,d_2) espacios métricos y $f\colon E \to F$ una función. Si f es uniformemente continua, entonces f es continua.

Definición 2.5 (Lipschitz continuidad)**.** Sean (E,d_1), (F,d_2) espacios métricos y $f\colon E \to F$ una función. Se dice que f es *Lipschitz continua* si

$$(\exists L > 0)(\forall x \in E)(\forall y \in E)(d_2(f(x),f(y)) \leq L d_1(x,y)).$$

Al número L se lo conoce como una *constante de Lipschitz* de la función f.

Proposición 2.8. Sean (E,d_1), (F,d_2) espacios métricos y $f\colon E \to F$ una función. Si f es Lipschitz continua, entonces f es uniformemente continua.

DEFINICIÓN 2.6. Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, y $f\colon E \to F$ una función Lipschitz continua con constante de Lipschitz $L < 1$. Entonces se dice que f es una *contracción* o una *función contractiva*.

TEOREMA 2.9. Sean (E, d) un espacio métrico completo y $f\colon E \to E$ una contracción. Entonces existe un único $z \in E$ tal que $f(z) = z$, es decir, existe un único punto fijo de f.

2.2. Ejercicios resueltos

> **EJERCICIO 2.1.** Sean (E, τ) y (F, σ) espacios topológicos, y $f\colon E \to F$ una función. Demostrar que f es continua si y solo si para todo $B \subseteq F$,
>
> $$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

Demostración. Sea $B \subseteq F$, se tiene que $B \subseteq \overline{B}$, por lo tanto, $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\overline{B})$. Como la función es continua, para $\overline{B} \subseteq F$, que es cerrado en F, se tiene que $f^{-1}(\overline{B})$ es cerrado en E, por lo tanto

$$f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B}).$$

Recíprocamente, sea B un cerrado de F, debemos demostrar que $f^{-1}(B)$ es un cerrado de E, para lo cual, basta demostrar que $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$. Como $\overline{B} \subseteq B$, se tiene que $f^{-1}(\overline{B}) \subseteq f^{-1}(B)$; además, por hipótesis, para $B \subseteq F$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$, entonces

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B).$$

Así, se tiene que f es continua. □

> **EJERCICIO 2.2.** Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, y $f\colon E \to F$ una función. Demostrar que si para todo par de sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E tales que
>
> $$\lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, y_n) = 0,$$
>
> se tiene que
>
> $$\lim_{n\to+\infty} d_2(f(x_n), f(y_n)) = 0,$$
>
> entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Supongamos que f no es uniformemente continua, es decir

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x, y \in E)(d_1(x, y) < \delta \wedge d_2(f(x), f(y)) \geq \epsilon).$$

Así, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existen $x, y \in E$ tales que

$$d_1(x, y) < \delta \qquad \text{y} \qquad d_2(f(x), f(y)) \geq \epsilon.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se sigue que

$$A_n = \left\{ (x,y) \in E \times E : d_1(x,y) < \frac{1}{n} \wedge d_2(f(x), f(y)) \geq \epsilon \right\} \neq \varnothing.$$

Gracias al Axioma de Elección, existen la sucesión $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n, y_n) \in A_n$, es decir

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Por lo tanto, concluimos que $d(x_n, y_n) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Así, para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suceciones de E, por la condición de hipótesis, sabemos que

$$d_2(f(x_n), f(y_n)) \to 0$$

cuando $n \to +\infty$. Además, dado que $d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se tiene que $0 \geq \epsilon$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, f es uniformemente continua. □

EJERCICIO 2.3. Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, $f\colon E \to F$ una función continua, y $M \subseteq E$ un conjunto denso en E. Definamos $g\colon M \to F$ por $g(x) = f(x)$, para todo $x \in M$. Demostrar que, si g es uniformemente continua, entonces f también lo es.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $x, y \in E$. Entonces, puesto que $\overline{M} = E$, existen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de elementos de M tales que

$$x_n \to x \qquad \text{y} \qquad y_n \to y$$

cuando $n \to +\infty$. Por lo tanto, puesto que g es uniformemente continua y que x_n, $y_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d_1(x_n, y_n) < \delta \Longrightarrow d_2(g(x_n), g(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Por otro lado, sabemos que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in M$, entonces tenemos que (2.1) se puede reescribir como

$$d_1(x_n, y_n) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, tomando límites cuando $n \to +\infty$ en la expresión anterior, se tiene que

$$d_1(x,y) \leq \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

lo que implica que f es uniformemente continua. $\square$

EJERCICIO 2.4. Dada la función

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathcal{C}^1[a,b] &\longrightarrow \mathcal{C}[a,b] \\ f \quad &\longmapsto \phi(f) = f', \end{aligned}$$

donde los espacios están tomados con la métrica del máximo habitual. ¿Es ϕ una función continua?

Demostración. Tomemos el espacio $\mathcal{C}[0,1]$ y definamos, para $n \in \mathbb{N}^*$, la función

$$\begin{aligned} f_n \colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \cdot \end{aligned}$$

Se tiene que $f_n \to 0$, cuando $n \to +\infty$, en efecto, para $x \in [0,1]$, se tiene que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \right| = \frac{|\operatorname{sen}(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n},$$

por lo tanto,

$$0 \leq \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Así, se tiene que $d(f_n, 0) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Si ϕ fuese continua, se tendría que $\phi(f_n) \to \phi(0)$ cuando $n \to +\infty$, es decir, $f_n' \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Pero, para $n \in \mathbb{N}^*$ y $x \in [0,1]$, se tiene que

$$\phi(f_n)(x) = f_n'(x) = \cos(nx).$$

Además,

$$1 = |\cos(n \cdot 0) - 0| \leq \max_{x\in[0,1]} |\cos(nx) - 0| = d(f_n', 0) \to 0$$

cuando $n \to +\infty$, lo cual es contradictorio. Entonces la función ϕ no es continua. $\square$

> **EJERCICIO 2.5.** Bajo el enunciado del ejercicio anterior, tomando el espacio $\mathcal{C}^1[a,b]$ con la métrica
>
> $$d_+(f,g) = \max_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t) - g'(t)|,$$
>
> demostrar que la función ϕ es continua.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Demostraremos que ϕ es continua en f, es decir,demostraremos que

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall g \in \mathcal{C}^1([a,b]))(d_+(f,g) < \delta \Longrightarrow d_\infty(\phi(f), \phi(g)) < \varepsilon).$$

Sea $\varepsilon > 0$, para $g \in \mathcal{C}^1[a,b]$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_\infty(\phi(f), \phi(g)) &= \max_{x\in[a,b]} |\phi(f)(x) - \phi(g)(x)| \\ &= \max_{x\in[a,b]} |f'(x) - g'(x)| \\ &\leq \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + \max_{x\in[a,b]} |f'(x) - g'(x)| \\ &= d_+(f,g). \end{aligned}$$

Por lo tanto tomando $\delta = \varepsilon$, se cumple que

$$d_+(f,g) < \delta \Longrightarrow d_\infty(\phi(f), \phi(g)) < \varepsilon.$$

De esta manera, se obtiene que ϕ es continua. $\square$

> **EJERCICIO 2.6.** Sean (E,τ) y (F,σ) espacios topológicos, y $f\colon E \to F$ una función. Demostrar que f es continua si y sólo si la preimagen de todo cerrado de F es cerrado en E.

Demostración. Supongamos que f es continua y sea $C \subseteq F$ un cerrado. Ya que C es cerrado, sabemos que C^c es abierto y, por la continuidad de f, $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$ es un abierto, lo que implica que $f^{-1}(C)$ es un cerrado.

Recíprocamente, supongamos que para todo $C \subseteq F$ cerrado, $f^{-1}(C)$ es un cerrado. Sea $C \subseteq F$ un abierto, entonces C^c es cerrado y por lo tanto $f^{-1}(C^c) = (f^{-1}(C))^c$ es un cerrado, es decir, $f^{-1}(C)$ es un abierto. Tenemos entonces que la preimagen de todo abierto es un abierto y por tanto f es continua. $\square$

> **EJERCICIO 2.7.** Demostrar que la composición de dos funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

Demostración. Sean $(E, d_1), (H, d_2), (F, d_3)$ espacios métricos y $f : E \longrightarrow H$ y $g : H \longrightarrow F$ dos funciones uniformemente continuas, es decir, se tiene que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in E)(d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon) \tag{2.2}$$

y

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u, v \in H)(d_2(u, v) < \delta \Longrightarrow d_3(g(u), g(v)) < \epsilon). \tag{2.3}$$

Debemos demostrar que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in E)(d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_3(g(f(x)), g(f(y))) < \epsilon).$$

Sea $\epsilon > 0$, por (2.3), existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$(\forall u, v \in H)(d_2(u, v) < \delta_1 \Longrightarrow d_3(g(u), g(v)) < \epsilon).$$

Ahora, para $\delta_1 > 0$, por (2.2), existe $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in E)(d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \delta_1),$$

así, se tiene que

$$(\forall x, y \in E)(d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \delta_1 \Longrightarrow d_3(g(f(x)), g(f(y))) < \epsilon),$$

es decir, $f \circ g$ es uniformemente continua. □

> **EJERCICIO 2.8.** Sean (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$ un conjunto no vacío. Demostrar que la función $\phi \colon E \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = d(x, A)$ es Lipschitz continua.

Demostración. Para demostrar que ϕ es Lipschitz continua, verificamos la siguiente condición:

$$(\exists L > 0)(\forall x, y \in E)(|\phi(x) - \phi(y)| \leq L d(x, y).$$

Sean $x, y \in E$, para $z \in A$, se tiene que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Tomando ínfimo en la última desigualdad, se tiene que

$$\inf_{z\in A} d(x,z) \leq d(x,y) + \inf_{z\in A} d(y,z),$$

es decir,

$$\phi(x) \leq d(x,y) + \phi(y),$$

de donde,

$$\phi(x) - \phi(y) \leq d(x,y).$$

De igual forma, podemos obtener que

$$\phi(y) - \phi(x) \leq d(x,y),$$

por lo tanto,

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq d(x,y),$$

es decir, f es Lipschitz continua con constante de Lipschitz igual a 1. □

> **EJERCICIO 2.9.** Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, y $f\colon E \to F$ una función continua y sobreyectiva. Demostrar que si A es denso en E, entonces $f(A)$ es denso en F.

Demostración. Demostraremos que $\overline{f(A)} = F$. Como $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ y $f(A) \subseteq F$ entonces $\overline{f(A)} \subseteq F$. Por otro lado, sea $y \in F$, como f es sobreyectiva, para $y \in F$, existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$. Por hipótesis $E = \overline{A}$, entonces $x \in \overline{A}$ es decir existe una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ .Dado que f es continua, entonces se tiene que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x),$$

cuando $n \to \infty$. Por otro lado, $f(x_n) \in f(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x) = y \in \overline{f(A)}$. □

> **EJERCICIO 2.10.** Sean (E, d_1) y (F, d_2) espacios métricos, y $f\colon E \to F$ una función. Se define
>
> $$\text{graf}(f) = \{(x,y) \in E \times F : y = f(x)\}.$$
>
> Demostrar que si f es continua, entonces graf(f) es un conjunto cerrado de $E \times F$ con la métrica de la suma.

Demostración. Supongamos que f es una función continua y tomemos $(x,y) \in \overline{\operatorname{graf}(f)}$, demostraremos que $(x,y) \in \operatorname{graf}(f)$.

Por definición de clausura, sabemos que existe la sucesión $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{graf} f$ tal que

$$(x_n,y_n) \to (x,y),$$

cuando $n \to +\infty$. Así, obtenemos que $x_n \to x$ y $y_n \to y$ cuando $n \to +\infty$. Ahora, como $(x_n,y_n) \in \operatorname{graf} f$, se tiene que $y_n = f(x_n)$ y como f es continua, se sigue que

$$y_n = f(x_n) \to f(x)$$

cuando $n \to +\infty$. Con esto, se tiene que $y = f(x)$, es decir $(x,y) \in \operatorname{graf}(f)$, de donde, se concluye que $\operatorname{graf} f$ es cerrado. □

EJERCICIO 2.11. Dar un ejemplo de una función biyectiva que sea continua pero cuya inversa no lo sea.

Solución 1. Consideremos la función

$$\begin{aligned} I\colon (\mathbb{R},d_1) &\longrightarrow (\mathbb{R},d_2) \\ x &\longmapsto I(x) = x, \end{aligned}$$

donde d_1 es la métrica discreta y d_2 la métrica usual. Esta función es continua y biyectiva, pero su inversa, la cual está dada por

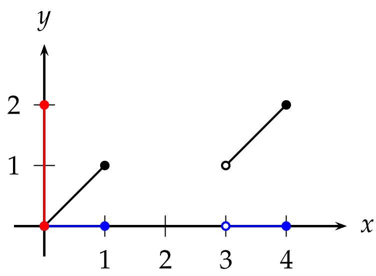
$$\begin{aligned} I^{-1}\colon (\mathbb{R},d_2) &\longrightarrow (\mathbb{R},d_1) \\ x &\longmapsto I^{-1}(x) = x, \end{aligned}$$

no lo es. En efecto, tomemos $x \in (\mathbb{R},d_1)$, entonces el conjunto $\{x\}$ es un abierto en $(\mathbb{R},d_1)$, pero su preimagen $I(\{x\}) = \{x\}$ no es un abierto en $(\mathbb{R},d_2)$, por lo tanto I^{-1} no es continua. □

Solución 2. Tomemos $E = [0,1] \cup (3,4]$ y $F = [0,2]$, ambos con la métrica usual de $\mathbb{R}$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ x-2 & \text{si } x \in (3,4]. \end{cases} \end{aligned}$$

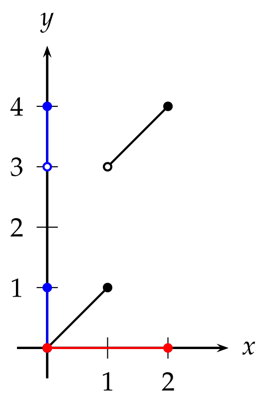
Gráficamente, representaremos el espacio E en azul y el espacio F en rojo, y la función la podemos observar en el siguiente gráfico.



Podemos observar que esta función es biyectiva y continua (se deja los detalles al lector). La inversa de esta función está dada por:

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon [0,2] &\longrightarrow [0,1] \cup (3,4] \\ x &\longmapsto f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ x+2 & \text{si } x \in (1,2]. \end{cases} \end{aligned}$$

Gráficamente, tenemos que:



De donde se sigue que f^{-1} no es continua pues al tomar una vecindad centrada en $x = 1$ podemos observar que $f(x)$ se acerca por la izquierda a 1 y por la derecha a 3. □

EJERCICIO 2.12. Sean (E, d) un espacio métrico completo y $f\colon E \to E$ una función. Demostrar que si la función

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\text{n veces}}$$

es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración. Notemos que, gracias al Teorema de Punto Fijo, existe un único $z \in E$ tal que $z = f^n(z)$. Así, evaluando f en lo anterior, se tiene que

$$f(z) = f(f^n(z)) = f^{n+1}(z) = f^n(f(z)),$$

es decir, $f(z)$ es un punto fijo de f^n. Pero, dado que el punto fijo de f^n es único, se concluye que $f(z) = z$, es decir, f tiene un punto fijo.

Por otro lado, sea $\tilde{z} \in E$ tal que $\tilde{z} = f(\tilde{z})$, evaluando la función de manera reiterada, se tiene que

$$\tilde{z} = f(\tilde{z}) = f(f(\tilde{z})) = \cdots = f^n(\tilde{z}),$$

es decir, $\tilde{z}$ es un punto fijo de f^n. Puesto que f^n tiene un único punto fijo se tiene que $z = \tilde{z}$. Así, se concluye que el punto fijo de f es único. $\square$

Análisis Matemático I

El presente fascículo recolecta las principales definiciones, proposiciones y teoremas sobre Funciones entre Espacios Métricos, vistos en el curso de Análisis Matemático I, dictado en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional. Además, presenta un compendio de ejercicios resueltos referentes a este tema, los cuales han sido desarrollados por Cristian Guachamín, Roque Miño, Luis Pozo, estudiantes de la Facultad de Ciencias, bajo la supervisión de Andrés Merino, profesor del Departamento de Matemática, quien ha dictado dicha asignatura.

Cualquier corrección, propuesta de cambio o mejora del presente trabajo se la puede realizar al correo: `mat.andresmerino@gmail.com`.

Proyecto CLAVEMAT

ISBN 978-0000-111-22-7

9 780000 111227 >