Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Examen N° 1

28 de mayo de 2015 — *Profesor: Mat. Andrés Merino*

1. Demostrar el siguiente límite de sucesiones (2pt)

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right) = 2$$

Demostración. Se debe demostrar que

$$(\forall\epsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})\left(n>N \Longrightarrow \left|n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)-2\right|<\epsilon\right)$$

Sea $\epsilon>0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)-2\right| &= \left|n\sqrt{n^2+4}-n^2-2\right| \\
&= \left|\sqrt{n^4+4n^2}-(n^2+2)\right| \\
&= \left|\left(\sqrt{n^4+4n^2}-(n^2+2)\right)\frac{\sqrt{n^4+4n^2}+(n^2+2)}{\sqrt{n^4+4n^2}+(n^2+2)}\right| \\
&= \left|\frac{n^4+4n^2-(n^2+2)^2}{\sqrt{n^4+4n^2}+n^2+2}\right| \\
&= \left|\frac{-4}{\sqrt{n^4+4n^2}+n^2+2}\right| \\
&= \frac{4}{\sqrt{n^4+4n^2}+n^2+2} \\
&< \frac{4}{n^2},
\end{aligned}$$

pues $\sqrt{n^4+4n^2}+n^2+2>n^2$. Utilizando la propiedad arquimediana para $2/\sqrt{\epsilon}$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2}{\sqrt{\epsilon}}<N.$$

Este N cumple, pues si $n>N$,

$$\frac{2}{\sqrt{\epsilon}}<n$$

es decir,

$$\frac{4}{n^2}<\epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\left|n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)-2\right|<\epsilon.$$

□

2. Calcular el siguiente límite de sucesiones (2pt)

$$\lim_{n\to+\infty}\left|n^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right|,$$

recordar que $|\operatorname{sen}(t)|\leq|t|$, para todo $t\in\mathbb{R}$

Solución. Se tiene que

$$0\leq\left|n^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| = |n^2|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right|\leq|n^2|\left|\frac{1}{n^3}\right|=\frac{1}{n},$$

es decir,

$$0 \leq \left| n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Dado que

$$\lim_{n \to +\infty} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por el Teorema del Sánduche, se tiene que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| = 0.$$

$\square$

3. Demostrar que si $\lim_{x \to a^-} f(x) = 0$ y $\beta < 0$, entonces (2pt)

$$\lim_{x \to a^-} \frac{\beta}{|f(x)|} = -\infty.$$

Demostración. Se tiene que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)(0 < a - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - 0| < \epsilon). \tag{1}$$

y se debe demostrar que

$$(\forall R < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I)\left(0 < a - x < \delta \Longrightarrow \frac{\beta}{|f(x)|} < R\right)$$

Para $\beta / R > 0$, en (1), existe $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in I)\left(0 < a - x < \delta \Longrightarrow |f(x)| < \frac{\beta}{R}\right).$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)| < \frac{\beta}{R} &\Longleftrightarrow \frac{1}{|f(x)|} > \frac{R}{\beta} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\beta}{|f(x)|} < \beta \frac{R}{\beta} \\ &\Longleftrightarrow \frac{\beta}{|f(x)|} < R, \end{aligned}$$

entonces, se tiene que

$$(\forall x \in I)\left(0 < a - x < \delta \Longrightarrow \frac{\beta}{|f(x)|} < R\right).$$

$\square$

4. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \to 0} f(x)$? Donde (2pt)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha^2 \cos(x) - 6 & \text{si } < 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Solución. Calculemos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 + \alpha^2 \cos(x) - 6 = \alpha^2 - 6$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha \operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x} = \alpha \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x} = \alpha \cdot 1 = \alpha.$$

Entonces, para que el límite exista, se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

es decir,

$$\alpha^2 - 6 = \alpha.$$

Resolviendo la ecuación, nos queda que los valores para los cuales existe el límite son $\alpha = 3$ y $\alpha = -2$. □

5. Demostrar que no existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, donde (2pt)

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad y_n = \frac{\sqrt{2}}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $x_n \in \mathbb{Q}$ y $y_n \notin \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - 1 \qquad \text{y} \qquad f(y_n) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión constante 0.

Con esto, se tiene que

$$x_n \to 0 \qquad \text{y} \qquad y_n \to 0,$$

pero

$$f(x_n) \to -1 \qquad \text{y} \qquad f(y_n) \to 0,$$

por lo tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. □

Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Examen N° 2

28 de julio de 2015 *Profesor: Mat. Andrés Merino*

1. Utilizar el Teorema del Valor Medio para demostrar que

$$\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x - 1,$$

para todo $x > 1$. (Sugerencia: aplicar el teorema a dos funciones, una de ellas es $\ln(x)$)

Demostración. Aplicando el Teorema de Valor Medio a la función $f(t) = \ln(t)$ en el intervalo $[1, x]$, se tiene que existe $c \in (1, x)$ tal que

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} = f'(c) = \frac{1}{c},$$

como $c > 1$, se tiene que $\frac{1}{c} < 1$, por lo tanto,

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} < 1,$$

de donde

$$\ln(x) < x - 1.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema de Valor Medio a la función $g(t) = t\ln(t)$ en el intervalo $[1, x]$, se tiene que existe $d \in (1, x)$ tal que

$$\frac{x\ln(x) - 1\ln(1)}{x - 1} = g'(d) = 1 + \ln(d),$$

como $d > 1$, se tiene que $\ln(d) > 0$, por lo tanto,

$$\frac{x\ln(x) - 1\ln(1)}{x - 1} > 1,$$

de donde

$$\ln(x) > \frac{x-1}{x}.$$

□

2. Sea $f \in \mathcal{C}^2(-\infty, +\infty)$ una función convexa, demostrar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq \alpha x + \beta,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: hallar el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $x_0 = 0$)

Demostración. Para $x \in \mathbb{R}$, por la fórmula de Taylor, existe c entre 0 y x tal que

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(c)}{2}(x - 0)^2.$$

Como f es convexa, entonces $f(y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, entonces, $\frac{f''(c)}{2}(x-0)^2 \geq 0$, por lo tanto,

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x,$$

tomando $\alpha = f(0)$ y $\beta = f'(0)$, se tiene el resultado. □

3. En el espacio vectorial $\mathcal{C}[a, b]$ se define

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{C}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\| = \int_a^b |f(t)|dt. \end{aligned}$$

Demostrar que esta función es una norma.

Demostración.

- Sea $f \in \mathcal{C}[a,b]$, se tiene que
$$|f(t)| \geq 0$$
para todo $t \in [a,b]$, por la monotonía de la integral, se tiene que
$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|dt \geq \int_a^b 0\,dt = 0.$$
- Supongamos que f es la función contante 0, entonces
$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b 0\,dt = 0.$$
Por otro lado, supongamos que $\|f\| = 0$, por reducción al absurdo, supongamos que f no es la función contante 0, es decir, supongamos que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) \neq 0$, por lo tanto, $|f(c)| > 0$.
Como f es continua en c, existe $\delta > 0$ tal que
$$|f(t)| > 0$$
para todo $t \in [c-\delta, c+\delta]$, como se vio en clase, esto implica que
$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(t)|dt > 0,$$
además, como $|f(t)| \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$, se tiene que
$$0 = \|f\| = \int_a^b |f(t)|dt \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(t)|dt > 0.$$
lo cual es contradictorio, por lo tanto, f es la función contante 0.
- Sean $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que
$$\|\alpha f\| = \int_a^b |\alpha f(t)|dt = \int_a^b |\alpha||f(t)|dt = |\alpha| \int_a^b |f(t)|dt = |\alpha|\|f\|.$$
- Sean $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, por desigualdad triangular del valor absoluto, se tiene que
$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$$
para todo $t \in [a,b]$, por la monotonía de la integral, se tiene que
$$\int_a^b |f(t) + g(t)|dt \leq \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)dt = \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt,$$
es decir,
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$
□

4. Sean $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (1-x)^2$ y $\dot{P}$ la partición uniforme en n intervalos, con etiquetas finales. Calcular $S(f,\dot{P})$.

Solución. Dado que la partición es uniforme y las etiquetas son finales, se tiene que
$$x_i - x_{i-1} = \frac{3-1}{n} \qquad \text{y} \qquad t_i = 1 + i\frac{3-1}{n},$$
por lo tanto,
$$\begin{aligned} S(f,\dot{P}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(1 - 1 - i\frac{2}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(1+n)(1+2n)}{6} \\
&= \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}.
\end{aligned}
$$

□

5. Sean $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y crecientes. Mostrar que

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \geq \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right).$$

(Sugerencia: definir la función $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = x\int_0^x f(t)g(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right),$$

¿es h creciente? Comparar $h(0)$ y $h(1)$)

Demostración. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \int_0^x f(t)g(t)dt + x\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)' - \left(\int_0^x f(t)dt\right)'\left(\int_0^x g(t)dt\right) - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right)' \\
&= \int_0^x f(t)g(t)dt + xf(x)g(x) - f(x)\int_0^x g(t)dt + g(x)\int_0^x f(t)dt \\
&= \int_0^x f(t)g(t)dt + \int_0^x f(x)g(x)dt - \int_0^x g(t)f(x)dt - \int_0^x f(t)g(x)dt \\
&= \int_0^x f(t)g(t) + f(x)g(x) - g(t)f(x) - f(t)g(x)dt \\
&= \int_0^x (f(t)-f(x))(g(t)-g(x))dt,
\end{aligned}
$$

Como f y g son crecientes, se tiene que

$$f(t)-f(x) \leq 0 \qquad \text{y} \qquad g(t)-g(x) \leq 0$$

para todo $t \in [0,x]$, por lo tanto,

$$h'(x) = \int_0^x (f(t)-f(x))(g(t)-g(x))dt \geq 0,$$

es decir, h es creciente, por lo tanto, $h(1) \geq h(0)$, y como

$$h(1) = \int_0^1 f(t)g(t)dt - \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \qquad \text{y} \qquad h(0) = 0,$$

de donde,

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt - \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \geq 0,$$

lo que es equivalente al resultado. □

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

COMPLEMENTOS DEL CÁLCULO • EXAMEN SUPLETORIO

11 de agosto de 2015 *Profesor: Mat. Andrés Merino*

1. Demostrar el siguiente límite:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + a^2} - \frac{1}{n} = a$$

2. Demostrar que si $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ y $\beta < 0$, entonces
$$\lim_{x\to a^+} \frac{\beta}{f(x)} = 0.$$

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y es continua en 0, demostrar que esta función es continua en todos los reales.

4. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $b > a > 0$ y $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ tal que $f(a) = f(b) = 0$. Demostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que
$$f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$
(Sugerencia: Aplicar el Teorema de Rolle a la función $g(x) = x^\lambda f(x)$.)

5. Sea $f \in \mathcal{C}[a,b]$, demostrar que $\int_a^b (f(x))^2 dx = 0$ si y solo si $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

6. Sea $f \in \mathcal{C}[0,1]$, tal que $\int_0^x f(t)dt \geq f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Demostrar que la función
$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = e^{-x^2} \int_0^{x^2} f(t)dt \end{aligned}$$
es decreciente.

Tiempo: 120 minutos. ℵ

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

COMPLEMENTOS DEL CÁLCULO • EXAMEN SUPLETORIO

11 de agosto de 2015 | *Profesor: Mat. Andrés Merino*

1. Demostrar el siguiente límite:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + a^2} - \frac{1}{n} = a$$

2. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ y $\beta < 0$, entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\beta}{f(x)} = 0.$$

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y es continua en 0, demostrar que esta función es continua en todos los reales.

4. Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $b > a > 0$ y $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ tal que $f(a) = f(b) = 0$. Demostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$

(Sugerencia: Aplicar el Teorema de Rolle a la función $g(x) = x^\lambda f(x)$.)

5. Sea $f \in \mathcal{C}[a,b]$, demostrar que $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx = 0$ si y solo si $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

6. Sea $f \in \mathcal{C}[0,1]$, tal que $\displaystyle\int_0^x f(t)dt \geq f(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Demostrar que la función

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = e^{-x^2} \int_0^{x^2} f(t)dt \end{aligned}$$

es decreciente.

Tiempo: 120 minutos. ℵ

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

COMPLEMENTOS DEL CÁLCULO • PRUEBA N° 2

FUNCIONES CONTINUAS Y DERIVABLES

2 de julio de 2015 *Profesor: Mat. Andrés Merino*

1. Sean $f \in \mathcal{C}^1[-1,1]$ tal que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, y
$$g(x) = 2x^4 + x + f(x).$$
Demostrar que existe $c \in (-1,1)$ tal que $g'(c) = 0$. Sugerencia: utilizar el Teorema de Valor Intermedio, luego el Teorema de Valor Medio.

Demostración. Cómo g es la suma de funciones continuas y derivables, es continua y derivable, además
$$g(-1) = 2(-1)^4 + (-1) + f(-1) = 1,$$
$$g(0) = 2(0)^4 + (0) + f(0) = 0,$$
$$g(-1) = 2(1)^4 + (1) + f(1) = 3.$$
Dado que g es continua y $g(0) \leq 1 \leq g(1)$, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $\xi \in (0,1)$ tal que
$$g(\xi) = 1.$$
Ahora, como g es derivable, por el Teorema de Valor medio, existe $c \in (-1,\xi) \subseteq (-1,1)$ tal que
$$g'(c) = \frac{g(\xi) - g(-1)}{\xi - (-1)} = \frac{1-1}{\xi - (-1)} = 0.$$
□

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a + b + c = 0$. Demostrar que
$$a + 2bx + 3cx^2 = 0$$
tiene una solución en $(0,1)$. Sugerencia: ¿es $a + 2bx + 3cx^2$ la derivada de alguna función? Aplicar el Teorema de Rolle a dicha función.

Demostración. Sea $f(x) = ax + bx^2 + cx^3$, se tiene que es una función continua, además,
$$f(0) = 0,$$
$$f(1) = a + b + c = 0.$$
Por lo tanto, aplicando el Teorema de Rolle, existe $\xi \in (0,1)$ tal que $f'(\xi) = 0$.

Pero. $f'(x) = a + 2bx + 3cx^2$, por lo tanto, ξ es una solución a
$$a + 2bx + 3cx^2 = 0.$$
□

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\ln(x)$.
   a) Demostrar que f es convexa.
   b) Sea $a, b \in \mathbb{R}^*_+$, demostrar que
$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$
   Sugerencia: aplicar la definición de convexidad a $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ y recordar que ln es una función creciente.

Demostración. *a*) Se tiene que
$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$
para todo $x \in \mathbb{R}^*_+$, por lo tanto, la función es convexa.

b) Como la función es convexa, se tiene que, para todo $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b),$$

para $\lambda = 1/2$, se tiene que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \leq \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) = \frac{1}{2}(f(a)+f(b)),$$

o de manera equivalente

$$-\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(-\ln(a) - \ln(b)) = -\frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b)) = -\frac{1}{2}\ln(ab) = -\ln(\sqrt{ab})$$

Multiplicando por -1 y tomando exponenciales, se tiene que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

□

4. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua en $a \in I$ tal que $f(a) \neq 0$. Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que $f(x)^2 > 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Demostración. Sea $g(x) = f(x)^2$, se tiene que $g(x) \geq 0$, además, como $f(a) \neq 0$, se tiene que $g(a) = f(a)^2 > 0$. Como g es continua en a, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que

$$g(x) > 0,$$

para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, es decir

$$f(x)^2 > 0,$$

para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$. □

5. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función par ($f(-x) = f(x)$) derivable en 0. Demostrar que $f'(0) = 0$.

Demostración. Como f es par, se tiene que f' es impar, es decir $f'(-x) = -f'(x)$, tomando $x = 0$, se tiene que

$$f'(0) = f'(-0) = -f'(0)$$

de donde, $2f'(0) = 0$, es decir $f'(0) = 0$. □