Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Examen N° 1

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea $a > 0$, hallar el supremo de $[0, a)$. Demostrar que dicho valor es el supremo. (2.5pt)

2. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a a. Demostrar que la sucesión
$$(\operatorname{sen}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
converge a $\operatorname{sen}(L)$. (2.5pt)

3. Sean f y g funciones definidas en todos lo reales y $R, c > 0$, tales que
$$f(x) > c, \quad \forall x < -R.$$
y
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$
Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{(g(x))^2} = +\infty.$ (2.5pt)

4. Demostrar que no existen $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to\pi} f(x)$, donde (2.5pt)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\[2ex] \dfrac{1}{x-\pi} & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

5. Enunciar el Teorema de Bolzano-Weierstrass. (+1pt)

ℵ

Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Examen N° 1

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea $a > 0$, hallar el supremo de $[0, a)$. Demostrar que dicho valor es el supremo. (2.5pt)

2. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a a. Demostrar que la sucesión
$$(\operatorname{sen}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$$
converge a $\operatorname{sen}(L)$. (2.5pt)

3. Sean f y g funciones definidas en todos lo reales y $R, c > 0$, tales que
$$f(x) > c, \quad \forall x < -R.$$
y
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0.$$
Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{(g(x))^2} = +\infty$. (2.5pt)

4. Demostrar que no existen $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to\pi} f(x)$, donde (2.5pt)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\[2ex] \dfrac{1}{x-\pi} & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

5. Enunciar el Teorema de Bolzano-Weierstrass. (+1pt)

1. Utilizar el Teorema del Valor Medio para demostrar que

$$\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x-1,$$

para todo $x > 1$. (Sugerencia: aplicar el teorema a dos funciones, una de ellas es $\ln(x)$)

Demostración. Aplicando el Teorema de Valor Medio a la función $f(t) = \ln(t)$ en el intervalo $[1, x]$, se tiene que existe $c \in (1, x)$ tal que

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = f'(c) = \frac{1}{c},$$

como $c > 1$, se tiene que $\frac{1}{c} < 1$, por lo tanto,

$$\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} < 1,$$

de donde

$$\ln(x) < x - 1.$$

Por otro lado, aplicando el Teorema de Valor Medio a la función $g(t) = t\ln(t)$ en el intervalo $[1, x]$, se tiene que existe $d \in (1, x)$ tal que

$$\frac{x\ln(x) - 1\ln(1)}{x-1} = g'(d) = 1 + \ln(d),$$

como $d > 1$, se tiene que $\ln(d) > 0$, por lo tanto,

$$\frac{x\ln(x) - 1\ln(1)}{x-1} > 1,$$

de donde

$$\ln(x) > \frac{x-1}{x}.$$

□

2. Sea $f \in \mathcal{C}^2(-\infty, +\infty)$ una función convexa, demostrar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) \geq \alpha x + \beta,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: hallar el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $x_0 = 0$)

Demostración. Para $x \in \mathbb{R}$, por la fórmula de Taylor, existe c entre 0 y x tal que

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(c)}{2}(x-0)^2.$$

Como f es convexa, entonces $f(y) \geq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, entonces, $\frac{f''(c)}{2}(x-0)^2 \geq 0$, por lo tanto,

$$f(x) \geq f(0) + f'(0)x,$$

tomando $\alpha = f(0)$ y $\beta = f'(0)$, se tiene el resultado. □

3. En el espacio vectorial $\mathcal{C}[a, b]$ se define

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{C}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\| = \int_a^b |f(t)|dt. \end{aligned}$$

Demostrar que esta función es una norma.

Demostración.

- Sea $f \in \mathcal{C}[a,b]$, se tiene que
$$|f(t)| \geq 0$$
para todo $t \in [a,b]$, por la monotonía de la integral, se tiene que
$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|dt \geq \int_a^b 0\,dt = 0.$$
- Supongamos que f es la función contante 0, entonces
$$\|f\| = \int_a^b |f(t)|dt = \int_a^b 0\,dt = 0.$$
Por otro lado, supongamos que $\|f\| = 0$, por reducción al absurdo, supongamos que f no es la función contante 0, es decir, supongamos que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) \neq 0$, por lo tanto, $|f(c)| > 0$.
Como f es continua en c, existe $\delta > 0$ tal que
$$|f(t)| > 0$$
para todo $t \in [c-\delta, c+\delta]$, como se vio en clase, esto implica que
$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(t)|dt > 0,$$
además, como $|f(t)| \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$, se tiene que
$$0 = \|f\| = \int_a^b |f(t)|dt \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} |f(t)|dt > 0.$$
lo cual es contradictorio, por lo tanto, f es la función contante 0.
- Sean $f \in \mathcal{C}[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que
$$\|\alpha f\| = \int_a^b |\alpha f(t)|dt = \int_a^b |\alpha||f(t)|dt = |\alpha| \int_a^b |f(t)|dt = |\alpha|\|f\|.$$
- Sean $f, g \in \mathcal{C}[a,b]$, por desigualdad triangular del valor absoluto, se tiene que
$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)|$$
para todo $t \in [a,b]$, por la monotonía de la integral, se tiene que
$$\int_a^b |f(t)+g(t)|dt \leq \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|)dt = \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt,$$
es decir,
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$
□

4. Sean $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (1-x)^2$ y $\dot{P}$ la partición uniforme en n intervalos, con etiquetas finales. Calcular $S(f,\dot{P})$.

Solución. Dado que la partición es uniforme y las etiquetas son finales, se tiene que
$$x_i - x_{i-1} = \frac{3-1}{n} \qquad \text{y} \qquad t_i = 1 + i\frac{3-1}{n},$$
por lo tanto,
$$\begin{aligned} S(f,\dot{P}) &= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(1 - 1 - i\frac{2}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{8i^2}{n^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(1+n)(1+2n)}{6}$$
$$= \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{4}{3n^2}.$$

□

5. Sean $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y crecientes. Mostrar que
$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \geq \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right).$$
(Sugerencia: definir la función $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que
$$h(x) = x\int_0^x f(t)g(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right),$$
¿es h creciente? Comparar $h(0)$ y $h(1)$)

Demostración. Se tiene que
$$h'(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt + x\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)' - \left(\int_0^x f(t)dt\right)'\left(\int_0^x g(t)dt\right) - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right)'$$
$$= \int_0^x f(t)g(t)dt + xf(x)g(x) - f(x)\int_0^x g(t)dt + g(x)\int_0^x f(t)dt$$
$$= \int_0^x f(t)g(t)dt + \int_0^x f(x)g(x)dt - \int_0^x g(t)f(x)dt - \int_0^x f(t)g(x)dt$$
$$= \int_0^x f(t)g(t) + f(x)g(x) - g(t)f(x) - f(t)g(x)dt$$
$$= \int_0^x (f(t)-f(x))(g(t)-g(x))dt,$$
Como f y g son crecientes, se tiene que
$$f(t)-f(x) \leq 0 \qquad \text{y} \qquad g(t)-g(x) \leq 0$$
para todo $t \in [0,x]$, por lo tanto,
$$h'(x) = \int_0^x (f(t)-f(x))(g(t)-g(x))dt \geq 0,$$
es decir, h es creciente, por lo tanto, $h(1) \geq h(0)$, y como
$$h(1) = \int_0^1 f(t)g(t)dt - \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \qquad \text{y} \qquad h(0)=0,$$
de donde,
$$\int_0^1 f(t)g(t)dt - \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \geq 0,$$
lo que es equivalente al resultado. □

Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Prueba N° 1

Números Reales y Sucesiones

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Hallar el supremo de $[0,5)$. Demostrar que dicho valor es el supremo. (2.5pt)

Demostración. Sea $A=[0,5)$, se tiene que $\sup(A)=5$.

Hay que demostrar que

P.D.1) $(\forall x\in A)(x\leq 5)$ y

P.D.2) Si $c\in\mathbb{R}$ es tal que $(\forall x\in A)(x\leq c)$ entonces $c\leq 5$.

Sea $x\in A$, por definición de A, se tiene que

$$x<5,$$

por lo tanto,

$$x\leq 5,$$

Además, sea $c\in\mathbb{R}$ tal que

$$(\forall x\in A)(x\leq c),$$

Por demostrar que $5\leq c$. Por absurdo, supongamos que $c<5$, tomando $x=\max\{0,(c+5)/2\}\in A$, se tiene que

$$\frac{c+5}{2}\leq c,$$

es decir

$$5\leq c,$$

lo cual es contradictorio, por lo tanto, $5\leq c$. Es decir, en efecto $\sup(A)=5$. □

2. Demostrar, mediante la definición, el siguiente límite de sucesiones (2.5pt)

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)=2.$$

Demostración. Se debe demostrar que

$$(\forall\epsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(n>N\implies\left|n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)-2\right|<\epsilon).$$

Sea $\epsilon>0$, para $n\in\mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)-2\right| &= \left|n\sqrt{n^2+4}-(n^2+2)\right| \\
&= \left|n\sqrt{n^2+4}-(n^2+2)\right|\frac{n\sqrt{n^2+4}+(n^2+2)}{n\sqrt{n^2+4}+(n^2+2)} \\
&= \frac{|n^2(n^2+4)-(n^2+2)^2|}{n\sqrt{n^2+4}+(n^2+2)} \\
&= \frac{|-4|}{n\sqrt{n^2+4}+(n^2+2)} \\
&= \frac{4}{n\sqrt{n^2+4}+(n^2+2)}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{4}{n^2},$$

pues $n\sqrt{n^2+4}+(n^2+2) \geq n^2$. Aplicando la propiedad arquimediana para $2/\sqrt{\epsilon}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2}{\sqrt{\epsilon}} < N.$$

Este N cumple, pues si $n > N$, entonces

$$\frac{2}{\sqrt{\epsilon}} < n,$$

de donde

$$\frac{4}{n^2} < \epsilon,$$

y por lo tanto,

$$\left| n\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)-2\right| \leq \frac{4}{n^2} < \epsilon. \qquad \square$$

3. Calcular el siguiente límite de sucesiones (2.5pt)

$$\lim_{n\to+\infty} \left| n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2n^3}\right)\right|,$$

recordar que $|\operatorname{sen}(t)| \leq |t|$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución. Se tiene que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{n^3}\right|,$$

por lo tanto, multiplicando todo por $|n^2|$

$$0 \leq \left|n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| \leq \left|\frac{n^2}{n^3}\right| = \frac{1}{n},$$

es decir,

$$0 \leq \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Dado que

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por el Teorema del Sánduche, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|n^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right| = 0. \qquad \square$$

4. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números distintos de 0 tal que converge a $L \in \mathbb{R}$, distinto de 0, tal que existe $M > 0$ tal que $|x_n| \geq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $1/x_n \to 1/L$ cuando $n \to +\infty$. (2.5pt)

Demostración. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L, se tiene que

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |x_n - L| < \epsilon), \tag{1}$$

Se demostrará que

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\left(n > N \Longrightarrow \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{L}\right| < \epsilon\right).$$

Sea $\epsilon > 0$, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{x_n - L}{x_n L}\right| = \frac{|x_n - L|}{|x_n||L|} \leq \frac{|x_n - L|}{M|L|},$$

pues $|x_n| \geq M$.

Para $\epsilon M|L| > 0$, en (1), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow |x_n - L| < \epsilon M|L|.$$

Este N cumple, pues si $n > N$, entonces

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{L} \right| \leq \frac{|x_n - L|}{M|L|} < \frac{\epsilon M|L|}{M|L|} = \epsilon. \qquad \square$$

א

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

COMPLEMENTOS DEL CÁLCULO • PRUEBA N° 2

FUNCIONES CONTINUAS Y DERIVABLES

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2) = 0$ y $f(1) = 1$. Demostrar que existe $c \in (0,1)$ tal que
$$f(c) = f(c+1)$$
Sugerencia: Analizar la función $g(x) = f(x+1) - f(x)$. (2.5pt)

2. ¿Para qué valores de α la función
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \alpha x - \cos(2x) \end{aligned}$$
es inyectiva? (2.5pt)

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x+y) = f(x)f(y)),$$
además, f es continua en 0 y $f(0) \neq 0$. (2.5pt)
   a) ¿Cuál es el valor de $f(0)$?
   b) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x) > 0$.
   c) Demostrar que que f es continua.

4. Demostrar que para todo $x > 0$, se cumple
$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$
Sugerencia: Aplicar el teorema de valor medio a $f(x) = \ln(x+1)$. (2.5pt)

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

COMPLEMENTOS DEL CÁLCULO • PRUEBA N° 2

FUNCIONES CONTINUAS Y DERIVABLES

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2) = 0$ y $f(1) = 1$. Demostrar que existe $c \in (0,1)$ tal que
$$f(c) = f(c+1)$$
Sugerencia: Analizar la función $g(x) = f(x+1) - f(x)$. (2.5pt)

2. ¿Para qué valores de α la función
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \alpha x - \cos(2x) \end{aligned}$$
es inyectiva? (2.5pt)

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(f(x+y) = f(x)f(y)),$$
además, f es continua en 0 y $f(0) \neq 0$. (2.5pt)
   a) ¿Cuál es el valor de $f(0)$?
   b) Demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f(x) > 0$.
   c) Demostrar que que f es continua.

4. Demostrar que para todo $x > 0$, se cumple
$$\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$
Sugerencia: Aplicar el teorema de valor medio a $f(x) = \ln(x+1)$. (2.5pt)

ℵ

Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Examen Supletorio

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea $A = (-3, -2)$. Demostrar que -3 es el ínfimo de A y que -1 no es el supremo de A.

2. Demostrar que si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M < 0$, entonces
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

3. Demostrar, utilizando sucesiones, que no existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2(x)$.

4. Sean $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$, tales que $0 < a < b$, $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tal que $f(a) = f(b) = 0$. Demostrar que existe $c \in (a, b)$ tal que
$$f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$
(Sugerencia: analizar la función $g(x) = x^\lambda f(x)$.

5. Sean $f, g \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y crecientes. Mostrar que
$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \geq \left(\int_0^1 f(t)dt \right) \left(\int_0^1 g(t)dt \right).$$
(Sugerencia: definir la función $h \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que
$$h(x) = x \int_0^x f(t)g(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt \right) \left(\int_0^x g(t)dt \right),$$
¿es h creciente? Comparar $h(0)$ y $h(1)$)

Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Examen Supletorio

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea $A = (-3, -2)$. Demostrar que -3 es el ínfimo de A y que -1 no es el supremo de A.

2. Demostrar que si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M < 0$, entonces
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

3. Demostrar, utilizando sucesiones, que no existe $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}^2(x)$.

4. Sean $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$, tales que $0 < a < b$, $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tal que $f(a) = f(b) = 0$. Demostrar que existe $c \in (a,b)$ tal que
$$f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}.$$
(Sugerencia: analizar la función $g(x) = x^\lambda f(x)$.

5. Sean $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y crecientes. Mostrar que
$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \geq \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right).$$
(Sugerencia: definir la función $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que
$$h(x) = x \int_0^x f(t)g(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right),$$
¿es h creciente? Comparar $h(0)$ y $h(1)$)