## PREGUNTAS

1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos acotados superiormente tales que $A \cap B \neq \varnothing$.

   *a)* Muestre que $A \cup B$ y $A \cap B$ son acotados superiormente y que
   $$\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\} \qquad \text{y} \qquad \sup(A \cap B) \leq \text{mín}\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

   *b)* Dé un ejemplo de conjuntos $A$ y $B$ tales que la desigualdad presente en $\sup(A \cap B)$ sea estricta.

2. Considere el conjunto
   $$A = \left\{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$
   Determine si $A$ es acotado superiormente y/o inferiormente. En caso de que lo sea, halle su supremo y/o su ínfimo. Finalmente, determine si $A$ posee máximo y/o mínimo.

3. Muestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   *a)* $(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N}^*)(0 < \frac{1}{n} < x)$.

   *b)* $(\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y)(\exists r \in \mathbb{Q})(x < r < y)$.

   *c)* $(\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y)(\exists p \in \mathbb{Z}$ y $\exists n \in \mathbb{N})(x < \frac{p}{2^n} < y)$.

   **Hint:** Muestre la siguiente cadena de implicaciones $(3c) \Rightarrow (3b) \Rightarrow (3a) \Rightarrow (3c)$. Además, para mostrar $(3a) \Rightarrow (3c)$ muestre su contra positiva, es decir $\sim (3c) \Rightarrow \sim (3a)$.


Profesor: Dr. Paul Acevedo

## PREGUNTAS

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado.

   *a)* muestre que

   $$M \in \mathbb{R} \text{ es e máximo de } A \text{ si, y sólo si, } \begin{cases} 1.\ M \text{ es cota superior de } A. \\ 2.\ M \in A. \end{cases}$$

   *b)* ¿Es posible tener un resultado análogo para el mínimo de $A$?. Si la respuesta es afirmativa, enuncie el resultado y demuéstrelo; si es negativa, dé un contraejemplo.

2. Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada.

   *a)* Muestre que $|\sup\limits_A f| \leq \sup\limits_A |f|$.

   *b)* ¿Es posible tener una relación entre $|\inf\limits_A f|$ y $\inf\limits_A |f|$? Si la respuesta es afirmativa, conjeture la relación y demuéstrela; y si es negativa, dé un contraejemplo.

3. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos tal que $x_n \to x$. Usando la definición de convergencia de una sucesión, muestre que $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

4. *a)* Sea $a \in \mathbb{R}$. Muestre que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > |a|$.

   *b)* Use (4*a*) para mostrar que para cualquier $n \geq k$, $\left|\dfrac{a^n}{n!}\right| < \dfrac{|a|^{k+1}}{k!n}$, donde $m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ (el factorial de $m$).

   *c)* Mediante la definición de convergencia de una sucesión, muestre que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ fijo.

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^2}{n!}.$$

Profesor: Dr. Paul Acevedo

## Escuela Politécnica Nacional
## Hoja de enunciados
## Complementos de cálculo • Quinto Control

Semestre 2018-A — Departamento de Matemática

## Preguntas

1. Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ la sucesión definida por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ para $n \geq 1$.

   *a)* Muestre que $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy.

   *b)* ¿Por qué $(x_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente? Argumente con precisión su respuesta.

   *c)* Halle el límite de dicha sucesión.

2. Sea $(x_n)_{n\geq 1} = (\sqrt{n})_{n\geq 1}$.

   *a)* Muestre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$.

   *b)* Pruebe que $(x_n)_{n\geq 1}$ no es una sucesión de Cauchy.

   *c)* ¿Contradice este ejemplo la definición de sucesión de Cauchy? Argumente con precisión su respuesta.

3. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$. muestre que no existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = L$.

Profesor: Dr. Paul Acevedo

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
HOJA DE ENUNCIADOS
COMPLEMENTOS DE CÁLCULO • EXÁMEN FINAL

Semestre 2018-A | Departamento de Matemática

## INDICACIONES

- Considere a lo largo de este examen que $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y no olvide justificar adecuadamente toda afirmación realizada.

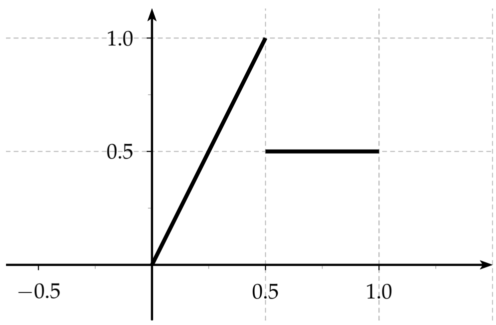
## PREGUNTAS

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función decreciente. demuestre que el conjunto $f(A)$ posee ínfimo y supremo y que
$$f(\sup(A)) \leq \text{ínf}(f(A)) \leq \sup(f(A)) \leq f(\text{ínf}(A)).$$

2. Muestre que la sucesión $\left\{\dfrac{\cos(n^2\pi)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, usando la definición.

3. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, diferenciable en $(a,b)$ y tal que $f(a) = f(b) = 0$. Muestre que
$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x_0 \in (a,b))(f'(x_0) = Kf(x_0))$$
**Hint:** Estudie la función $g(x) = f(x)e^{-Kx}$.

4. Usando la caracterización de una función Darboux integrable, muestre que la función dada en la figura es Rienmann integrable en $[0,1]$ :




Además, halle el valor de la integral sin usar el teorema fundamental del cálculo.

5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que $f(x) = \displaystyle\int_0^x \text{sen}(x-t)f(t)dt$. Muestre que $f$ posee derivadas de todos los ordenes (primera, segunda, tercera, etc.) en $(a,b)$ y que $\frac{d^n f}{dx^n}f(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$ y para todo $n \geq 2$.

Profesor: Dr. Paul Acevedo