Escuela Politécnica Nacional

Análisis Matemático II • Deber N. 2

Sucesiones

23 de abril de 2015 *Profesor: Mat. Andrés Merino*

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$.

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$.

   c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+n}-2n$.

   d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{(n+a)(n+b)}-n$, con $a>0$ y $b>0$.

   e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+n}-\sqrt{n^3+1})$.

   f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$.

2. En las siguientes sucesiones, demostrar que convergen y calcular su límite.

   a) $x_1=2$, y $x_{n+1}=2-\frac{1}{x_n}$ para $n\in\mathbb{N}$.

   b) $x_1=0$, y $x_{n+1}=\frac{x_n+4}{3}$ para $n\in\mathbb{N}$.

   c) $x_1=2$, y $x_{n+1}=1+\sqrt{x_n-1}$ para $n\in\mathbb{N}$.

3. Demostrar que toda sucesión acotada y decreciente, converge, es decir, tiene un límite.

$\aleph$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

COMPLEMENTOS DE CÁLCULO • DEBER N. 3

LÍMITES DE FUNCIONES

12 de mayo de 2015 *Profesor: Mat. Andrés Merino*

1. Demostrar los siguientes límites (los dominios de definición de las funciones son todos los reales):

   a) $\lim_{x\to a} x^3 = a^3$.

   Demostración. Se debe demostrar que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |x^3 - a^3| < \epsilon).$$

Sea $\epsilon > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |x^3 - a^3| < \epsilon).$$

Notemos que

$$|x^3 - a^3| = |x-a||x^2 + xa + a^3|,$$

por lo tanto, debemos acotar el factor $|x^2 + xa + a^2|$. Para esto, tomemos[1]

$$|x-a| < |a|, \tag{1}$$

por lo tanto,

$$-|a| < x - a < |a|.$$

- Si $a > 0$ entonces $|a| = a$. Por lo tanto,

$$\begin{gathered} -a < x - a < a \\ 0 < x < 2a \\ 0 < x^2 < 4a^2 \qquad \text{y} \qquad 0 < ax < 2a^2 \\ 0 < x^2 + ax < 6a^2 \\ 0 < x^2 + ax + a^2 < 7a^2 \\ |x^2 + ax + a^2| < 7a^2 \end{gathered}$$

- Si $a < 0$ entonces $|a| = -a$. Por lo tanto,

$$\begin{gathered} a < x - a < -a \\ 2a < x < 0 \\ 0 < x^2 < 4a^2 \qquad \text{y} \qquad 0 < ax < 2a^2 \\ 0 < x^2 + ax < 6a^2 \\ 0 < x^2 + ax + a^2 < 7a^2 \\ |x^2 + ax + a^2| < 7a^2 \end{gathered}$$

Con esto, se tiene que

$$|x^3 - a^3| = |x-a||x^2 + xa + a^3| < 7a^2|x-a|.$$

[1] Para esto, suponemos $a \neq 0$, el caso $a = 0$ se lo realizaría por separado y es más simple

Por lo tanto, para que $|x^3 - a^3| \leq \epsilon$, es necesario que $|x - a| < \frac{\epsilon}{7a^2}$. Así, teniendo en cuenta (1), se tiene que tomando $\delta = \text{mín}\left\{|a|, \frac{\epsilon}{7a^2}\right\}$ se cumple. $\square$

b) $\lim_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$, recordar que $|\operatorname{sen}(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Se debe demostrar que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| < \epsilon).$$

Sea $\epsilon > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| < \epsilon).$$

Notemos que

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| = \left|2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| = 2\left|\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\right|.$$

como el valor absoluto del coseno de un número siempre es menor que 1, y $|\operatorname{sen}(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| \leq 2 \cdot 1 \left|\frac{x-a}{2}\right| = |x - a|$$

Por lo tanto, para que $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)| \leq \epsilon$, es necesario que $|x - a| < \epsilon$. Así, tomando $\delta = \epsilon$ se cumple. $\square$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demostración. Se debe demostrar que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 0| < \epsilon).$$

Sea $\epsilon > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 0| < \epsilon).$$

- Si $x \in \mathbb{Q}$,

  $$|f(x) - 0| = |x - 0|$$

  Por lo tanto, para que $|f(x) - 0| \leq \epsilon$, es necesario que $|x - 0| < \epsilon$. Así, tomando $\delta = \epsilon$ se cumple.
- Si $x \notin \mathbb{Q}$,

  $$|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0$$

  Por lo tanto, $|f(x) - 0| \leq \epsilon$ se cumple, sin necesitar ninguna condición.

De aquí, para satisfacer ambos casos, podemos tomar $\delta = \epsilon$ y se cumple. $\square$

d) $\lim_{x \to a} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Demostración. Se debe demostrar que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \left(0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| < \epsilon\right).$$

Sea $\epsilon > 0$, se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow \left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| < \epsilon\right).$$

Notemos que

$$\left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| = |x - 0| \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

como el valor absoluto del seno de un número siempre es menor que 1, se tiene que

$$\left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| < |x - 0|$$

Por lo tanto, para que $\left|x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0\right| \leq \epsilon$, es necesario que $|x - 0| < \epsilon$. Así, tomando $\delta = \epsilon$ se cumple. □

2. Demostrar que no existen los siguientes límites:

   a) $\lim_{x \to 0} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas por

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad y_n = \frac{\sqrt{2}}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que $x_n \in \mathbb{Q}$ y $y_n \notin \mathbb{Q}$ para todo[2] $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$f(x_n) = 1 \qquad \text{y} \qquad f(y_n) = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión constante 1 y $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión constante 0.

Con esto, se tiene que

$$x_n \to 0 \qquad \text{y} \qquad y_n \to 0,$$

pero

$$f(x_n) \to 1 \qquad \text{y} \qquad f(y_n) \to 0,$$

por lo tanto, $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. □

   b) $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$.

Demostración. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definidas por

$$x_n = 1 + \frac{1}{n},$$

[2] Si $\frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{Q}$, entonces $\frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{p}{q}$, con p y q enteros, por lo tanto, $\sqrt{2} = \frac{pn}{q}$, es decir, $\sqrt{2}$ sería racional, lo cual es absurdo.

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$f(x_n) = n^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots)$ es una sucesión no acotada, entonces no converge, por lo tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. $\square$

3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $L < 0$, demostrar que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < 0 \qquad \text{para todo } x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}.$$

Demostración. Se tiene que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

Para $-L/2 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{R})(0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < -L/2),$$

es decir

$$|f(x) - L| < -L/2,$$

para todo $x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$. Notemos que

$$f(x) - L \leq |f(x) - L| < -L/2,$$

por lo tanto,

$$f(x) < L/2,$$

como $L < 0$, se tiene que

$$f(x) < 0 \qquad \text{para todo } x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}.$$

$\square$

ℵ

Escuela Politécnica Nacional

Complementos de Cálculo • Deber N. 4

Límites laterales, infinitos y al infinito

20 de mayo de 2015 *Profesor: Mat. Andrés Merino*

1. Escribir la definición de:

   a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

   b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces
$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty.$$

3. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\beta < 0$, entonces
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

4. Demostrar que si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = M$, entonces
$$\lim_{x\to +\infty}(f(x) + g(x)) = L + M.$$

5. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Donde
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x - 1 & \text{si } x > 1 \\ 5x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

6. Para qué valores de a existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, donde
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x^2 - 1) & \text{si } x > 1 \\ ax^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

ℵ