Corrección del Deber

Mat. Andrés Merino

Ejercicio: Demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1} - 0\right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n},$$

pues $n + 1 > n$, para $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1} - 0\right| < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Utilizando la propiedad arquimediana para $1/\epsilon^2$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\epsilon^2} < N.$$

Este N cumple, pues si $n > N$,

$$\frac{1}{\epsilon^2} < n$$

es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1} - 0\right| < \epsilon. \qquad \square$$

Ejercicio: Demostrar que si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

Demostración. Supongamos que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, es decir,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |x_n - 0| < \epsilon). \tag{1}$$

Debemos demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

Sea $\epsilon > 0$, se tiene que

$$|\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n}.$$

Para $\epsilon^2 > 0$, en (1), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Longrightarrow |x_n - 0| < \epsilon^2,$$

es decir

$$n > N \Longrightarrow x_n < \epsilon^2.$$

Este N cumple, pues si $n > N$,

$$x_n < \epsilon^2,$$

es decir,

$$\sqrt{x_n} < \epsilon.$$

Por lo tanto,

$$|\sqrt{x_n} - 0| < \epsilon.$$ □

Observación: Para $x \in \mathbb{R}$, no se cumple que

$$\sqrt{x} \leq x,$$

(ejemplo $x = 1/4$), ni

$$\sqrt{x} \geq x,$$

(ejemplo $x = 4$).