Axiomas de los Números Reales

Axioma Fundamental

Existe un conjunto llamado el CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES, denotado por $\mathbb{R}$, que satisface los cuatro tipos de axiomas: de igualdad, de cuerpo, de orden y de completitud.

Axiomas de igualdad

Para los elementos x, y, z de $\mathbb{R}$, existe una relación llamada de IGUALDAD, denotada por "$=$", que cumple las siguientes propiedades:

I1. $x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

I2. Si $x = y$, entonces $y = x$.

I3. Si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.

I4. Si $P(x)$ es una proposición verdadera, y $x = y$, entonces $P(y)$ también es verdadera.

Axiomas de cuerpo

En el conjunto $\mathbb{R}$ se definen dos operaciones internas (binarias), llamadas ADICIÓN y MULTIPLICACIÓN, denotadas por $x + y$ y $x \cdot y$ respectivamente, que cumple las siguientes propiedades:

A1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

A2. $x + y = y + x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

A3. Existe un elemento de $\mathbb{R}$, denotado por 0, tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$. A este elemento lo notaremos $-x$.

M1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

M2. $x \cdot y = y \cdot x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

M3. Existe un elemento de $\mathbb{R}$, denotado por 1, tal que $x \cdot 1 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

M4. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 0$, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot y = 1$. A este elemento lo notaremos x^{-1}.

D1. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

D2. $0 \neq 1$.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$, llamado el conjunto de los NÚMEROS REALES POSITIVOS, que cumple las siguientes propiedades:

O1. La suma y producto de números reales positivos son números reales positivos. Es decir, si $x, y \in \mathbb{R}^+$, entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

O2. Dado $x \in \mathbb{R}$, se verifica una, y solo una de las siguientes tres alternativas:

- $x = 0$,
- $x \in \mathbb{R}^+$,
- $-x \in \mathbb{R}^+$.

Axiomas de completitud

C1. Todo conjunto no vacío y acotado superiormente $X \subseteq \mathbb{R}$ posee *supremo*.

Resumen de Lógica

1 Conectores Lógicos

Sea p la proposición "$a \in B$" (x es elemento de B) y q la proposición "$x = f(y)$" (x es igual a f de y).

Negación

- Símbolo: $\neg$.
- Se lee: "no".
- Ejemplo: $\neg p$ es la proposición $a \notin B$; x no es elemento de B.
- Tabla de verdad:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Conjunción

- Símbolo: $\wedge$.
- Se lee: "y".
- Ejemplo: $p \wedge q$ es la proposición $(a \in B) \wedge (x = f(y))$; x es elemento de B y x es igual a $f(y)$.
- Tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

- Símbolo: $\vee$.
- Se lee: "o".
- Ejemplo: $q \vee p$ es la proposición $(x = f(y)) \vee (a \in B)$; x es igual a $f(y)$ o x es elemento de B.
- Tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

- Símbolo: $\Rightarrow$.
- Se lee: "implica"; "si…, entonces".
- Ejemplo: $q \Rightarrow p$ es la proposición $(x = f(y)) \Rightarrow (a \in B)$; x es igual a $f(y)$ implica x es elemento de B; si x es igual a $f(y)$, entonces x es elemento de B.
- Tabla de verdad:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

- Símbolo: $\Leftrightarrow$.
- Se lee: "si y solo si".
- Ejemplo: $p \Leftrightarrow q$ es la proposición $(a \in B) \Leftrightarrow (x = f(y))$; x es elemento de B si y solo si x es igual a $f(y)$.
- Tabla de verdad:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.1 Propiedades básicas de los Conectores Lógicos

Doble negación

$$\neg\neg p \iff p.$$

Leyes de idempotencia

$$(p \vee p) \iff p$$
$$(p \wedge p) \iff p.$$

Leyes asociativas

$$(p \wedge (q \wedge r)) \iff ((p \wedge q) \wedge r))$$
$$(p \vee (q \vee r)) \iff ((p \vee q) \vee r)).$$

Leyes conmutativas

$$(p \wedge q) \iff (q \wedge p)$$
$$(p \vee q) \iff (q \vee p).$$

Leyes distributivas

$$((p \wedge q) \vee r) \iff ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$$
$$((p \vee q) \wedge r) \iff ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)).$$

Leyes de DeMorgan

$$\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$$
$$\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q).$$

Caracterización del condicional

$$(p \Rightarrow q) \iff (\neg p \vee q).$$

Transitividad del condicional

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Longrightarrow (p \Rightarrow r).$$

Caracterización del bicondicional

$$(p \Leftrightarrow q) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)).$$

Negación en un bicondicional

$$(p \Leftrightarrow q) \iff (\neg p \Leftrightarrow \neg q).$$

Principio del tercero excluido

$$p \vee \neg p.$$

2 Cuantificadores

Sea P la proposición que dependa de una variable x, por ejemplo $P(x)$ la proposición “x es un número primo”.

Cuantificador Universal

- Símbolo: $\forall$.
- Se lee: “para todo”.
- Ejemplo: $(\forall y)P(y)$ es la proposición: para todo y, y es un número primo; todo y es un número primo.

Cuantificador Existencial

- Símbolo: $\exists$.
- Se lee: “existe”.
- Ejemplo: $(\exists z)P(z)$ es la proposición: existe z tal que y es un número primo; existe un número primo.

Negación de cuantificadores

$$\neg(\exists z)P(z) \iff (\forall y)\neg P(y)$$
$$\neg(\forall z)P(z) \iff (\exists y)\neg P(y).$$

3 Reglas de inferencia

Deducción: Si se tiene p y se tiene q, se puede concluir $p \Rightarrow q$.

$$p, \ldots, q \vdash p \Rightarrow q.$$

Modus Ponens: Si se tiene p implica q, y se tiene p, se puede concluir q.

$$p \Rightarrow q, p \vdash q.$$

Modus Tollens: Si se tiene p implica q, y se tiene $\neg q$, se puede concluir $\neg p$.

$$p \Rightarrow q, \neg q \vdash \neg p.$$

Introducción de la conjunción: Si se tiene p y se tiene q, se puede concluir $p \wedge q$.

$$p, q \vdash (p \wedge q).$$

Introducción de la disyunción: Si se tiene p, se puede concluir $p \vee q$.

$$p \vdash (p \vee q).$$

Eliminación de la conjunción: Si se tiene $p \wedge q$, se puede concluir p.

$$(p \wedge q) \vdash p.$$

Silogismo disyuntivo: Si se tiene $p \vee q$, y se tiene $\neg q$, se puede concluir p.

$$(p \vee q), \neg q \vdash p.$$

Casos: Si se tiene $p \vee q$, se tiene $p \Rightarrow r$, y se tiene $q \Rightarrow r$, se puede concluir r.

$$(p \vee q), p \Rightarrow r, q \Rightarrow r \vdash r.$$

Reducción al absurdo: Si se tiene p, se tiene q, y se tiene $\neg q$, se puede concluir $\neg p$.

$$p, \ldots, q, \neg q \vdash \neg p.$$

Contrarrecíproco: Si se tiene $p \Rightarrow q$, se puede concluir $\neg q \Rightarrow \neg p$.

$$p \Rightarrow q \vdash \neg q \Rightarrow \neg p.$$

Particularización universal: Si se tiene $(\forall x)P(x)$, se puede concluir $P(a)$.

$$(\forall x)P(x) \vdash P(a).$$

Generalización universal: Si se tiene $P(a)$, donde *a no es una contante*, se puede concluir $(\forall x)P(x)$.

$$P(a) \vdash (\forall x)P(x).$$

Particularización existencial: Si se tiene $(\exists x)P(x)$, se puede concluir $P(a)$, *para alguna contante a*.

$$(\exists x)P(x) \vdash P(a).$$

Generalización existencial: Si se tiene $P(a)$, se puede concluir $(\exists x)P(x)$.

$$P(a) \vdash (\exists x)P(x).$$