# CLUB DE MATEMÁTICA EPN

## COMPLEMENTOS DE CÁLCULO • SEMANA 1

### INTRODUCCIÓN A LAS DEMOSTRACIONES

$\aleph_0$

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basas en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta matera y revisados por el profesor Andrés Merino.

# 1. PROPOSICIONES DEL TIPO $p \Rightarrow q$

En Matemática es usual demostrar proposiciones de la forma

$$p \Rightarrow q$$

donde

- $p$: hipótesis o antecedente;
- $q$: tesis o consecuente.

Esta proposición de lee

"si $p$, entonces $q$"

y se dice que "$p$ implica $q$". Otra terminología común respecto a esta proposición es:

- **Condición necesaria:** una condición necesaria para $p$ es $q$;
- **Condición suficiente:** una condición suficiente para $q$ es $p$.

Otra forma usual de proposición es

$$p \Longleftrightarrow q,$$

la cual se lee "$p$ si y solo si $q$" y se dice que $p$ es una condición suficiente y necesaria para $q$ y es equivalente a

$$p \Rightarrow q \qquad \text{y} \qquad q \Rightarrow p.$$

## 1.1 Métodos de demostración

### 1.1.1. Método directo

Para demostrar que una proposición del tipo $p \Rightarrow q$ basta desarrollar el siguiente proceso.

- Suponer la veracidad de $p$ (*usarla con toda seguridad*).
- Realizar una secuencia finita de razonamientos verdaderos a partir de la hipótesis. Conjugar axiomas, teoremas, proposiciones, lemas y corolarios que conectan a la proposición $p$ con la proposición $q$. Para esto, usar las reglas de inferencia.
- Concluir $q$ directamente de las conclusiones obtenidas en el paso anterior.

**EJEMPLO 1.** Sea $k \in \mathbb{Z}$. Una condición suficiente para que $k^2$ sea un número impar es que $k$ sea impar.

*Demostración.* Queremos demostrar la proposición:

si $k$ es impar, entonces $k^2$ es impar.

Por lo tanto, suponemos que $k$ es impar y debemos demostrar que $k^2$ es impar.

Notemos que lo supuesto es equivalente a que

$$k = 2m + 1,$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$; por otro lado, queremos demostrar que existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $k^2 = 2N + 1$.

A partir de nuestro supuesto, notemos que

$$\begin{aligned} k^2 = (2m+1)^2 &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1. \end{aligned}$$

Si tomamos $N = 2m^2 + 2m \in \mathbb{Z}$, se sigue que

$$k^2 = 2N + 1,$$

por lo tanto, $k^2$ es impar. $\square$

### 1.1.2. Método del contrarrecíproco

Para este método, se usa el hecho que

$$p \Rightarrow q \qquad \text{es equivalente a} \qquad \neg q \Rightarrow \neg p;$$

por lo tanto, para demostrar una proposición del tipo $p \Rightarrow q$ basta desarrollar el siguiente proceso.

- Suponer que $\neg p$ es verdadera.

- Realizar una secuencia finita de razonamientos verdaderos (como en el método anterior).
- Concluir que $\neg p$ es verdadera.
- Así, esto demuestra $p \Rightarrow q$ es verdadero.

> Este método es especialmente útil cuando la información brindada por la proposición $p$ no es suficiente para generar el método directo.

**EJEMPLO 2.** Sea $k \in \mathbb{Z}$. Una condición necesaria para que $k^2$ sea impar es que $k$ sea impar.

*Demostración.* Queremos demostrar la proposición:

$$\text{si } k^2 \text{ es impar, entonces } k \text{ es impar.}$$

Utilizando el contrarrecíproco, suponemos que $k$ no es impar y debemos demostrar que $k^2$ no es impar; es decir, suponemos que $k$ es par y debemos demostrar que $k^2$ es par. Notemos que lo supuesto es equivalente a que

$$k = 2m,$$

para algún $m \in \mathbb{Z}$; por otro lado, queremos demostrar que existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $k^2 = 2N$. A partir de nuestro supuesto, notemos que

$$\begin{aligned} k^2 = (2m)^2 &= 4m^2 \\ &= 2(2m^2). \end{aligned}$$

Si tomamos $N = 2m^2 \in \mathbb{Z}$, se sigue que

$$k^2 = 2N,$$

por lo tanto, $k^2$ es par. Así, por el contrarrecíproco, se ha demostrado que si $k^2$ es impar, entonces $k$ es impar. $\square$

### 1.1.3. Método por casos

Para demostrar proposiciones del tipo

$$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_k) \Rightarrow q$$

con $k \in \mathbb{N}^*$, recordemos que esta es equivalente a

$$(p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (p_k \Rightarrow q),$$

por lo tanto, debemos demostrar que

$$(p_i \Rightarrow q)$$

para todo $i = 1, \ldots, k$, mediante alguno de los métodos antes indicados.

Cabe indicar que, en ocasiones, la proposición a demostrar se presenta en la manera que indica este método, por lo tanto, nosotros debemos elegir los casos que generen información para la demostración necesaria.

**EJEMPLO 3.** Sea $n \in \mathbb{Z}$. Se tiene que $n^2 + n + 1$ es impar.

*Demostración.* Dado que $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$n \text{ es par} \qquad \text{o} \qquad n \text{ es impar},$$

vamos a demostrar que $n^2 + n + 1$ es impar; por lo tanto, desarrollemos una demostración por casos.

- CASO 1: suponemos que $n$ es par, vamos a demostrar que $n^2 + n + 1$ es impar.

  Como $n$ es par, se tiene que $n = 2k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, de donde

  $$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2k)^2 + (2k) + 1 \\ &= (4k^2 + 2k) + 1 \\ &= 2(2k^2 + k) + 1. \end{aligned}$$

  Tomando $N = 2k^2 + k \in \mathbb{Z}$, se tiene que

  $$n^2 + n + 1 = 2N + 1,$$

  por lo tanto, $n^2 + n + 1$ es impar.

- CASO 2: suponemos que $n$ es impar, vamos a demostrar que $n^2 + n + 1$ es impar.

  Como $n$ es impar, se tiene que $n = 2m + 1$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, de donde

  $$\begin{aligned} n^2 + n + 1 &= (2m + 1)^2 + (2m + 1) + 1 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 + 2m + 2 \\ &= 2(2m^2 + 3m) + 1 \end{aligned}$$

Tomando $N = 2m^2 + 3m \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$n^2 + n + 1 = 2N + 1,$$

por lo tanto, $n^2 + n + 1$ es impar.

Por el método de casos, concluimos que si $n$ es cualquier entero, entonces $n^2 + n + 1$ es impar. $\square$

### 1.1.4. Método de reducción al absurdo o por contradicción

Para demostrar que una proposición $q$ es verdadera, se puede desarrollar el siguiente proceso.

- Suponer que $\neg q$ es una proposición verdadera.
- Realizar una secuencia finita de razonamientos verdaderos.
- Concluir la veracidad de alguna proposición $r$ y de su negación, $\neg r$, es decir, concluir una contradicción.
- Esta contradicción muestra que el supuesto original es erróneo, por lo tanto, se tiene que $q$ es verdadera.

Con esto y recodando que

$$p \Rightarrow q \qquad \text{es equivalente a} \qquad \neg p \vee q,$$

para demostrar una proposición del tipo $p \Rightarrow q$ mediante el método de reducción al absurdo, suponemos que

$$p \wedge \neg q$$

es verdadera y procedemos a hallar una contradicción.

**EJEMPLO 4.** Sea $A$ un conjunto no vacío. Se tiene que $A \cap A^c = \varnothing$.

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que $A \cap A^c \neq 0$. Como $A \cup A^c \neq \varnothing$, existe un elemento $b \in A \cap A^c$. Por definición de intersección de conjuntos se tiene que

$$b \in A \quad \wedge \quad b \in A^c.$$

Por definición de complemento de un conjunto

$$b \notin A,$$

así, $b \in A$ y $b \notin A$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, el supuesto es falso, de donde, $A \cap A^c = \varnothing$. $\square$

> Este último método de demostración no es exclusivo para proposiciones de la forma $p \Rightarrow q$.

## 2. Proposiciones con cuantificadores

**Definición 1**

Un predicado es una proposición o conjunto de proposiciones lógicas que dependen de una o más variables. Se las nota de la forma $P(x)$, donde $x$ es la variable de la cual depende el predicado.

**Definición 2**

Dado un conjunto $A$ y un predicado $P(x)$ referente a los elementos de $A$, se define las siguientes proposiciones:

- **Universal:** se denota por

$$(\forall x \in A)P(x)$$

y se lee "para todo $x$ en $A$ se cumple $P(x)$".

- **Existencial:** se denota por

$$(\exists x \in A)P(x)$$

y se lee "existe $x$ en $A$ tal que $P(x)$".

> Dado un conjunto $A$ y un predicado $P(x)$ referente a los elementos de $A$ se tiene que
>
> - $\neg\big((\forall x \in A)P(x)\big)$ equivale a $(\exists x \in A)\neg P(x)$,
> - $\neg\big((\exists x \in A)P(x)\big)$ equivale a $(\forall x \in A)\neg P(x)$.

### 2.1 Métodos de demostración

Para demostrar una proposición del tipo

$$(\exists x \in A)P(x)$$

se debe encontrar o determinar un elemento $x_0$ del conjunto $A$ de tal forma que $P(x_0)$ sea verdadero.

Para demostrar una proposición del tipo

$$(\forall x \in A) P(x)$$

se toma un elemento arbitrario $x$ del conjunto $A$ y se demuestra que la proposición $P(x)$ es verdadera.

**EJEMPLO 5.** Para cualquier número real existe otro real tal que lo domina, es decir, que el segundo sea mayor que el primero.

*Demostración.* Se debe demostrar la proposición

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\ (x < y).$$

Tomemos un elemento arbitrario de $\mathbb{R}$, sea $x \in \mathbb{R}$, debemos demostrar que la proposición

$$(\exists y \in \mathbb{R})\ (x < y)$$

es verdadera, para esto, debemos hallar $y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$. Si tomamos $y = x + 1 \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$x < x + 1 = y.$$

Con esto, se ha demostrado que para todo número real existe otro real tal que lo domina. □

**EJEMPLO 6.** Existe un número real tal que sea menor o igual que cualquier números natural.

*Demostración.* Se debe demostrar la proposición

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{N})\ (x \leq y);$$

es decir, debemos hallar un $x \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier elemento $y \in \mathbb{N}$ se tenga que

$$x \leq y.$$

Tomando $x = 0 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$0 \leq y$$

para todo $y \in \mathbb{N}$, por lo tanto, se ha demostrado el enunciado. □

### 2.2 Contraejemplo

Se utiliza un contraejemplo para determinar la falsedad de proposiciones universales, es decir, dada una proposición del tipo

$$(\forall x \in A)P(x),$$

si se exhibe algún elemento $x_0$ de $A$ tal que la proposición

$$\neg P(x_0)$$

es verdadera, se concluye que la proposición

$$(\forall x \in A)P(x),$$

es falsa.

**EJEMPLO 7.** Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, si $a^2 = b^2$, entonces $a = b$.

*Demostración.* Notemos que, si tomamos $a = 1$ y $b = -1$, tenemos que

$$a^2 = 1 = (-1)^2 = b^2$$

pero

$$1 \neq -1,$$

es decir,

$$a \neq b.$$

De donde, podemos concluir que el enunciado es falso. □

### 2.3 Reglas de Inferencia

- **Modus ponens universal**

$$\begin{array}{ll} \forall x: & P(x) \Rightarrow Q(x) \\ & P(a)\text{ , para algún } a \\ \hline & \therefore Q(a) \end{array}$$

- **Ejemplificación universal**

$$\begin{array}{c} \forall x : P(x) \\ \hline \therefore P(a) \quad \text{Cualquier } a \text{ fijo} \end{array}$$

- **Generalización universal**

$$\frac{P(a) \quad \text{para cualquier } a \text{ fijo}}{\therefore \forall x : P(x)}$$

- **Ejemplificación existencial**

$$\frac{\exists x : P(x)}{\therefore P(a) \quad \text{es cierto para algún } a}$$

- **Generalización existencial**

$$\frac{P(a) \quad \text{para algún } a}{\therefore \exists x : P(x)}$$

# 1. AXIOMAS DE CUERPO O CAMPO

Consideremos un conjunto $\mathbb{K}$, para los axiomas de cuerpo o campo, se requieren dos operaciones:

**DEFINICIÓN 1: Suma**

La operación suma es una función, la cual se denota por:

$$\begin{aligned} +: \ \mathbb{K}\times\mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b) &\longmapsto a+b. \end{aligned}$$

**DEFINICIÓN 2: Producto**

La operación suma es una función, la cual se denota por:

$$\begin{aligned} \cdot: \ \mathbb{K}\times\mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (a,b) &\longmapsto a\cdot b. \end{aligned}$$

**DEFINICIÓN 3: Operación binaria**

Se llama operación binaria sobre un conjunto $\mathbb{K}$ a cualquier función del tipo

$$f: \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}.$$

**DEFINICIÓN 4: Grupo para la suma**

Un conjunto $\mathbb{K}$ se llama grupo sobre una operación binaria, en este caso la suma, si este verifica las siguientes propiedades:

- **Clausura**: Para todo $x, y \in \mathbb{K}$, se tiene que $x+y \in \mathbb{K}$.
- **Asociativa**: Para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$, se verifica que $x+(y+z) = (x+y)+z$.
- **Neutro**: Existe un elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que para todo $x \in \mathbb{K}$, se verifica que $x+0 = 0+x = x$.

- **Inverso**: Para todo $x \in \mathbb{K}$, existe un elemento notado por $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

**DEFINICIÓN 5: Grupo abeliano para la suma**

Un conjunto $\mathbb{K}$ se llama abeliano si este es un grupo sobre una operación binaria y además verifica la conmutabilidad sobre la misma operación. Es decir, para la operación suma, se tiene que para todo $x, y \in \mathbb{K}$

$$x + y = y + x.$$

**DEFINICIÓN 6: Grupo para el producto**

Un conjunto $\mathbb{K}$ se llama grupo sobre una operación binaria, en este caso el producto, si este verifica las siguientes propiedades:

- **Clausura**: Para todo $x, y \in \mathbb{K}$, se tiene que $x \cdot y \in \mathbb{K}$.
- **Asociativa**: Para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$, se verifica que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- **Neutro**: Existe un elemento $1 \in \mathbb{K}$, con $0 \neq 1$, tal que para todo $x \in \mathbb{K}$, se verifica que $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
- **Inverso**: Para todo $x \in \mathbb{K}$, con $x \neq 0$, existe un elemento notado por $x^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1$.

**DEFINICIÓN 7: Grupo abeliano para el producto**

Un conjunto $\mathbb{K}$ se llama abeliano si este es un grupo sobre una operación binaria y además verifica la conmutabilidad sobre la misma operación. Es decir, para la operación producto, se tiene que para todo $x, y \in \mathbb{K}$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

**DEFINICIÓN 8: Campo o cuerpo**

Un conjunto $\mathbb{K}$ se llama campo o cuerpo si es un grupo abeliano tanto para la suma como para el producto y además se verifica que, para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

**Axioma 1**

Existe un conjunto $\mathbb{R}$ llamado el conjunto de los número reales.

**Axioma 2**

En el conjunto $\mathbb{R}$, existen dos operaciones, llamadas suma y producto, bajo las cuales se tiene que $\mathbb{R}$ es un campo.

Los axiomas de campo no caracterizan totalmente al sistema de los números reales.

**Definición 9**

Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Se define

$$a - b = a + (-b)$$

y si $b \neq 0$, se define

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}.$$

De este definición, se tiene que si $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{x} = x^{-1}.$$

**Ejercicio 1.** Muestre que si $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$ y $y \in \mathbb{R}$ son tales que verifican $x \cdot y = 1$, entonces

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

*Demostración.* Para esta demostración vamos a emplear el método directo. Supongamos que $x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$ y $y \in \mathbb{R}$. Ahora, por los axiomas de campo tenemos que

$$\begin{aligned}
y &= 1 \cdot y && \text{existencia del neutro del producto,} \\
&= (x^{-1} \cdot x) \cdot y && \text{existencia del inverso del producto,} \\
&= x^{-1} \cdot (x \cdot y) && \text{asociativa del producto,} \\
&= x^{-1} \cdot 1 && \text{hipótesis,} \\
&= x^{-1} && \text{neutro multiplicativo.}
\end{aligned}$$

□

## 2. Axiomas de Orden

De los axiomas de campo conocemos que, al menos, $\mathbb{R}$ posee los elementos 0 y 1.

**Axioma 3**

Existe un conjunto, llamado los reales positivos, notado por $\mathbb{R}^+$, con $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$, tal que se verifican las siguientes propiedades:

- Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $x + y \in \mathbb{R}^+$.
- Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.
- Para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad a = 0 \quad \veebar \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

**Definición 10: Reales negativos**

Se define el conjunto de los reales negativos como:

$$\mathbb{R}^- = \left\{-x : x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

**Proposición 1.** El conjunto de los números reales se conforma de la siguiente manera

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \sqcup \mathbb{R}^- \sqcup \{0\}.$$

**Definición 11**

Sea $a \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes definiciones:

- $a > 0 \iff a \in \mathbb{R}^+$;
- $a \geq 0 \iff a \in \mathbb{R} \veebar a = 0$;
- $a < 0 \iff -a \in \mathbb{R}^+$;
- $a \leq 0 \iff -a \in \mathbb{R}^+ \veebar a = 0$.

Además, si tomamos $a, b \in \mathbb{R}$, se define:

- $a > b \iff a - b \in \mathbb{R}^+$;

- $a \geq b \iff a > b \veebar a = b$.

## 3. Números naturales

**Definición 12**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que $A$ es un conjunto inductivo si se cumple que

- $0 \in A$; y
- si $n \in A$, entonces $n + 1 \in A$.

Tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ son conjuntos inductivos.

**Definición 13**

Se define el conjunto de los número naturales, denotado por $\mathbb{N}$, por el conjunto inductivo más pequeño, es decir, a la intersección de todos los conjuntos inductivos.

Los elementos del conjunto $\mathbb{N}$ son

- $0$;
- $0 + 1 = 1$;
- $1 + 1 = 2$;
- $2 + 1 = 3$; etc.

**Teorema 2: Inducción finita**

Sea $A \subset \mathbb{N}$, si se cumple que

1. $0 \in A$; y
2. si $x \in A$ implica $x + 1 \in A$,

entonces $A = \mathbb{N}$.

Si queremos demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$, por el teorema anterior, basta demostrar que

1. $P(0)$ es verdadera; y

2. $P(n)$ es verdadera implica $P(n+1)$ sea verdadera.

Una implicación del Teorema de Inducción Finita es el Teorema de Recursión Finita, el cual, a breves rasgos, indica que, para definir una función sobre $\mathbb{N}$, basta definirla para $0$ y en base a suponer definida la función para $n \in \mathbb{N}$, definirla para $n+1$.

**DEFINICIÓN 14: Exponente natural**

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define el número real $a^n$ por

- $a^0 = 1$, y
- $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

**DEFINICIÓN 15**

Se define:

- El conjunto de los número enteros, denotado por $\mathbb{Z}$, a

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- El conjunto de los número racionales, denotado por $\mathbb{Q}$, a

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad q \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se define

$$A^+ = \{x \in A : x > 0\}, \qquad A^- = \{x \in A : x > 0\}$$

y

$$A^* = \{x \in A : x \neq 0\}$$

## 4. REGRESO A LOS AXIOMAS DE ORDEN

**EJERCICIO 2.** Muestre que si $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.

*Demostración.* Supongamos $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, vamos a demostrar que $a^2 > 0$.

Por tricotomía de los números reales, tenemos que

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \veebar \quad -a \in \mathbb{R}^+.$$

Aplicando el método de demostración por casos, tenemos lo siguiente.

- Supongamos que $a \in \mathbb{R}^+$. Notemos que

  $$a^2 = a \cdot a$$

  de donde, por la propiedad clausurativa del producto concluimos que $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

- Supongamos que $a \in \mathbb{R}^-$. Notemos que

  $$a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a).$$

  Dado que, $a \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $-a \in \mathbb{R}^+$, entonces, por la propiedad clausurativa del producto concluimos que $a^2 \in \mathbb{R}^+$.

Por tanto, hemos demostrado que si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$. $\square$

**EJERCICIO 3.** Muestre que $1 > 0$.

*Demostración.* Notemos que $1 \in \mathbb{R}$ y $1 \neq 0$, además, tenemos que

$$1 = 1 \cdot 1 = 1^2.$$

Así, por lo demostrado en el ejercicio anterior, podemos concluir que $1 > 0$. $\square$

**EJERCICIO 4.** Muestre que si $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $n > 0$.

*Demostración.* Para realizar esta demostración vamos a emplear el método de inducción matemática. Consideremos la proposición

$$P(n): \quad n > 0.$$

- Primero, vamos a demostrar que nuestra preposición $P(n)$ es verdadera para $n = 1$.

  Por el ejercicio anterior, sabemos que $n = 1 > 0$, de donde $P(1)$ es cierta.

- Paso de la inducción. Supongamos que $P(k)$ es cierto para algún $k \in \mathbb{N}^*$, vamos a demostrar que $P(k+1)$ es cierta

  Como $k > 0$, entonces por definición $k \in \mathbb{R}^+$ y como $1 > 0$, entonces $1 \in \mathbb{R}^+$. Por clausura de la suma en $\mathbb{R}^+$, tenemos que

  $$k + 1 \in \mathbb{R}^+,$$

  es decir $k + 1 > 0$.

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n > 0$. □

**DEFINICIÓN 16: Intervalo en $\mathbb{R}$**

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que $I$ es un intervalo si para todo $a, b \in I$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$a < x < b$$

se tiene que $x \in I$.

**DEFINICIÓN 17: Valor absoluto**

Sea $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de $x$, denotado por $|x|$, se define de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Semestre 2019-A Daniel Lara


Estos apuntes se basas en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta matera y revisados por el profesor Andrés Merino.

## 1. Cotas de un conjunto

**Definición 1: Cota superior**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto. Se llama cota superior del conjunto $A$ a un número $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq M$$

para todo $a \in A$.

**Definición 2: Cota inferior**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto y $a \in A$. Se llama cota inferior del conjunto $A$ a un número $m \in \mathbb{R}$ tal que

$$m \leq a$$

para todo $a \in A$.

**Proposición 1.** Todo conjunto finito es acotado tanto inferiormente como superiormente.

**Proposición 2.** El conjunto $\varnothing$ es acotado por vacuidad.

**Observación 1.** Notar que si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ posee una cota superior (respectivamente una cota inferior), entonces dicho conjunto posee infinitas cotas superiores (respectivamente cotas inferiores). Es decir, si $A$ es acotado superiormente, entonces existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$ para todo $a \in A$, de esta manera, por los axiomas de orden y de campo, tenemos que

$$M < M + 1$$

con $M+1 \in \mathbb{R}$, por lo tanto, $M+1$ también es una cota superior de $A$. En otras palabras, tanto el conjunto de cotas superiores como el de cotas inferiores son conjuntos infinitos.

**OBSERVACIÓN 2.** Si $A$ es acotado superiormente, entonces el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota superior de } A\}$$

tiene cardinalidad infinita y además se verifica que

$$a \leq x$$

para todo $x \in S$ y para todo $a \in A$.

**DEFINICIÓN 3: Relación de orden parcial**

Una relación $\mathcal{R}$, sobre un conjunto $\mathbb{K}$, se dice que es una relación de orden parcial si cumple las siguientes propiedades:

- reflexiva,
- antisimétrica,
- transitiva.

**DEFINICIÓN 4: Relación de orden total**

Una relación $\mathcal{R}$, sobre un conjunto $\mathbb{K}$, se dice que es una relación de orden total si verifica las propiedades de una relación de orden parcial y, además, se cumple que para todo $a, b \in \mathbb{K}$

$$a\mathcal{R}b \qquad \text{o} \qquad b\mathcal{R}a.$$

**PROPOSICIÓN 3.** La relación "$\leq$" es una relación de orden total en $\mathbb{R}$.

**PROPOSICIÓN 4.** Dado un conjunto $E$, la relación "$\subseteq$" es una relación de orden parcial en $\mathcal{P}(E)$.

**EJEMPLO 1.** Consideremos $E \neq \varnothing$ y el conjunto $\mathcal{P}(E)$, con

$$E = \{1,2,3\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{P}(x) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, E\}$$

además, consideremos

$$A = \{1\} \subseteq E \qquad \text{y} \qquad B = \{1, 2\} = \subseteq E,$$

así es fácil notar que

$$A \subseteq B.$$

Por otra parte, si consideramos

$$C = \{1\} \qquad \text{y} \qquad D = \{2\},$$

notemos que

$$C \not\subseteq D \qquad \text{y} \qquad D \not\subseteq C.$$

**OBSERVACIÓN 3.** Notemos que, gracias a los axiomas de orden y el hecho de que "$\leq$" es una relación de orden total sobre $\mathbb{R}$, nos permite preguntarnos, ¿cuál es la menor de las cotas superiores de un conjunto?

## 2. SUPREMOS E ÍNFIMOS

**DEFINICIÓN 5: Supremo**

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto acotado superiormente, se dice que $s \in \mathbb{R}$ es supremo de $A$ si:

- $s$ es una cota superior de $A$,
- $s \leq v$ para toda $v$ cota superior de $A$.

El supremo, si existe, es la menor de las cotas superiores de un conjunto.

**DEFINICIÓN 6: Ínfimo**

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto acotado inferiormente, se dice que $i \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de $A$ si:

- $i$ es una cota inferior de $A$,
- $v \leq i$ para toda $v$ cota inferior de $A$.

El ínfimo, si existe, es la mayor de las cotas inferiores del conjunto.

**Ejemplo 2.** Consideremos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 5\}$

Notemos que el conjunto de todas las cotas superiores es el intervalo

$$[5, +\infty),$$

así, el supremo de $A$ es 5. Por otra parte, notemos que el conjunto de todas las cotas inferiores es el intervalo

$$(-\infty, 1],$$

así el ínfimo de $A$ es 1, lo que notamos por

$$\sup(A) = 5 \notin A \qquad \text{y} \qquad \text{ínf}(A) = 1 \in A.$$

**Ejemplo 3.** Consideremos el siguiente conjunto $B = \left\{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq \sqrt{2}\right\}$. Notemos que $B$ es un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Así, el conjunto de cotas superiores es

$$\left[\sqrt{2}, +\infty\right).$$

Por otra parte, el conjunto de cotas inferiores es

$$(-\infty, 0].$$

**Definición 7: Números reales extendido**

Dado el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales extendido se define por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

En $\overline{\mathbb{R}}$, tanto $-\infty$ como $+\infty$ son solo símbolos nuevos, es decir, no son número reales, por lo tanto, debemos definir cómo se comportan con respecto a la suma, el producto y el orden de $\mathbb{R}$; es decir, debemos extender las operaciones y orden de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$.

**Definición 8**

Se extienden las operaciones de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente manera, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\pm\infty + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,$$

$$(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, \qquad (\mp\infty)(\pm\infty) = -\infty,$$

$$x(\pm\infty) = (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \mp\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Notemos que no se definen la operación

$$\pm\infty + (\mp\infty),$$

además, $\pm\infty$ no tiene ni inverso aditivo ni inverso multiplicativo.

**DEFINICIÓN 9**

Se extienden el orden de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$ de la siguiente manera, para $x \in \mathbb{R}$,

$$-\infty < x \qquad \text{y} \qquad x < +\infty,$$

además,

$$-\infty < +\infty.$$

**PROPOSICIÓN 5.** El conjunto de los números reales extendidos $\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto con orden total.

**PROPOSICIÓN 6.** El conjunto de los reales es un subconjunto de los reales extendidos, es decir

$$\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}.$$

**PROPOSICIÓN 7.** Si el $\sup(A) \in A$, entonces se conoce como máximo de $A$.

**PROPOSICIÓN 8.** Si el $\inf(A) \in A$, entonces se conoce como mínimo de $A$.

**EJEMPLO 4.** Consideremos el conjunto $C = \varnothing$.

Notemos que, el conjunto $\varnothing$ es acotado tanto superiormente como inferiormente. Así, el conjunto de cotas superiores e inferiores de $C$ es $\mathbb{R}$. Por otra parte, notemos que

$$\sup(\varnothing) \quad \text{e} \quad \text{ínf}(\varnothing)$$

no existen en $\mathbb{R}$. Consideremos entonces el sistema extendido de los números reales. Tenemos $\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto de cotas superiores e inferiores para $\varnothing$. Así, por definición de ínfimo y supremo en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\sup(\varnothing) = -\infty \quad \text{e} \quad \text{ínf}(\varnothing) = +\infty.$$

**TEOREMA 9**

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $\sup(A)$ y $\text{ínf}(A)$ existen, son únicos.

**TEOREMA 10: Caracterización del supremo**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y $u \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\sup(A) = u$$

si y solo si

*a)* $u$ es una cota superior de $A$; y

*b)* para todo $\epsilon > 0$, existe $a_\epsilon \in A$ tal que $u - \epsilon < a_\epsilon$, es decir,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a_\epsilon \in A)(u - \epsilon < a_\epsilon).$$

**TEOREMA 11: Caracterización del ínfimo**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y $v \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\text{ínf}(A) = v$$

si y solo si

*a)* $v$ es una cota inferior de $A$; y

*b)* para todo $\epsilon > 0$, existe $a_\epsilon \in A$ tal que $v + \epsilon > a_\epsilon$, es decir,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists a_\epsilon \in A)(v + \epsilon > a_\epsilon).$$

$\aleph_0$

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basas en las clases de la materia “Complementos de Cálculo”, dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta matera y revisados por el profesor Andrés Merino.

# 1. PROPIEDADES DE ÍNFIMOS Y SUPREMOS

**AXIOMA 1**

Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo en $\mathbb{R}$.

**PROPOSICIÓN 1.** Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo en $\mathbb{R}$.

**PROPOSICIÓN 2.** Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ tiene supremo e ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$.

**PROPOSICIÓN 3.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $A$ es acotado, entonces se tiene que

$$\inf(A) \leq \sup(A).$$

**DEFINICIÓN 1**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos al inverso de un conjunto como

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\} = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$

**PROPOSICIÓN 4.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Si $A$ es acotado inferiormente, entonces $-A$ es acotado superiormente y $\sup(-A) = -\inf(A)$.
- Si $A$ es acotado superiormente, entonces $-A$ es acotado inferiormente e $\inf(-A) = -\sup(A)$.

**Proposición 5. Monotonía**: Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos, tales que $A \subseteq B$.

- Si $B$ es acotado superiormente, entonces $A$ es acotado superiormente y
$$\sup(A) \leq \sup(B).$$
- Si $B$ es acotado inferiormente, entonces $A$ es acotado inferiormente e
$$\text{ínf}(A) \geq \text{ínf}(B).$$

**Proposición 6.** Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se tiene que $a \leq b$, entonces
$$\sup(A) \leq \sup(B).$$

**Proposición 7** (Aditividad)**.** Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ acotados. Se define
$$A + B = \{a + b : a \in A \quad \text{y} \quad b \in B\}.$$
Este nuevo conjunto, cumple las siguientes propiedades:

- $A + B$ es acotado,
- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$,
- $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$.

**Proposición 8.** Sean
$$A = \{a_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$$
una familia acotada de elementos de $\mathbb{R}$ y
$$B = \{b_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$$
otra familia elementos acotados de $\mathbb{R}$. Se definen sobre estas familias de conjuntos indexados las siguientes propiedades:

- **Subaditiva**
$$\sup(\{a_i + b_i\}_{i \in I}) \leq \sup(\{a_i\}_{i \in I}) + \sup(\{b_i\}_{i \in I}),$$

- **Superaditiva**

$$\inf(\{a_i + b_i\}_{i\in I}) \geq \inf(\{a_i\}_{i\in I}) + \inf(\{b_i\}_{i\in I}).$$

Notemos que, para las familias indexadas, se tiene que $\{a_i\}_{i\in I}$ y $\{b_i\}_{i\in I}$

$$\{a_i + b_i\}_{i\in I} \subseteq \{a_i\}_{i\in I} + \{b_i\}_{i\in I},$$

además

$$\sup(\{a_i\}_{i\in I} + \{b_i\}_{i\in I}) = \sup(\{a_i\}_{i\in I}) + \sup(\{b_i\}_{i\in I}).$$

**PROPOSICIÓN 9.** Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado y sea $a \in \mathbb{R}$. Se define

$$aS = \{as : s \in S\}.$$

Este nuevo conjunto cumple las siguientes propiedades:

- aS es acotado;
- si $a \geq 0$, entonces $\sup(aS) = a\sup(S)$;
- si $a < 0$, entonces $\sup(aS) = a\inf(S)$;
- si $a \geq 0$, entonces $\inf(aS) = a\inf(S)$;
- si $a < 0$, entonces $\inf(aS) = a\sup(S)$.

## 2. SUPREMO O ÍNFIMO DE FUNCIONES

En esta sección consideremos $A \subseteq \mathbb{R}$ y

$$f\colon A \to \mathbb{R}$$

una función.

**PROPOSICIÓN 10.** Se dice que $f$ es acotada superiormente si la imagen de $f$ es acotada superiormente, es decir, si

$$\text{Img}(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$$

es acotado superiormente.

**PROPOSICIÓN 11.** Se dice que $f$ es acotada inferiormente si la imagen de $f$ es acotada inferiormente, es decir, si

$$\mathrm{Img}(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$$

es acotado inferiormente.

**PROPOSICIÓN 12.** Se dice que $f$ es acotada si $\mathrm{Img}(f) \subseteq \mathbb{R}$ es acotada, es decir si $f$ es acotada superior e inferiormente.

**PROPOSICIÓN 13** (Propiedades del supremo e ínfimo de funciones)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f \leq g$, es decir, para todo $x \in A$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$. Dadas estas funciones se cumplen las siguientes propiedades:

- si $g$ es acotada superiormente entonces $f$ también es acotada superiormente y
$$\sup(f) \leq \sup(g);$$
- si $f$ es acotada inferiormente entonces $g$ es acotada inferiormente y
$$\inf(f) \leq \inf(g).$$

**EJEMPLO 1.** Sea $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Las funciones $f$ y $g$ definidas como

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x+1. \end{aligned}$$

Notemos que para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $f(x) \leq g(x)$. Además

$$\inf(f) = 0, \inf(g) = 1, \sup(f) = 2 \qquad \text{y} \qquad \sup(g) = 3$$

es decir, podemos ver que

$$\inf(f) = 0 \leq= 1 \inf(g) \qquad \text{y} \qquad \sup(f) = 2 \leq 3 = \sup(g).$$

**EJEMPLO 2.** Sean las funciones $f$ y $g$ definidas como

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

notemos que para todo $x \in \mathbb{R}^+$, se tiene que $f(x) \leq g(x)$. Además, tenemos que

$$\text{ínf}(f) = 0 = \text{ínf}(g).$$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que

$$f(x) \leq g(y),$$

para todo $x, y \in A$, entonces se tiene que

$$\sup(f) \leq \text{ínf}(g).$$

**DEFINICIÓN 2**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas, entonces $f + g$ es acotada y se tiene que

- $\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$;
- $\text{ínf}(f+g) \geq \text{ínf}(f) + \text{ínf}(g)$.

**DEFINICIÓN 3**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función acotada y $a \in \mathbb{R}$, se tiene que:

- si $a \geq 0$, entonces $\sup(af) = a \sup(f)$;
- si $a < 0$, entonces $\sup(af) = a\, \text{ínf}(f)$;
- si $a \geq 0$, entonces $\text{ínf}(af) = a\, \text{ínf}(f)$;
- si $a < 0$, entonces $\text{ínf}(af) = a \sup(f)$.

$\aleph_0$

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

**LEMA 1.** Sean $a, p \in \mathbb{N}$ con $p$ un primo. Si $a^2$ es un múltiplo de $p$, entonces $a$ también es un múltiplo de $p$.

**PROPOSICIÓN 2.** Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Se tiene que no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = p$.

**PROPOSICIÓN 3.** Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$, que depende de $x$, tal que

$$x < n.$$

**TEOREMA 4: Propiedad Arquimediana de los números reales**

Para todo $y \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$, que depende de $x$ y de $y$, tal que

$$y < nx.$$

**TEOREMA 5: Densidad de los números reales**

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Se tiene que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < q < y.$$

**PROPOSICIÓN 6.** Para todo $a \geq 0$, existe un único $x \geq 0$ tal que

$$x^2 = a.$$

*Esquema de la demostración.* Para $a > 0$, se define el conjunto

$$S_a = \{x \geq 0 : x^2 \leq a\}.$$

Se demuestra que $S_a$ es no vacío (de hecho $0 \in S_a$) y es acotado superiormente ($a + 1$ es una cota superior). Por lo tanto, $S_a$ posee supremo.

Luego de esto, se demuestra que suponer que $(\sup(S_a))^2 > a$ lleva a una contradicción y de igual modo suponer que $(\sup(S_a))^2 < a$. Con esto, se concluye que

$$(\sup(S_a))^2 = a. \qquad \square$$

- Notemos que $\sup(S_a) \in S_a$ y por lo tanto existe $\text{máx}(S_a)$.
- Se define
$$\sqrt{a} = \text{máx}\{x \geq 0 : x^2 \leq a\}.$$
- Si $a$ es primo, entonces $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$, pues no verifica que exista un $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = a$.
- Se ha demostrado la existencia de números reales que no pertenecen a $\mathbb{Q}$.

**DEFINICIÓN 1: Irracionales**

Se define el conjunto de los números irracionales, notado por $\mathbb{I}$, como

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

es decir, el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que no existen $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}^*$ tales que verifiquen que

$$x = \frac{a}{b}.$$

**COROLARIO 7.** Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces existe $z \in \mathbb{I}$ tal que

$$x < z < y.$$

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

## 1. SUCESIONES NUMÉRICAS

**DEFINICIÓN 1**

Una sucesión de números reales es una función definida por

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos $a_n = a(n)$ y lo llamamos $n$-ésimo término. Además a la función $a$ se la denota por

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Otras notaciones para sucesión son:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\,, \quad (a_n)_{n>1}\,, \quad (a_n)_{n\geq 0}\,, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\,.$$

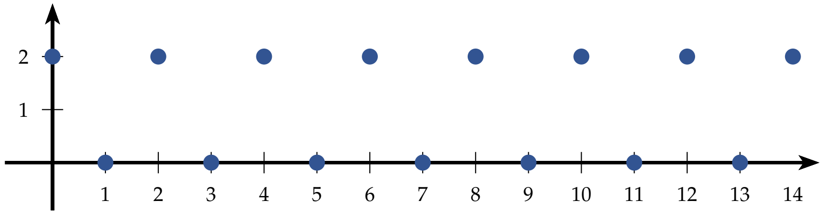
**PROPOSICIÓN 1.** La imagen de una sucesión puede ser finito o infinito.

**EJERCICIO 1.** Consideremos la siguiente sucesión

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1 + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Determine la imagen de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La gráfica de esta sucesión esta dada en la siguiente figura.



Es fácil ver que, debido a la definición de la sucesión y con ayuda del gráfico anterior,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2,0,2,0,\ldots),$$

de donde,

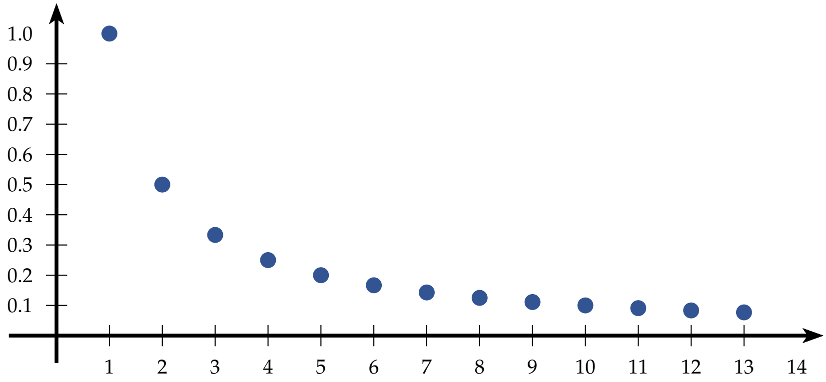
$$\operatorname{img}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \{0,2\}\,.$$

**EJERCICIO 2.** Consideremos la siguiente sucesión

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Determine la imagen de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

La gráfica de esta sucesión es la siguiente.




Notemos que los primeros términos de la sucesión son:

$$\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right),$$

así, la imágen de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es igual a

$$\operatorname{img}\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\right) = \left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

**DEFINICIÓN 2: Forma explícita**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Se dice que está en forma explícita si se conoce una función $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que

$$x_n = f(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

**OBSERVACIÓN 1.** La forma explícita de una sucesión nos permite obtener el término deseado únicamente sustituyendo el valor en la función.

**DEFINICIÓN 3: Forma recursiva**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}$ los primeros $k$ términos de la sucesión. Se dice que la sucesión está en forma implícita si se conoce una función $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$$

para todo $n \geq k$. Así, se dice que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}) & \text{si } n \geq k, \\ x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**EJEMPLO 1.** Consideremos la sucesión de Fibonacci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + x_{n-2} & \text{para } n \geq 2, \\ x_0 = x_1 = 1. \end{cases}$$

Así, tenemos que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots).$$

**DEFINICIÓN 4: Forma a trozos**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $A \subseteq \mathbb{N}$. Se dice que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está definida a trozos si se conocen dos funciones $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$x_n = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \in A, \\ g(n) & \text{si } n \notin A, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

**EJEMPLO 2.** Consideremos la siguiente sucesión definida a trozos por

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ es par}, \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar}. \end{cases}$$

Notemos que los primeros 6 términos de la sucesión son

$$(-1, 4, -1, 16, -1, 64, \ldots).$$

**DEFINICIÓN 5: Sucesión constante**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $r \in \mathbb{R}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es constante si

$$x_n = r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

**DEFINICIÓN 6: Convergencia**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $L$, denotado por

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, que puede depender de $\varepsilon$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon).$$

Otra forma de representar el hecho de que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja a $L$ es escribir:

$$x_n \to L \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty,$$

y se lee: $x_n$ *tiende a* $L$ *cuando* $n$ *tiende a más infinito.*

**DEFINICIÓN 7: Divergencia**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge* si no converge a ningún $L \in \mathbb{R}$.

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

**TEOREMA 1: Unicidad del límite**

El límite de toda sucesión convergente es único.

**DEFINICIÓN 1: Operaciones entre sucesiones**

Dadas las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $z_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $c \in \mathbb{R}$, se definen las sucesiones:

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $c \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\dfrac{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}}{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

**DEFINICIÓN 2: Cola de una sucesión**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $m \in \mathbb{N}$. La $m$-cola de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es la sucesión definida por

$$(x_{m+n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\geq m} = (x_m, x_{m+1}, \ldots).$$

**OBSERVACIÓN 1.** Si no hay ambigüedad es posible reemplazar el concepto de $m$-cola por cola.

**TEOREMA 2**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, $x \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. Se tiene que la $m$-cola de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x$ si y solo sí $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x$.

**OBSERVACIÓN 2.** Todos los resultados presentados para una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales se extienden para las $m$-colas de la sucesión.

**TEOREMA 3**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $m \in \mathbb{N}$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L$ si y solo si la $m$-cola de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a $L$.

**DEFINICIÓN 3: Sucesión acotada**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión está acotada si existe un $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|x_n| \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

**TEOREMA 4**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces es acotada.

**PROPOSICIÓN 5.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales convergentes tales que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = y,$$

entonces

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = x + y$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\lambda \cdot x_n) = \lambda x$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ y $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**OBSERVACIÓN 3.** Los recíprocos de la proposición anterior no son ciertos en general.

**PROPOSICIÓN 6.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales convergentes a $x$ y $y$, respectivamente. Si

$$x_n \leq y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ implica que $x_n \leq y_n$, entonces

$$x \leq y.$$

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales convergentes a $x$ y $y$, respectivamente. En general, no es verdad que si

$$x_n < y_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$x < y.$$

Por ejemplo, considere las sucesiones

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

**COROLARIO 7.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \geq 0.$$

**TEOREMA 8: Teorema de compresión**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que

$$x_n \leq y_n \leq z_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n,$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} z_n.$$

**PROPOSICIÓN 9.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} x_n\right| = |x|.$$

**PROPOSICIÓN 10.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos y $L \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L.$$

Si $0 < L < 1$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

**PROPOSICIÓN 11.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0,$$

y sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada. Se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \cdot y_n = 0.$$

**PROPOSICIÓN 12.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales y sea $x \in \mathbb{R}$. Si para alguna $C \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$|x_n - x| \leq C|a_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

**DEFINICIÓN 4: Monotonía**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente si $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, se dice que es monótona si es una de las anteriores.

**DEFINICIÓN 5**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $M \in \mathbb{R}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente si

$$x_n \leq M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

**DEFINICIÓN 6**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $M \in \mathbb{R}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente si

$$M \leq x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

**TEOREMA 13: Teorema de convergencia monótona**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente y es creciente o estrictamente creciente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acota inferiormente y decreciente o estrictamente decreciente entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

**EJEMPLO 1.** La sucesión de números reales

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

es estrictamente creciente y

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**EJEMPLO 2.** La sucesión de números reales

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es estrictamente creciente y

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e.$$

**EJEMPLO 3.** La sucesión de números reales

$$\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es estrictamente decreciente y

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$$

**PROPOSICIÓN 14** (Criterio de Cauchy)**.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $p\in\mathbb{R}^+$ tales que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|} = p.$$

- Si $p<1$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.
- Si $p>1$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**TEOREMA 15: Teorema de las sucesiones adyacentes**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales, tales que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Si

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n-y_n)=0,$$

entonces,

- para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0$;
- las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo límite.

## 1. Límites Infinitos

**Definición 7**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a más infinito*, denotado por

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty,$$

si para todo $R > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, que puede depender de $R$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \geq R.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall R > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow x_n \geq R).$$

**Definición 8**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge a menos infinito*, denotado por

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty,$$

si para todo $R < 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$, que pude depender de $R$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$n \geq N \Rightarrow x_n \leq R.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall R < 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \Rightarrow x_n \leq R).$$

Otra forma de representar el hecho de que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverja a $\pm\infty$ es escribir:

$$x_n \to \pm\infty \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty,$$

y se lee: $x_n$ *diverge a más o menos infinito cuando n tiende a más infinito.*

**PROPOSICIÓN 16.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales. Se tienen las siguientes propiedades:

- Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = +\infty.$$
- Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} (x_n + y_n) = -\infty.$$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ y existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \mathbb{N}$, se tiene que $y_n \geq x_n$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty.$$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ y existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq \mathbb{N}$, se tiene que $y_n \leq x_n$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = -\infty.$$
- Si $x_n$ es acotada y $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \pm\infty$, entonces
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

**Proposición 17.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, se tienen los siguientes casos:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ no existe.

**Proposición 18.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\mathbb{R}^*$. Si

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = +\infty,$$

entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión divergente.

Estos apuntes se basan en las clases de la materia “Complementos de Cálculo”, dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

# 1. SUBSUCESIONES

**DEFINICIÓN 1**

Sea $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una sucesión de números reales y $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente, es decir

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k) < \cdots$$

Se dice que la sucesión de números reales

$$a \circ \varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

es una subsucesión de $a$. Si a la sucesión $a$ se la denota por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la subsucesión $a \circ \phi$ se la denota por

$$(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$$

Con esto, se tiene que

$$(a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{\varphi(0)}, a_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(k)}, \ldots)$$

Dada una sucesión de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una función estrictamente creciente $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se suele notar por

$$n_k = \varphi(k)$$

para $k \in \mathbb{N}$, con esto, se tiene que

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

y se denota a la subsucesión $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ por

$$(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$$

con lo cual,

$$\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\right).$$

**EJEMPLO 1.** Consideremos la sucesión de números reales definida por

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

se tiene que

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

Tomemos las funciones

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ k &\longmapsto 2k \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \sigma\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ k &\longmapsto 2k+1, \end{aligned}$$

las cuales son estrictamente crecientes, con esto, tenemos que

$$\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2k+2} \ldots\right)$$

y

$$\left(x_{\sigma(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2k+1}, \ldots\right)$$

son subsucesiones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que toman los términos pares e impares, respectivamente, de la sucesión original.

**PROPOSICIÓN 1.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. A partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se pueden obtener infinitas subsucesiones.

**PROPOSICIÓN 2.** Sea $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un función estrictamente creciente, se tiene que

$$k \leq \varphi(k)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$

De la proposición anterior, se tiene que, dadas una sucesión de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y una subsucesión $\left(x_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de esta, se tiene que

$$k \leq n_k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

**TEOREMA 3**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales convergente a $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L$.

**PROPOSICIÓN 4.** Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales es una subsucesión de si misma.

**PROPOSICIÓN 5.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. La cola de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**TEOREMA 6: Criterio de la divergencia**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L, R \in \mathbb{R}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica alguna de estas condiciones:

- no es acotada;
- existen dos subsucesiones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes tales que $x_{n_k} \to L$ cuando $k \to +\infty$ y $x_{n_\ell} \to R$ cuando $\ell \to +\infty$ con $L \neq R$,

entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

**TEOREMA 7**

Toda sucesión de números reales posee subsucesiones monótonas.

# Club de Matemática EPN

## Complementos de cálculo • Semana 11

### Sucesiones de Cauchy

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

## 1. Subsucesiones

**Teorema 1: Bolzano-Weierstrass**

Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.

**Teorema 2**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L$ si y solo si toda subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L$.

**Lema 3.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $L$, entonces existen un $M > 0$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$|x_{n_k} - L| \geq M.$$

**Definición 1: Límite subsecuencial**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $L \in \mathbb{R}$. Si existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que converge a $L$, entonces se dice que $L$ es un límite subsecuencial de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Proposición 4.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se tiene que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces el conjunto de todos los límites subsecuenciales de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado.

**DEFINICIÓN 2**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales.

- Sea
$$V = \{v \in \mathbb{R} : x_n \leq v \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ salvo una cantidad finita}\}.$$
Se define el *límite superior* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por
$$\text{ínf}(V)$$
y se lo denota por
$$\text{lím sup}\, x_n.$$

- Sea
$$W = \{w \in \mathbb{R} : w \leq x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ salvo una cantidad finita}\}.$$
Se define el *límite inferior* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por
$$\sup(V)$$
y se lo denota por
$$\text{lím inf}\, x_n.$$

Otras notaciones para el límite superior e inferior de una sucesión son:
$$\overline{\text{lím}}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad \underline{\text{lím}}\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}},$$
respectivamente.

Otra forma de definir los límites superiores e inferiores de una sucesión son las siguientes. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, se definen las sucesiones
$$(\sup\{x_k : k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{y} \qquad (\text{ínf}\{x_k : k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}},$$
las cuales son decreciente y creciente, respectivamente, por lo tanto, se define
$$\text{lím sup}\, x_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k$$

y
$$\liminf x_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k.$$

**TEOREMA 5**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $s \in \mathbb{R}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $s = \limsup x_n$;
- $s = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\{x_k : k \geq n\} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} x_k$; y
- $s = \sup(S)$, donde $S$ es el conjunto de los límites subsecuenciales de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**TEOREMA 6**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $s \in \mathbb{R}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $s = \liminf x_n$;
- $s = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\{x_k : k \geq n\} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} x_k$; y
- $s = \inf(S)$, donde $S$ es el conjunto de los límites subsecuenciales de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**TEOREMA 7**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si
$$\limsup x_n = \liminf x_n.$$

**PROPOSICIÓN 8.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones acotadas. Se tiene que
$$\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup(x_n) + \limsup(y_n).$$

## 1.1 Criterio de Cauchy

**DEFINICIÓN 3: Sucesión de Cauchy**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, que depende de $\varepsilon$, tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $n, m \geq N$ se tiene que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

La idea intuitiva acerca de una sucesión de Cauchy es que la distancia entre cualquier término de la sucesión a partir de un $N \in \mathbb{N}$ es tan pequeña como queramos.

**LEMA 9.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

**LEMA 10.** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

**OBSERVACIÓN 1.** El recíproco del lema anterior no es cierto.

**TEOREMA 11: Criterio de convergencia de Cauchy**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si y solo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

**OBSERVACIÓN 2.** Por el teorema anterior, se dice que el espacio $\mathbb{R}$ es *completo*. En general, se dice que un espacio es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

**DEFINICIÓN 4: Sucesión contractiva**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $C \in \mathbb{R}$ tal que $0 < C < 1$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva si

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. El número $C$ se denomina **constante** de la sucesión contractiva.

**TEOREMA 12**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva, entonces es convergente.

**COROLARIO 13.** Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y $C, L \in \mathbb{R}$ tal que $0 < C < 1$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es contractiva con constante $C$ y $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$, entonces

- $|L - x_n| \leq \dfrac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}|$; y
- $|L - x_n| \leq \dfrac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1|$.

$\aleph_0$

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

# 1. SERIES DE NÚMEROS REALES

**DEFINICIÓN 1: Serie**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Una *serie infinita* o simplemente llamada *serie*, generada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$s_0 = x_0 \qquad \text{y} \qquad s_{k+1} = s_k + x_{k+1}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

A esta sucesión se la representa por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

Otras notaciones para las series son

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \qquad \text{o} \qquad \sum x_n.$$

**DEFINICIÓN 2**

Bajo los establecido en la definición anterior, se tienen las siguientes definiciones.

- El números $x_n$, con $n \in \mathbb{N}$, es llamado el *n-ésimo término* o el *término general* de la serie.
- El número $s_n$, con $n \in \mathbb{N}$, es llamado la *suma parcial* de la serie.
- A la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se la llama la *sucesión de sumas parciales*.

**DEFINICIÓN 3: Convergencia de una serie**

Sean $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su sucesión de sumas parciales. Si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = L,$$

entonces se dice que la serie es convergente y converge a $L$, lo cual se denota por

$$L = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n.$$

**DEFINICIÓN 4**

Sea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ no es convergente a ningún $L \in \mathbb{R}$, entonces se dice que es *divergente*.

**OBSERVACIÓN 1.** Las series pueden iniciar en otro índice diferente a 0, por ejemplo, dados $n_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión de números reales $(x_n)_{n\geq n_0}$, la serie formada por esta sucesión se la denota por

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n \qquad \text{o} \qquad \sum_{n_0\leq n} x_n.$$

Los términos **sucesión** y **serie** son distintos. Una serie es una sucesión de sumas parciales generada a partir de una sucesión de números reales.

## 2. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

**TEOREMA 1**

Sea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

El teorema anterior establece que, dada una serie de número reales $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$,

se tiene que si
$$\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0,$$
entonces podemos concluir que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ no converge.

**TEOREMA 2: Criterio de Cauchy para series**

Sea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales. Se tiene que la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $M >\in \mathbb{N}$, que depende de $\varepsilon$, tal que para todo $m > n \geq M$ se tiene que
$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon,$$
donde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representa la sucesión de sumas parciales de la serie.

**TEOREMA 3**

Sea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ una serie de números reales tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente si y solo si la sucesión de las sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. En este caso
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{k\to+\infty} s_k = \sup\{s_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

## 2.1 Criterios de comparaciones

**TEOREMA 4**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales y $N \in \mathbb{N}$. Si para todo $n \geq N$ se tiene que
$$0 \leq x_n \leq y_n,$$
entonces:

- la convergencia de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ implica la convergencia de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$;
- la divergencia de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ implica la divergencia de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$.

**TEOREMA 5**

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales positivos. Si existe un $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L,$$

entonces:

- si $L \neq 0$, se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente si y solo si $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ es convergente;
- si $L = 0$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n$ es convergente, se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente.

# Club de Matemática EPN

## Complementos de cálculo • Semana 12-2

### Límites

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

# 1. Límites

## 1.1 Límites de funciones

**Definición 1: Punto de acumulación**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que $a$ es un punto de acumulación de $A$ si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $x$, que depende de $\varepsilon$, tal que $a \neq x$ y

$$|x - a| < \varepsilon.$$

**Definición 2: Vecindad**

Sean $a \in \mathbb{R}$ un número real y $\delta \in \mathbb{R}^+$. Una *vecindad* o un **entorno** de radio $\delta$ de $a$ es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x - a| < \delta.$$

Esto lo notamos por

$$V_\delta(a).$$

Otra forma de denotar esto es $B(a, \delta)$ y se la llama, la bola de centro $a$ y radio $\delta$. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} B(a,\delta) &= V_\delta(a) \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\} \\ &= \left]a - \delta, a + \delta\right[. \end{aligned}$$

Con esto, se puede parafrasear la definición de **punto de acumulación** de la siguiente manera: Un punto $a$ es un punto de acumulación de $A \subseteq \mathbb{R}$ si toda vecindad de $a$ contiene al menos un punto de $A$ distinto de $a$.

**DEFINICIÓN 3**

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Al conjunto de todos los puntos de acumulación de $A$ se lo nota como

$$A_a \qquad \text{o} \qquad A'$$

y se lo denomina *el derivado de* $A$.

**OBSERVACIÓN 1.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Tenemos que un punto de acumulación de $A$ no necesariamente debe ser un elemento de $A$ ni todo elemento de $A$ es un punto de acumulación de este. Por ejemplo, tomemos

$$A = ]0,1[ \cup \{2\},$$

con esto, se tiene que 0 no es un elemento de $A$ pero sí es un elemento de acumulación de $A$; por otro lado, 2 es un elemento de $A$ pero no es un punto de acumulación de $A$. Es más, tenemos que

$$A' = [0,1].$$

**DEFINICIÓN 4: Punto aislado**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que *$a$ es un punto aislado de $A$* si existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$]a-\delta, a+\delta[ \cap A = \{a\}$$

**TEOREMA 1: Caracterización de un punto de acumulación**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene que $a \in A'$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \smallsetminus \{a\}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$

**DEFINICIÓN 5: Definición de límite**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que *$L$ es límite de $f$ en $a$*, denotado por

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que puede depender de $\epsilon$, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

**OBSERVACIÓN 2.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Para que

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

este definido adecuadamente, el punto $a$ debe ser un punto de acumulación de $A$.

**OBSERVACIÓN 3.** Notemos que el valor de $\delta$ usualmente depende de $\varepsilon$, de esta manera es usual escribir $\delta(\varepsilon)$ o $\delta_\varepsilon$ para enfatizar esta dependencia.

**OBSERVACIÓN 4.** La inecuación $0 < |x - a|$ es equivalente a $x \neq a$.

Para expresar el hecho de que el límite de $f$ en $a$ es $L$, es usual encontrar la siguiente notación:

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a,$$

la cual se lee: $f(x)$ *tiende a* $L$ *cuando* $x$ *tiende a* $a$.

**PROPOSICIÓN 2.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces $L$ es único.

**EJERCICIO 1.** Demostrar que $\lim_{x \to c} x = c$.

*Demostración.* En este caso consideramos

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - c| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|f(x) - c| < \varepsilon.$$

Para hallar el número $\delta$, notemos que

$$|f(x) - c| = |x - c|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. De esta manera, si tomamos $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - c| < \delta$, entonces

$$|f(x) - c| = |x - c| < \varepsilon,$$

lo que implica que

$$\lim_{x \to c} x = c. \qquad \square$$

### 1.2 Criterio de sucesiones para límites

**TEOREMA 3: Caracterización de límite a través de sucesiones**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que converge a $a$, se tiene que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $L$.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

### 1.3 Criterio de la divergencia

**TEOREMA 4**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. La función $f$ no tiende a $L$ cuando $x$ tiende a $a$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que converge a $a$, pero $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a $L$.

**TEOREMA 5**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. La función $f$ no tiene límite en $\mathbb{R}$ cuando $x$

tiende a $a$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ , que converge a $a$ pero $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

## 2. TEOREMAS DE LÍMITES

**DEFINICIÓN 6**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Se dice que $f$ *está acotada en una vecindad de $a$* si existe una vecindad $V_\delta(a)$ de $a$ y una constante $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(x)| \leq M,$$

para todo $x \in A \cap V_\delta(a)$.

**TEOREMA 6**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

entonces $f$ es acotada en alguna vecindad $V_\delta(a)$ de $a$.

**DEFINICIÓN 7: Entorno reducido**

Sean $a \in \mathbb{R}$ un número real y $\delta \in \mathbb{R}^+$. Una *vecindad reducida* o *entorno reducido* de $a$ es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \in ]a-\delta, a+\delta[ \setminus \{a\}.$$

**PROPOSICIÓN 7.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones, $a \in A'$ y $L, M \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

entonces

- $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M.$
- $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M.$
- $\lim\limits_{x\to a} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda L$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$.

*Demostración.* La demostración de estos teoremas son resultados de la caracterización de límites por sucesiones. $\square$

**PROPOSICIÓN 8.** Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap B)'$ y $L, M \in \mathbb{R}$. Si

$$f(x) \leq g(x),$$

para todo $x \in A \cap B$, con $x \neq a$, y

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

entonces

$$L \leq M.$$

**PROPOSICIÓN 9.** Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap B)'$ y $L, M \in \mathbb{R}4$ tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M.$$

Se tiene que, si

$$L < M,$$

entonces existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(x) < g(x),$$

para todo $x \in A \cap B \cap (]a - \delta, a + \delta[ \setminus \{a\})$.

**OBSERVACIÓN 5.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon A \to \mathbb{R}$ funciones y $a \in A'$. Si

$$\lim_{x\to a} f_k(x) = L_k,$$

para $k = 1, \ldots, n$, entonces, inductivamente, se tiene que

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)) = L_1 + L_2 + \cdots + L_n,$$

y

$$\lim_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n.$$

**PROPOSICIÓN 10.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

entonces,

$$\lim_{x\to a} (f(x))^n = L^n.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

**PROPOSICIÓN 11.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L, m, M \in \mathbb{R}$. Si

$$m \leq f(x) \leq M,$$

para todo $x \in A$, con $x \neq a$, y si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

entonces

$$m \leq L \leq M.$$

**TEOREMA 12: Teorema de la estricción**

Sean $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $h\colon C \to \mathbb{R}$, $a \in (A \cap B \cap C)'$ y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

para todo $x \in A \cap B \cap C$, con $x \neq a$, y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

**PROPOSICIÓN 13.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

**Proposición 14.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$, $a$ un punto de acumulación de $A$ y $L \in \mathbb{R}$. Si para todo $x \in A$, con $x \neq a$,

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = L,$$

entonces

$$L \geq 0.$$

**Proposición 15.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función de números reales positivos, $a \in A'$ y $L \in \mathbb{R}^+$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

Semestre 2019-A

Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

# 1. LÍMITES

Este resumen se dedica a las extensiones del concepto de límites tratados en la sección anterior. Para ello, durante todo el resumen se considerará $A \subseteq \mathbb{R}$.

## 1.1 Límites Laterales

En esta sección consideraremos intervalos ubicados a los lados de los puntos de acumulación, diferenciándolos de los intervalos centrados en un punto, analizados en el resumen anterior.

**DEFINICIÓN 1: Límite por la derecha**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ , $a \in (A \cap ]a, +\infty[)'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que *$L$ es el límite de $f$ en $a$ por la derecha*, denotado por

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que depende de $\varepsilon$, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

**DEFINICIÓN 2: Límite por la izquierda**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ , $a \in (A \cap ]-\infty, a[)'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que *$L$ es el límite de $f$ en* *a por la izquierda*, denotado por

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que depende de $\varepsilon$, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

**PROPOSICIÓN 1** (Caracterización de límite por la derecha a través de sucesiones). Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in (A\cap ]a, +\infty[)'$. Se tiene que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión decreciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ que converge a $a$, se tiene que $f(x_n)$ converge a $L$.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión decreciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

**PROPOSICIÓN 2** (Caracterización de límite por la izquierda a través de sucesiones). Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in (A\cap ]-\infty, a[)'$. Se tiene que

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión creciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ que converge a $a$, se tiene que $f(x_n)$ converge a $L$.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión creciente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

**TEOREMA 3**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in (A\cap ]a,+\infty[)' \cap (A\cap ]-\infty, a[)'$. Se tiene que

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe si y solo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x).$$

En este caso, se tiene que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

La notición de límite lateral es bastante intuitiva, para comprenderla de mejor manera, considere los siguientes ejemplos.

**EJEMPLO 1.** Definamos la *función signo* como:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La gráfica de la función $f$ la podemos ver en la Figura 1.

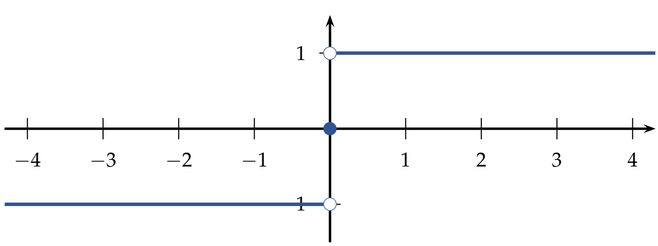



**Figura 1:** Gráfica de la función signo.

Notemos que, de la gráfica anterior, se puede apreciar que

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

Además como, $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x),$$

no existe.

**Ejemplo 2.** Considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{e^{1/x}+1} \end{aligned}$$

Así, la gráfica de la función $f$ la podemos ver en la Figura 2

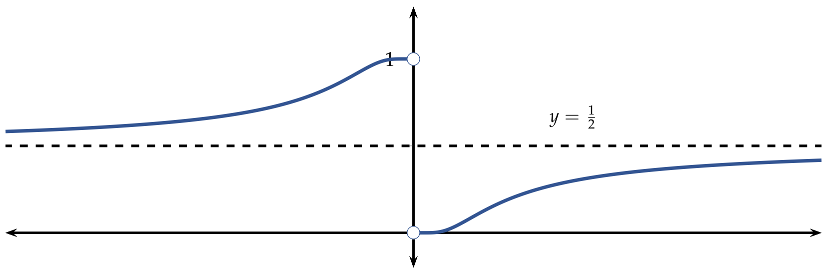



**Figura 2:** Gráfica de la función definida por $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$.

Luego, intuitivamente, se puede ver que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

De donde, los límites laterales existen pero no son iguales, así

$$\lim_{x\to 0} f(x),$$

no existe.

### 1.2 Límites Infinitos

Para esta sección, es importante recalcar el hecho de que, los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ *no* representan un número real.

**Definición 3**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Se dice que *el límite de $f$ en $a$ es más infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de $\alpha$, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha).$$

**Definición 4**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Se dice que *el límite de $f$ en $a$ es menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

si para todo $\beta \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de $\beta$, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < \beta).$$

**Ejemplo 3.** Considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Así, la gráfica de la función $f$ la podemos ver en la Figura 3.

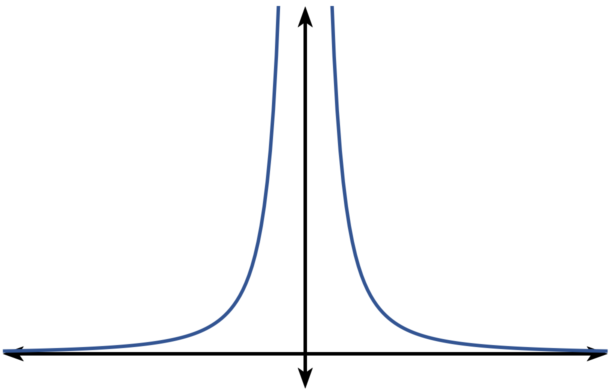


**Figura 3:** Gráfica de la función definida por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Luego, intuitivamente, se concluye que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$

**Teorema 4**

Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$. Si

$$f(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in A$ con $x \neq a$, entonces:

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$;
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

**Definición 5**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ , $a \in (A \cap ]a, +\infty[)'$. Se dice que *el límite de $f$ en $a$, por la* *derecha, es más infinito*, denotado por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty,$$

si y solo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de $\alpha$, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < \alpha).$$

**Definición 6**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ , $a \in (A \cap ]a, +\infty[)'$. Se dice que *el límite de $f$ en $a$, por la derecha, es menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,$$

si y solo si para todo $\beta \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de $\beta$, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < \beta).$$

**Definición 7**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ , $a \in (A \cap ]-\infty, a[)'$. Se dice que *el límite de $f$ en $a$, por la* *izquierda, es más infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty,$$

si y solo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de $\alpha$, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha).$$

**DEFINICIÓN 8**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ , $a \in (A \cap ]a, +\infty[)'$. Se dice que *el límite de $f$ en $a$, por la izquierda, es menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty,$$

si y solo si para todo $\beta \in \mathbb{R}$, existe un $\delta > 0$, que depende de $\beta$, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) < \beta).$$

**EJEMPLO 4.** Considere la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

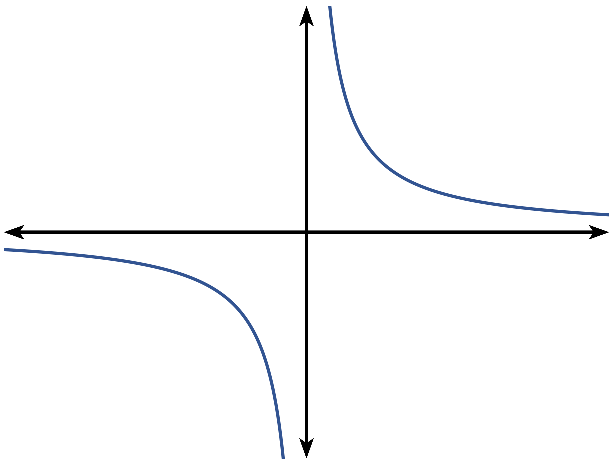


**Figura 4:** Gráfica de la función definida por: $f(x) = \frac{1}{x}$

De la Figura 4, es fácil concluir que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe. Pues, de manera intuitiva, se tiene que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

## 1.3 Límites al infinito

Finalmente, en esta sección definiremos el concepto de límite cuando $x \to +\infty$ y de manera análoga, cuando $x \to -\infty$.

**DEFINICIÓN 9**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que *$L$ es el límite de $f$ cuando $x$ tiende a más infinito*, denotado por

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$, que depende de $\varepsilon$, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

**DEFINICIÓN 10**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado inferiormente, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que $L$ *es el límite de* $f$ *cuando* $x$ *tiende a menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $M > 0$, que depende de $\varepsilon$, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

**TEOREMA 5: Caracterización a través de sucesiones**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que diverge a más infinito, se tiene que $f(x_n)$ converge a $L$.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to +\infty \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

**Teorema 6: Caracterización a través de sucesiones**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado inferiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que diverge a menos infinito, se tiene que $f(x_n)$ converge a $L$.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to -\infty \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to L.$$

**Definición 11**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se dice que *el límite de $f$ cuando $x$ tiende a más infinito es más infinito*, denotado por

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,$$

si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $M > 0$, que depende de $\alpha$, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$x > M \Rightarrow f(x) > \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists M > 0)(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow f(x) > \alpha).$$

**Definición 12**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado inferiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se dice que *el límite de $f$ cuando $x$ tiende a más infinito es menos infinito*, denotado por

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty,$$

si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un $M > 0$, que depende de $\alpha$, tal que para todo $x \in A$, se tiene que

$$x > M \Rightarrow f(x) < \alpha.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

es lógicamente equivalente a

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists M > 0)(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow f(x) < \alpha).$$

**OBSERVACIÓN 1.** Análogamente, se tienen las definición anteriores para el caso en el que $x \to -\infty$.

**TEOREMA 7: Caracterización a través de sucesiones**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que diverge a más infinito, se tiene que $f(x_n)$ diverge a más infinito.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to +\infty \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to +\infty.$$

**TEOREMA 8: Caracterización a través de sucesiones**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado inferiormente y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que diverge a más infinito, se tiene que $f(x_n)$ diverge a menos infinito.

Es decir, se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$ se cumple que

$$x_n \to +\infty \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to -\infty.$$

**OBSERVACIÓN 2.** Análogamente, se tienen las caracterizaciones correspondientes para el caso en el que $x \to -\infty$.

**TEOREMA 9**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no acotado superiormente y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Si $g(x) > 0$ para todo $x \in A$ y para algún $L \in \mathbb{R}$, con $L \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

entonces:

- si $L > 0$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si y solo si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$;
- si $L < 0$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si y solo si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

**CLUB DE MATEMÁTICA EPN**

**COMPLEMENTOS DE CÁLCULO • SEMANA 13-2**

CONTINUIDAD

Semestre 2019-A

Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

## 1. FUNCIONES CONTINUAS

En esta sección se considerará $A \subseteq \mathbb{R}$.

**DEFINICIÓN 1**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se dice que $f$ *es continua en* $a$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que puede depender de $\varepsilon$, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Es importante recalcar que la definición anterior trata exclusivamente la continuidad de una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in A$, es decir un punto de su dominio.

**DEFINICIÓN 2**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. Si $f$ no es continua en $a$ se dice que $f$ *es discontinua en* $a$.

Si un punto no pertenece al dominio de una función entonces la función no es ni continua ni discontinua en este punto.

**EJEMPLO 1.** Para ilustrar la idea de continuidad en un punto, consideremos la siguiente función $f\colon [0, b] \to \mathbb{R}$ ilustrada en la Figura 1.

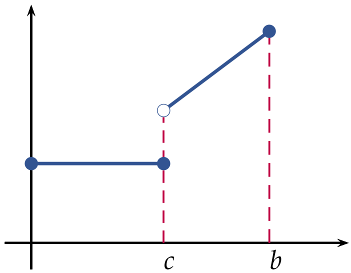



**Figura 1:** Gráfico de una función discontinua en $c$.

Notemos que $c \in \operatorname{dom}(f)$ sin embargo, por la definición de continuidad en un punto, $f$ es discontinua en $c$.

**EJEMPLO 2.** Ahora, consideremos la siguiente función $f\colon [0,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ ilustrada en la Figura 2.

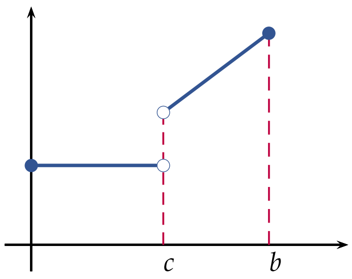



**Figura 2:** Gráfico de una función no definida en $c$.

Notemos que $c \notin \operatorname{dom}(f)$, por lo tanto, la función no es ni continua ni discontinua en $c$.

**DEFINICIÓN 3**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Se dice que $f$ *es continua en* $B$ si para todo $x \in A$, $f$ es continua en $x$. Además, se dice que $f$ *es continua* si es continua en su dominio.

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si $A$ es un **intervalo**, la idea intuitiva de que $f$ es continua es que su gráfica no presenta “rupturas”, es decir, no presenta saltos. Esta idea no se preserva si $A$ no es un intervalo, por ejemplo, se tiene que la función representada en la Figura 2 es una función continua.

**TEOREMA 1: Caracterización de continuidad por sucesiones**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se tiene que $f$ es continua en $a$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A$, que converge a $a$, se cumple que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.

Es decir, se tiene que $f$ es continua en $a \in A$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A$ se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to f(a).$$

**TEOREMA 2**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. La función $f$ es continua en $a$ si y solo si dada una vecindad $V_\varepsilon(f(a))$ de $f(a)$, existe una vecindad $V_\delta(a)$ de $a$ tal que si $x \in A \cap V_\delta(a)$, entonces $f(x)$ pertenece a la vecindad $V_\varepsilon(f(a))$, es decir

$$f(A \cap V_\delta(a)) \subseteq V_\varepsilon(f(a)).$$

**TEOREMA 3: Caracterización de discontinuidad**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se tiene que $f$ es discontinua en $a$ si y solo existe un sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A$, que converge a $a$, tal que la $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(a)$.

Es decir, se tiene que $f$ es discontinua en $a \in A$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A$ tal que cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{y} \qquad f(x_n) \nrightarrow f(a).$$

**OBSERVACIÓN 1.** Existen funciones que no son continuas en ningún punto de su dominio.

**EJEMPLO 3.** Consideremos la siguiente función, llamada la función de Dirichlet;

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene que $f$ no es continua en ningún punto de su dominio.

**OBSERVACIÓN 2.** Existen funciones que son continuas en un punto y discontinuas en los puntos restantes de su domino.

**EJEMPLO 4.** Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene que esta función es continua únicamente en 0 y discontinua en el resto de su dominio.

Ahora, consideremos el siguiente ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es discontinua en todo su domino y sin embargo, $|f|$ si es continua.

**EJEMPLO 5.** Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que $f$, al igual que la función de Dirichlet, es discontinua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, si tomamos $g = |f|$, se tiene que

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

Así, $f$ es discontinua en todo su dominio, mientras que $g$ es continua en todo su dominio.

### 1.1 Extensión continua de una función

Consideremos una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$ pero $a \notin A$. Por la definición, no se puede hablar de la continuidad de $f$ en $a$. Sin embargo, si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, es decir, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

Podemos definir una nueva función que sea una extensión de $f$. Esta función es

$$\begin{aligned} F\colon A \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in A$ y, además, $F$ es continua en $a$.

**EJEMPLO 6.** Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La gráfica de esta la podemos ver en la Figura 3.

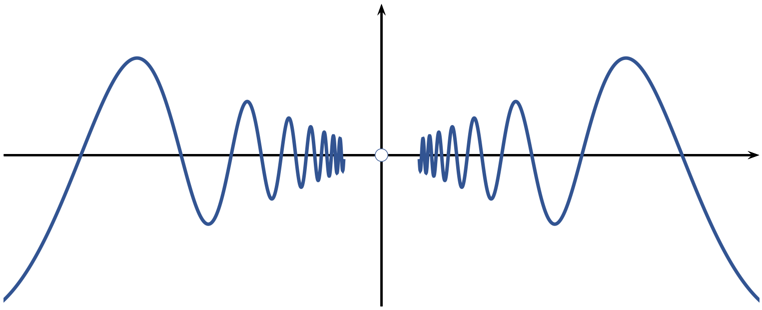


**Figura 3:** Gráfica de la función $x \mapsto x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$.

Notemos que $f$ es continua pero su dominio no es $\mathbb{R}$ al no estar definida en 0. Por otro lado,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

por lo tanto, podemos definir una extensión de $f$ que sea continua en $\mathbb{R}$, así, tomemos la función

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

la cual es continua en su dominio, es decir, es continua en $\mathbb{R}$.

## 1.2 Continuidad en Intervalos

De las definiciones dadas anteriormente, sabemos que si $f$ es continua en $a$, entonces $f$ es acotada localmente. Sin embargo, el teorema del acotamiento nos da condiciones suficientes para que una función continua en su dominio, sea acotada globalmente.

**DEFINICIÓN 4**

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se dice que $f$ *es acotada*, si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M,$$

para todo $x \in A$.

En lo subsiguiente, tomaremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

**TEOREMA 4: Teorema del acotamiento**

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si $f$ es continua, entonces $f$ es acotada.

**DEFINICIÓN 5: Máximo y mínimo de una función**

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función.

- Se dice que $f$ tiene *máximo absoluto* si existe $x_M \in A$ tal que
$$f(x_M) \geq f(x),$$
para todo $x \in A$. A $f(x_M)$ se lo conoce como el *máximo absoluto* de $f$.
- Se dice que $f$ tiene *mínimo absoluto* si existe $x_m \in A$ tal que
$$f(x_n) \leq f(x),$$
para todo $x \in A$.A $f(x_m)$ se lo conoce como el *mínimo absoluto* de $f$.

Con esta definición tenemos que

$$f(x_m) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{y} \qquad f(x_n) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

**TEOREMA 5**

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si $f$ es continua, entonces $f$ tiene un máximo y un mínimo absoluto .

**TEOREMA 6: Teorema de Bolzano**

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un $c \in \left]a,b\right[$ tal que
$$f(c) = 0.$$

Este teorema da condiciones suficientes para que una función continua se anule en un punto (esto último también se expresa diciendo que la función tiene una raíz).

**OBSERVACIÓN 3.** En teorema anterior, la hipótesis de continuidad es esencial. En efecto, consideremos la función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se encuentra en la Figura 4.

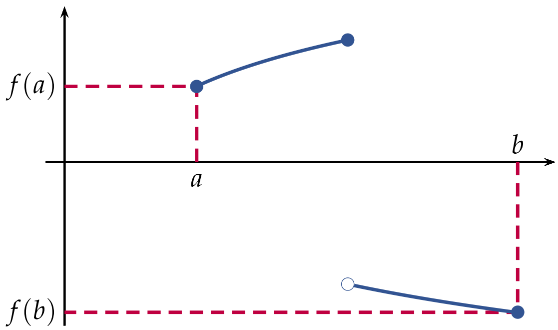



**Figura 4:** Ejemplo de función que no cumple la hipótesis del Teorema de Bolzano.

Así, es fácil ver que la función $f$ no tienen ninguna raíz en $[a, b]$.

**TEOREMA 7: Teorema del valor intermedio**

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\min\{f(a), f(b)\} \leq r \leq \max\{f(a), f(b)\},$$

existe un $x_r \in ]a, b[$ tal que

$$f(x_r) = r.$$

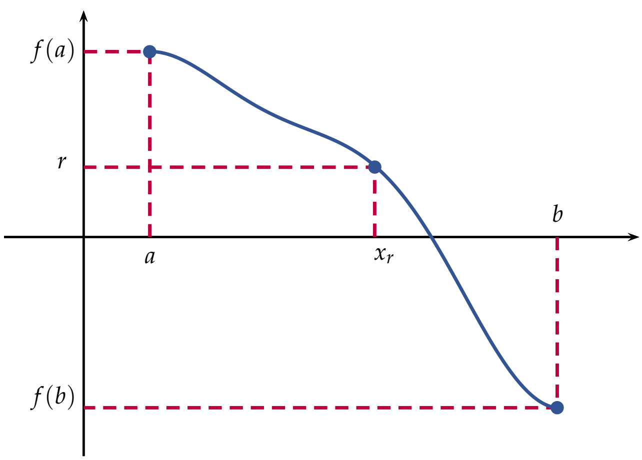



**Figura 5:** Ilustración del Teorema del valor intermedio.

**PROPOSICIÓN 8.** Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Se tiene que si $f$ es estrictamente monótona en $[a, b]$, entonces $f$ posee una única raíz en $[a, b]$.

**PROPOSICIÓN 9.** Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si $f$ es estrictamente monótona en $[a, b]$, entonces $f$ es inyectiva.

**TEOREMA 10: Teorema de la inversa continua**

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si $f$ es estrictamente monótona en $A$, entonces $f$ posee una inversa de $f(A)$ en $A$, además, la función

$$f^{-1}\colon f(A) \to A$$

es continua y estrictamente monótona en $A$.

**PROPOSICIÓN 11.** Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona en $A$. Tomando la función $f^{-1}\colon f(A) \to A$ se tiene que:

- si $f$ es estrictamente creciente, entonces $f^{-1}$ es estrictamente creciente;
- si $f$ es estrictamente decreciente, entonces $f^{-1}$ es estrictamente decreciente.

# CLUB DE MATEMÁTICA EPN

## COMPLEMENTOS DE CÁLCULO • SEMANA 14

## DIFERENCIABILIDAD - CARACTERIZACIÓN, REGLA DE LA CADENA Y FUNCIÓN INVERSA

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

## 1. DERIVADA

En esta sección consideraremos $A \subseteq \mathbb{R}$.

**DEFINICIÓN 1**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A \cap A'$. Se dice que $f$ *es derivable o diferenciable en* $c$ si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$

En este caso, a este límite se lo llama *la derivada de* $f$ *en* $c$ y se lo denota por $f'(c)$.

En $\mathbb{R}$, los conceptos de derivable y diferenciable son equivalentes. Esto no se conserva en otro tipo de espacios.

**OBSERVACIÓN 1.** Consideremos el conjunto

$$B = \{h \in \mathbb{R} : c+h \in A\} \setminus \{0\}$$

y definamos la función

$$\begin{aligned} g\colon B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \frac{f(c+h)-f(c)}{h}. \end{aligned}$$

Si $c \in A$, esta función está bien definida, además, si $c \in A'$ se tiene que $0 \in B'$, por lo tanto, está bien definido el límite de $g$ es 0.

**OBSERVACIÓN 2.** Una forma alternativa para la definición de derivada es considerar el límite

$$\lim_{x\to c} \frac{f(c)-f(x)}{c-x}.$$

Otras notaciones para la derivada de una función $f$ en un punto $c$ son:

$$\frac{df}{dx}(c); \qquad \text{y} \qquad Df(c).$$

La idea gráfica de la definición de derivada es encontrar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado. Para esto, primero determinamos la pendiente de una recta secante. Esto lo podemos ver ilustrado en la Figura 1.

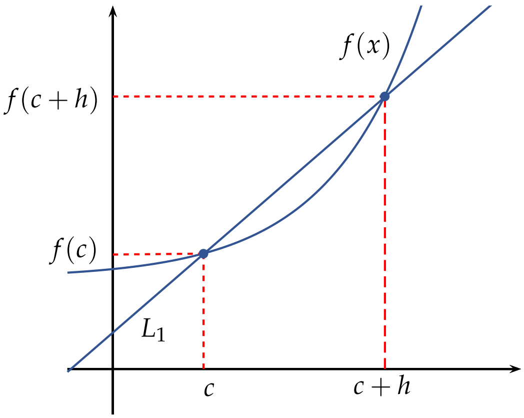



**Figura 1:** Recta secante entre dos puntos de la curva $f$

Notemos que, cuando $h \to 0$, la recta secante $L_1$ se convierte en una recta tangente a la curva de la función $f$ en el punto $(f, f(c))$.

**TEOREMA 1**

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A \cap A'$. Si $f$ es diferenciable en $c$, entonces $f$ es continua en $c$.

**OBSERVACIÓN 3.** Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in A \cap A'$, entonces la continuidad de $f$ en $c$ es una condición necesaria para que $f$ sea diferenciable en $c$.

**DEFINICIÓN 2**

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que $f$ *es diferenciable o derivable* si $f$ es diferenciable o derivable en todo punto de $A$.

**PROPOSICIÓN 2.** Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $c \in A \cap A'$. Se tiene que:

- $(\alpha f)(c) = \alpha f(c)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$;
- $(f \cdot g)'(c) = f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c)$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \dfrac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{(g(c))^2}$, para $g(c) \neq 0$.

**COROLARIO 3.** Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $c \in A \cap A'$. Se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)'(c) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(c).$$

**COROLARIO 4.** Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $c \in A \cap A'$. Se tiene que

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(c) = \sum_{i=1}^{n} \left( f_i'(c) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} f_j(x_0) \right).$$

**EJEMPLO 1.** Consideremos $f_1, f_2, f_3\colon A \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $c \in A \cap A'$. Así,

- para $n = 2$, se tiene que
$$(f_1\, f_2)'(x) = f_1'(x)\, f_2(x) + f_1(x)\, f_2'(x);$$
- para $n = 3$, se tiene que
$$(f_1\, f_2\, f_3)'(x) = f_1'(x)\, f_2(x)\, f_3(x) + f_1(x)\, f_2'(x)\, f_3(x) + f_1(x)\, f_2(x) + f_3'(x).$$

**PROPOSICIÓN 5.** (Caracterización de diferenciabilidad por sucesiones). Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in A \cap A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$f'(c) = L$$

si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \setminus \{a\}$, que converge a $c$, se tiene que

$$\left(\frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge a $f'(c) = L$.

**DEFINICIÓN 3**

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función derivable en $A$. Se define la función derivada como

$$\begin{aligned} f'\colon A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

## 2. REGLA DE LA CADENA

En esta sección se considerarán $I, J \subseteq \mathbb{R}$ con $I$ y $J$ intervalos abiertos.

**TEOREMA 6: Teorema de Carathédory**

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $c \in I$. Se tiene que $f$ es diferenciable en $c$ si y solo si existe una función $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ continua en $c$ tal que

$$f(x) - f(c) = \phi(x)(x - c)$$

para todo $x \in I$. Además, en este caso, se tiene que

$$f'(c) = \phi(c).$$

**OBSERVACIÓN 4.** El valor $\phi(x)$ representa la pendiente de las rectas secantes que unen los puntos $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$.

**TEOREMA 7: Regla de la Cadena**

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(I) \subseteq J$ con $c \in I$. Si $f$ es diferenciable en $c$ y $g$ es diferenciable en $f(c)$, entonces la composición $g \circ f$ es diferenciable en $c$ y

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

# DIFERENCIABILIDAD - TEOREMAS DE FUNCIÓN INVERSA, ROLLE Y VALOR INTERMEDIO


Semestre 2019-A Daniel Lara


Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

## 1. FUNCIÓN INVERSA

Un hecho interesante, sobre el cual se fundamenta la importancia de esta sección, es el establecer un método alternativo para determinar la derivada de la inversa de una función.

De secciones anteriores, sabemos que el Teorema de la inversa continua garantiza la existencia de la inversa de una función sobre un intervalo. Así, nuestro interés se centra en el determinar condiciones suficientes para la existencia de la derivada.

A lo largo de este resumen se considerará $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto.

**TEOREMA 1**

Sean $f: I \to J$ una función estrictamente monótona, continua y sobreyectiva, $f^{-1}: J \to I$ la función inversa de $f$ y $c \in J$. Se tiene que si $f$ es diferenciable en $f^{-1}(c)$ y $f'(f^{-1}(c)) \neq 0$, entonces $f^{-1}$ es diferenciable en $c$ y

$$(f^{-1})'(c) = \frac{1}{f'(f^{-1}(c))}.$$

Si $f'(c) = 0$, entonces $f^{-1}$ no es diferenciable en $f(c)$.

**EJEMPLO 1.** Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$

de donde, la inversa de $f$ es

$$\begin{aligned} f^{-1} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Dado que $f$ es diferenciable y para todo $x \in \mathbb{R}^*$ se tiene que

$$f'(f^{-1}(x)) = f'(\sqrt[3]{x}) = 3(\sqrt[3]{x})^2 \neq 0,$$

entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^*$ tenemos que

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

## 2. Teorema del Valor Intermedio

En esta sección consideraremos $A \subseteq \mathbb{R}$.

**Definición 1: Máximo Relativo**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que $f$ *tiene un máximo relativo en* $c$ si existe una vecindad $V_\delta(c)$ tal que

$$f(c) \geq f(x)$$

para todo $x \in V_\delta(c) \cap A$.

**Definición 2: Mínimo Relativo**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que $f$ *tiene un mínimo relativo en* $c$ si existe una vecindad $V_\delta(c)$ tal que

$$f(c) \leq f(x)$$

para todo $x \in V_\delta(c) \cap A$.

**Definición 3**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$. Se dice que $f$ *tiene un extremo relativo* en $c$ si $f$ tiene un máximo o un mínimo relativo en $c$.

**Teorema 2**

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$ un punto interior de $A$. Se tiene que si $f$ tiene un extremo relativo en $c$ y la derivada de $f$ en $c$ existe, entonces

$$f'(c) = 0.$$

**Corolario 3.** Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua y $c \in A$. Se tiene que si $f$ tiene un extremo relativo en $c$, entonces la derivada de $f$ en $c$ no existe o es igual a 0.

De aquí, tomaremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

**TEOREMA 4: Teorema de Rolle**

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$. Se tiene que si $f(a) = f(b) = 0$, entonces existe al menos un $c \in\, ]a,b[$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

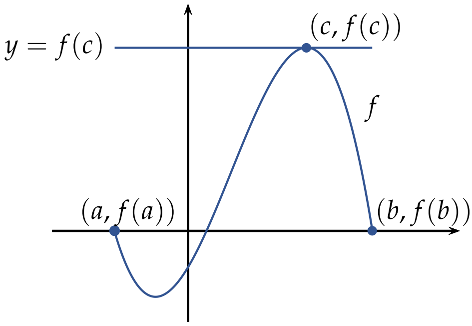



**Figura 1:** Ilustración del Teorema de Rolle.

**TEOREMA 5: Teorema del Valor Medio**

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si $f$ es diferenciable en $]a,b[$, entonces existe al menos un $c \in\, ]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

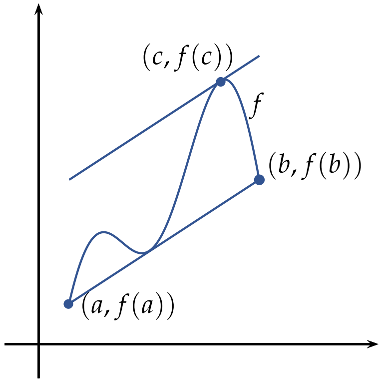



**Figura 2:** Ilustración del Teorema del Valor Medio.

**PROPOSICIÓN 6.** Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $]a,b[$. Se tiene que si $f'(x) = 0$ para todo $x \in\, ]a,b[$, entonces $f$ es la función constante.

**TEOREMA 7: Criterio de la primera derivada**

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $I$. Se tiene que

- $f$ es creciente en $I$ si y solo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$;
- $f$ es decreciente en $I$ si y solo si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

**TEOREMA 8: Teorema del Valor Intermedio de Cauchy**

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Se tiene que si $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in\, ]a,b[$ , entonces existe un $c \in\, ]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$