Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Hoja de ejercicios N° 1

Números Reales

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar que:

   a) $-(-a) = a$.

   Demostración.

   $$\begin{aligned} a + (-a) &= 0 && \text{Inverso aditivo} && (1)\\ (-a) + a &= a + (-a) && \text{Conmutatividad de la suma} && (2)\\ (-a) + a &= 0 && \text{Transitividad entre (1) y (2)} && (3)\\ (-a) + (-(-a)) &= 0 && \text{Elemento neutro de } -a && (4)\\ -(-a) &= a && \text{Unicidad del inverso aditivo} && \square \end{aligned}$$

   b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

   Demostración.

   $$\begin{aligned} (-a)\cdot(-b) &= (-a)\cdot((-1)\cdot b) && \text{Propiedad de } -1\\ &= ((-a)\cdot(-1))\cdot b && \text{Asociativa de la multiplicación}\\ &= ((-1)\cdot(-a))\cdot b && \text{Conmutativa de la multiplicación}\\ &= ((-(-a))\cdot b && \text{Propiedad de } -1\\ &= a\cdot b && \text{Ejercicio anterior} && \square \end{aligned}$$

   c) Si $b \neq 0$, $-(a/b) = (-a)/b$.

   Demostración.

   $$\begin{aligned} -(a/b) &= -(a\cdot 1/b) && \text{Definición de división}\\ &= (-1)\cdot(a\cdot 1/b) && \text{Propiedad de } -1\\ &= ((-1)\cdot a)\cdot 1/b && \text{Asociativa de la multiplicación}\\ &= (-a)\cdot 1/b && \text{Propiedad de } -1\\ &= (-a)/b && \text{Definición de división} && \square \end{aligned}$$

   d) Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces $a = 0$ y $b = 0$.

   Demostración. Supongamos que $a^2 + b^2 = 0$, demostraremos que $a = 0$ y $b = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $a \neq 0$ o $b \neq 0$, tenemos los siguientes casos:

   - $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ y $b^2 \geq 0$, por lo tanto, $a^2 + b^2 > 0$.
   - $b \neq 0$, entonces $b^2 > 0$ y $a^2 \geq 0$, por lo tanto, $a^2 + b^2 > 0$.

   En ambos casos se concluye $a^2 + b^2 > 0$, lo que contradice a $a^2 + b^2 = 0$. Por lo tanto, se tiene que $a = 0$ y $b = 0$. □

   e) $|a| - |b| \leq |a - b|$

   Demostración.

   $$\begin{aligned} |a| &= |a + 0| && \text{Elemento neutro de la suma}\\ &= |a + ((-b) + b)| && \text{Inverso aditivo} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |(a + (-b)) + b| && \text{Asociativa de la suma}\\
&= |(a - b) + b| && \text{Definición de resta}\\
&\leq |a - b| + |b| && \text{Desigualdad triangular}
\end{aligned}
$$

De aquí, utilizando inverso aditivo y definición de resta, se obtiene

$$|a| - |b| \leq |a - b| \qquad \square$$

2. Demostrar que no existe un número racional q tal que $q^2 = 3$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un número racional q tal que

$$q^2 = 3,$$

como q es racional, existen $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$ tal que

$$q = a/b,$$

donde a y b no tiene divisores en común. Se tiene que

$$(a/b)^2 = 3,$$

es decir,

$$a^2 = 3b^2.$$

Así, se tiene que a^2 es múltiplo de 3, por lo tanto a también lo es; entonces, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $3c = a$, por lo tanto

$$(3c)^2 = 3b^2,$$

de donde

$$3c^2 = b^2,$$

es decir, b es múltiplo de 3, lo cual contradice el hecho que a y b no tienen divisores comunes. Por lo tanto, no existe un número racional q tal que $q^2 = 3$ $\square$

3. Sean $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, con $\varepsilon > 0$, graficar en recta el conjunto

$$B(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

A este conjunto se lo conoce como la *bola de centro a y radio ε*.

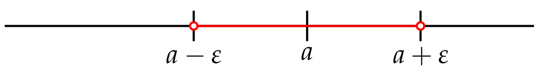
Solución. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
|x - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon\\
a - \varepsilon < x < a + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

por lo tanto, el conjunto ha sido igual al intervalo

$$B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

cuya representación gráfica es



$\square$

ℵ

Escuela Politécnica Nacional

Complementos del Cálculo • Hoja de ejercicios N° 2

Supremos e ínfimos

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Hallar el supremo y el ínfimo de los siguientes conjuntos:
   a) $[0,1]$.
   b) $(2,5]$.
   c) $[-2,0)$.
   d) $\{2/(3n) : n \in \mathbb{N}\}$.
   e) $\{1-1/(2n+1) : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración a). $A = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

- $\sup(A) = 1$. Sea $x \in A$, por definición de A, se tiene que
  $$x \leq 1.$$
  Además, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que
  $$(\forall x \in A)(x \leq c),$$
  como $1 \in A$, aplicando la linea anterior, se tiene que $1 \leq c$. Es decir, en efecto $\sup(A) = 1$.
- $\text{ínf}(A) = 0$. Sea $x \in A$, por definición de A, se tiene que
  $$0 \leq x.$$
  Además, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que
  $$(\forall x \in A)(c \leq x),$$
  como $0 \in A$, aplicando la linea anterior, se tiene que $c \leq 0$. Es decir, en efecto $\text{ínf}(A) = 0$. □

Demostración c). $A = [-2,0) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 1\}$.

- $\sup(A) = 0$. Sea $x \in A$, por definición de A, se tiene que
  $$x < 1,$$
  por lo tanto,
  $$x \leq 1,$$
  Además, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que
  $$(\forall x \in A)(x \leq c),$$
  Por demostrar que $0 \leq c$. Por absurdo, supongamos que $c < 0$, tomando $x = \text{máx}\{-1, c/2\} \in A$, se tiene que
  $$c/2 \leq c,$$
  es decir
  $$1 \leq 1/2,$$
  lo cual es contradictorio, por lo tanto, $c \leq 0$. Es decir, en efecto $\text{ínf}(A) = 0$.
- $\text{ínf}(A) = -2$. Sea $x \in A$, por definición de A, se tiene que
  $$-2 \leq x.$$

Además, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall x \in A)(c \leq x),$$

como $-2 \in A$, aplicando la linea anterior, se tiene que $c \leq -2$. Es decir, en efecto $\inf(A) = -2$. ☐

Demostración e). $A = \{1 - 1/(2n+1) : n \in \mathbb{N}\}$.

- $\sup(A) = 1$. Es decir, por demostrar que
  - $(\forall x \in A)(x \leq 1)$, y
  - Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $(\forall x \in A)(x \leq c)$, entonces $1 \leq c$.

  O, de manera equivalente, por demostrar que
  - $(\forall n \in \mathbb{N})(1 - 1/(2n+1) \leq 1)$, y
  - Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(1 - 1/(2n+1) \leq c)$, entonces $1 \leq c$.

  Sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 2n+1 > 0 &\Longrightarrow \frac{1}{2n+1} > 0 \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{2n+1} < 0 \\ &\Longrightarrow 1 - \frac{1}{2n+1} < 1 \end{aligned}$$

  Además, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(1 - 1/(2n+1) \leq c),$$

  Por demostrar que $1 \leq c$. Por absurdo, supongamos que $c < 1$, aplicando propiedad arquimediana a $1/(1-c)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{1-c} < n,$$

  Para este n, se tiene que

$$1 - 1/(2n+1) \leq c$$

  Por otro lado, como $n < 2n+1$, se tiene que

$$\frac{1}{1-c} < 2n+1,$$

  por lo tanto,

$$c < 1 - \frac{1}{2n+1},$$

  lo cual es contradictorio, por lo tanto, $1 \leq c$. Es decir, en efecto, $\sup(A) = 1$. ☐

2. Demostrar que los siguientes conjuntos no son acotados superiormente.

   a) $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$.

   b) $(2, +\infty)$.

   c) $\mathbb{Q}$.

Demostración a). Supongamos que $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall x \in A)(x \leq M),$$

o, de manera equivalente,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(2n \leq M).$$

Aplicando la propiedad arquimediana a M, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$M < n,$$

además, sabemos que $n \leq 2n$, por lo tanto,

$$M < 2n,$$

pero, para este n se tiene que

$$2n \leq M,$$

lo cual es contradictorio, así, se tiene que A no es acotado. $\square$

Demostración c). Supongamos que $\mathbb{Q}$ es acotado superiormente, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall x \in \mathbb{Q})(x \leq M),$$

Aplicando la propiedad de la densidad, a M y $M+1$, existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$M < q < M+1,$$

pero, para este q se tiene que

$$q \leq M,$$

lo cual es contradictorio, así, se tiene que $\mathbb{Q}$ no es acotado. $\square$

ℵ

1. Sean $a, c \in \mathbb{R}$, si $|a| < c$ entonces $-c < a$ y $a < c$.

Demostración. Supongamos que $|a| < c$. Se tiene los siguientes casos

- Si $0 < a$,

$\lvert a\rvert < c$	Hipótesis	(1)
$0 < a$	Hipótesis	(2)
$\lvert a\rvert = a$	Definición valor absoluto	(3)
$a < c$	Axioma I4 entre (1) y (3)	(4)
$0 < c$	Transitiva entre (2) y (4)	(5)
$-c < 0$	Multiplicación de desigualdad por -1	(6)
$-c < a$	Transitiva entre (2) y (6)	(7)

  Por lo tanto, $-c < a$ y $a < c$.

- Si $a = 0$,

$\lvert a\rvert < c$	Hipótesis	(1)
$0 = a$	Hipótesis	(2)
$\lvert a\rvert = 0$	Definición valor absoluto	(3)
$0 < c$	Axioma I4 entre (1) y (3)	(4)
$-c < 0$	Multiplicación de desigualdad por -1	(5)
$a < c$	Axioma I4 entre (2) y (3)	(6)
$-c < a$	Axioma I4 entre (2) y (5)	(7)

  Por lo tanto, $-c < a$ y $a < c$.

- Si $a < 0$,

$\lvert a\rvert < c$	Hipótesis	(1)
$a < 0$	Hipótesis	(2)
$0 < -a$	Multiplicación de desigualdad por -1	(3)
$\lvert a\rvert = -a$	Definición valor absoluto	(4)
$-a < c$	Axioma I4 entre (1) y (4)	(5)
$-c < a$	Multiplicación de desigualdad por -1	(6)
$0 < c$	Transitiva entre (3) y (5)	(7)
$-c < 0$	Multiplicación de desigualdad por -1	(8)
$-c < -a$	Transitiva entre (3) y (8)	(9)
$a < c$	Multiplicación de desigualdad por -1	(10)

Por lo tanto, $-c < a$ y $a < c$.

En cada caso, se concluye que $-c < a$ y $a < c$, por lo tanto, se concluye la demostración- $\square$

ℵ

1. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales y $L, M \in \mathbb{R}$ tales que $x_n \to L$ y $y_n \to M$, cuando $n \to +\infty$. Demostrar que $x_n y_n \to LM$, cuando $n \to +\infty$.

Demostración. Se tiene que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |x_n - L| < \epsilon), \tag{1}$$

y

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |y_n - M| < \epsilon). \tag{2}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - LM| &= |x_n y_n - Ly_n + Ly_n - LM| \\ &\leq |x_n y_n - Ly_n| + |Ly_n - LM| \\ &= |x_n - L||y_n| + |L||y_n - M|. \end{aligned}$$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces está acotada, por lo tanto, existe $R > 0$ tal que $|y_m| \leq R$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$|x_n y_n - LM| \leq |x_n - L||y_n| + |L||y_n - M| \leq |x_n - L|R + |L||y_n - M|.$$

- Si $L \neq 0$, para $\epsilon/2R > 0$, en (1), existe $N_1 \in N$ tal que

  $$n > N_1 \Longrightarrow |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2R}.$$

  Y para $\epsilon/2|M| > 0$, en (2), existe $N_2 \in N$ tal que

  $$n > N_2 \Longrightarrow |y_n - M| < \frac{\epsilon}{2|M|}.$$

  Con esto, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que, si $n > N$, entonces

  $$|x_n y_n - LM| \leq |x_n - L|R + |L||y_n - M| < \frac{\epsilon}{2R}R + |L|\frac{\epsilon}{2|L|} = \epsilon.$$

- Si $L = 0$, , para $\epsilon/R > 0$, en (1), existe $N \in N$ tal que

  $$n > N \Longrightarrow |x_n - L| < \frac{\epsilon}{R}.$$

  Con esto, se tiene que, si $n > N$, entonces

  $$|x_n y_n - LM| \leq |x_n - L|R + |L||y_n - M| = |x_n - L|R < \frac{\epsilon}{2R}R = \epsilon. \qquad \square$$

2. Calcular el siguiente límite de sucesiones (2pt)

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right|,$$

recordar que $|\operatorname{sen}(t)| \leq |t|$, para todo $t \in \mathbb{R}$

Solución. Se tiene que

$$0 \leq \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n},$$

es decir,

$$0 \leq \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Dado que

$$\lim_{n \to +\infty} 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por el Teorema del Sánduche, se tiene que

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 0.$$

□

ℵ