1. Sean f y g dos funciones complejas que verifican que:
   - $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$, y
   - existe $M > 0$ tal que $|g(z)| \leq M$ para todo $z \in B(z_0, r)$ para algún $r > 0$.

   Muestre que $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0$.

Demostración. Se tiene que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| < \epsilon). \tag{1}$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$, para $\epsilon/M > 0$, en (1), existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_1 \implies |f(z)| < \epsilon/M).$$

Así, tomando $\delta = \min\{\delta_1, r\}$, se tiene que

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)g(z)| = |f(z)||g(z)| < \frac{\epsilon}{M}M = \epsilon. \qquad \square$$

Lineamientos:

- Planteamiento correcto: 0.8pt.
- Elección correcta de δ: 1.0pt.
- Redacción correcta: 0.2pt. $\square$

2. Estudie la continuidad del punto $a = i$ de la función

$$f(z) = |z| + i\,\mathrm{Arg}(iz).$$

Solución. Calculando, se tiene que

$$f(i) = |i| + i\,\mathrm{Arg}(i^2) = 1 + i\,\mathrm{Arg}(-1) = 1 + i\pi.$$

Por otro lado,

$$\lim_{z\to i}(|z| + i\,\mathrm{Arg}(iz)) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \sqrt{x^2+y^2} + i \lim_{(x,y)\to(0,1)} \mathrm{Arg}(-y+ix) = 1 + i \lim_{(x,y)\to(0,1)} \mathrm{Arg}(-y+ix).$$

por lo tanto, basta analizar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \mathrm{Arg}(-y+ix)$.

Recordemos que, si z está en el segundo o tercer cuadrante, se tiene que

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + \pi & \text{si } \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ y } \mathrm{Im}(z) \geq 0, \\ \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) - \pi & \text{si } \mathrm{Re}(z) < 0 \text{ y } \mathrm{Im}(z) < 0, \end{cases}$$

por lo tanto

$$\mathrm{Arg}(-y+ix) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x}{-y}\right) + \pi & \text{si } y > 0 \text{ y } x \geq 0, \\ \arctan\left(\dfrac{x}{-y}\right) - \pi & \text{si } y > 0 \text{ y } x < 0. \end{cases}$$

Con esto, calculemos los límites iterados laterales,

$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{y\to 1}\operatorname{Arg}(-y+ix) = \lim_{x\to 0^+}\lim_{y\to 1}\arctan\left(\frac{x}{-y}\right)+\pi = \lim_{x\to 0^+}\arctan(x)+\pi = \pi;$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^-}\lim_{y\to 1}\operatorname{Arg}(-y+ix) = \lim_{x\to 0^+}\lim_{y\to 1}\arctan\left(\frac{x}{-y}\right)-\pi = \lim_{x\to 0^+}\arctan(x)-\pi = -\pi.$$

Como ambos límites son distintos, el límite en a no existe. Por lo tanto, la función no es continua en a. Además, como el límite no existe en a, no se puede redefinir la función para que esta sea continua en a. □

Lineamientos:

- Evaluación de la función: 0.3pt.
- Cálculo correcto del límite: 1.0pt.
- Conclusión sobre continuidad: 0.2pt.
- Conclusión sobre redefinir la función: 0.5pt.

Recordar que si se desea analizar $\lim_{(x,y)\to(0,1)} h(x,y)$ no se puede tomar un camino del tipo $y = x$, pues se necesitan caminos tales que si $x \to 0$, entonces $y \to 1$. □

3. Estudie la continuidad del punto $a = \exp(i\frac{\pi}{3})$ de la función

$$f(z) = \frac{z^2 - az}{z^3+1}.$$

Solución. Considerando el denominador de la función evaluada de $z = \exp(i\frac{\pi}{3})$, se tiene que

$$z^3 + 1 = \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)3 + 1 = e^{i\pi} + 1 = 0,$$

por lo tanto, la función no está definida en a, de donde se obtiene que la función no es continua en a.

Ahora, teniendo en cuenta que las soluciones de la ecuación $z^3 + 1 = 0$ son -1, $\exp(\frac{i\pi}{3})$ y $-\exp(\frac{2i\pi}{3})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to a}\frac{z^2-az}{z^3+1} &= \lim_{z\to a}\frac{z(z-\exp(\frac{i\pi}{3}))}{(z+1)(z-\exp(\frac{i\pi}{3}))(z+\exp(\frac{2i\pi}{3}))}\\
&= \lim_{z\to a}\frac{z}{(z+1)(z+\exp(\frac{2i\pi}{3}))}\\
&= \frac{\exp(\frac{i\pi}{3})}{(\exp(\frac{i\pi}{3})+1)(\exp(\frac{i\pi}{3})+\exp(\frac{2i\pi}{3}))}\\
&= \frac{\exp(\frac{i\pi}{3})}{2\exp(\frac{2i\pi}{3})+\exp(\frac{i\pi}{3})-1}\\
&= \frac{\exp(\frac{i\pi}{3})}{3\exp(\frac{2i\pi}{3})+(-1+\exp(\frac{i\pi}{3})-\exp(\frac{2i\pi}{3}))}\\
&= \frac{\exp(\frac{i\pi}{3})}{3\exp(\frac{2i\pi}{3})} = \frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Como el límite existe, se puede redefinir la función para que sea continua de la siguiente manera:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2-az}{z^3+1} & \text{si } z \neq a,\\ \frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}} & \text{si } z = a. \end{cases}$$ □

Lineamientos:

- Conclusión de no definición de la función en a: 0.3pt.
- Conclusión sobre continuidad: 0.2pt.
- Cálculo correcto del límite: 1.0pt.
- Conclusión sobre redefinir la función: 0.5pt. $\square$

4. Muestre que la función $f(z) = \frac{1}{z}$ es continua en todo subconjunto de $\mathbb{C}$ que no contenga al cero.

Demostración. Sea U un subconjunto de $\mathbb{C}$ que no contiene al cero. Se procederá a demostrar que f es continua en U. Sea $z_0 \in U$, se debe demostrar que

- f está definida en z_0; y
- $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Como $z_0 \in U$, se tiene que $z_0 \neq 0$, por lo tanto $\frac{1}{z_0}$ existe, es decir, f está definida en z_0.

Ahora, se debe demostrar que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| < \epsilon\right).$$

Así, sea $\epsilon > 0$, se tiene que, si $|z - z_0| < \frac{|z_0|}{2}$, entonces

$$|z_0| - |z| < \frac{|z_0|}{2},$$

es decir

$$\frac{|z_0|}{2} < |z|,$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{|z|} < \frac{2}{|z_0|}.$$

Por otro lado,

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{|z||z_0|} < \frac{2|z - z_0|}{|z_0|^2}.$$

Así, tomando $\delta = \min\{\frac{|z_0|}{2}, \frac{|z_0|^2\epsilon}{2}\}$, se tiene que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| < \frac{2|z - z_0|}{|z_0|^2} \leq \frac{2}{|z_0|^2}\frac{|z_0|^2\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Con esto se tiene que f es continua en todo subconjunto de $\mathbb{C}$ que no contenga al cero. $\square$

Lineamientos:

- Planteamiento del ejercicio: 0.5pt.
- Primera acotación: 0.5pt.
- Segunda acotación: 0.5pt.
- Elección correcta de δ: 0.5pt.

Recordar que el δ buscado no puede depender de z. $\square$

1. Considere la función compleja

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z^4|} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

   a) Usando la definición, muestre que f es continua en el origen.

   b) Muestre que f no es diferenciable en el origen.

   c) Muestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en el origen.

   d) ¿Los literales anteriores son contradictorios?

Demostración. *a*) Sea $\epsilon > 0$, para $z \neq 0$, se tiene que

$$\left| \frac{z^5}{|z^4|} - 0 \right| = \frac{|z^5|}{|z^4|} = \frac{|z|^5}{|z|^4} = |z|,$$

por lo tanto, si tomamos $\delta = \epsilon$, se tiene que

$$|z - 0| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{z^5}{|z^4|} - 0 \right| < \epsilon.$$

b) Sea $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, se tiene que

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h^5}{|h^4|}}{h} = \frac{h^4}{|h^4|},$$

dado que no existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^4}{|h^4|}$, se concluye que f no es diferenciable en 0.

c) Sea $h \in \mathbb{R}$, notemos que

$$u(h,0) + iv(h,0) = f(h + i0) = \begin{cases} \dfrac{h^5}{|h^4|} & \text{si } h \neq 0, \\ 0 & \text{si } h = 0, \end{cases}$$

por lo tanto,

$$v(h,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(h,0) = \begin{cases} \dfrac{h^5}{|h^4|} & \text{si } h \neq 0, \\ 0 & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

De igual manera, dado que

$$u(0,h) + iv(0,h) = f(0 + ih) = \begin{cases} \dfrac{ih^5}{|h^4|} & \text{si } h \neq 0, \\ 0 & \text{si } h = 0, \end{cases}$$

por lo tanto,

$$u(0,h) = 0 \qquad \text{y} \qquad v(0,h) = \begin{cases} \dfrac{h^5}{|h^4|} & \text{si } h \neq 0, \\ 0 & \text{si } h = 0. \end{cases}$$

Así, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^5}{|h^4|}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{|h^4|} = 1;\\
\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0;\\
\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0;\\
\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^5}{|h^4|}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{|h^4|} = 1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0),$$

es decir, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en el origen.

d) Los literales anteriores no son contradictorios, pues la ecuaciones de Cauchy-Riemann solamente son necesarias para la diferneiabilidad, mas no suficientes.

□

2. Segundo enunciado

Demostración. *a*) Dado que la función es holomorfa en D, se tiene que cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann en D, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

para todo $(x,y)\in D$. Por otro lado, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla u(x,y), \nabla v(x,y)\rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)\right\rangle\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\
&= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, las familias de curvas son mutuamente ortogonales.

b) Dado que si f, como se define en el literal anterior, es holomorfa, se tiene que u y v definen curvas mutuamente ortogonales, basta hallar la función conjugada de u. Así, se tiene que

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -e^{-x}\cos(y) + y \tag{1}$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = e^{-x}\sin(y) - x. \tag{2}$$

Por lo tanto, integrando (1) con respecto a y, se tiene que

$$v(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)dy = -e^{-x}\operatorname{sen}(y) + \frac{1}{2}y^2 + c(x),$$

así, derivando esta última con respecto a x, se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^{-x}\operatorname{sen}(y) + c'(x),$$

de donde, combinado con (2), se concluye que

$$c'(x) = -x,$$

con lo cual, se tiene que $c(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \beta$, con $\beta \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$v(x,y) = -e^{-x}\operatorname{sen}(y) + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \beta.$$

Así, la familia de curvas ortogonales a $u(x,y) = \alpha$ es

$$v(x,y) = -e^{-x}\operatorname{sen}(y) + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = \beta.$$

c) Se tiene que

$$\begin{aligned}
g(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y) \\
&= e^{-x}\cos(y) + xy + i\left(-e^{-x}\operatorname{sen}(y) + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2\right) \\
&= e^{-x}(\cos(y) - i\operatorname{sen}(y)) - \frac{1}{2}i\left(x^2 - \frac{2}{i}xy - y^2\right) \\
&= e^{-x}(\cos(-y) + i\operatorname{sen}(-y)) - \frac{1}{2}i\left(x^2 + 2ixy - y^2\right) \\
&= e^{-x}e^{-iy} - \frac{1}{2}i(x+iy)^2 \\
&= e^{-(x+iy)} - \frac{i}{2}(x+iy)^2 \\
&= e^{-z} - \frac{i}{2}z^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que g es la suma de dos funciones enteras, se tiene que también es entera. □

3. Tercer enunciado

Demostración. Supongamos que $|f(x+iy)| = \alpha$, para todo $(x,y) \in D$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha = 0$, se tiene directamente que f es contante 0. Ahora, supongamos que $\alpha \neq 0$, se tiene que

$$u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = \alpha^2.$$

Derivando, se obtiene que

$$2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \text{y} \qquad 2u(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + 2v(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0, \tag{3}$$

Por otro lado, como f es holomorfa en D, se tiene que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

utilizando esto último en (3), se obtiene que

$$u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + v(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \text{y} \qquad -u(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + v(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0,$$

este sistema lo podemos representar por

$$\begin{pmatrix} u(x,y) & v(x,y) \\ v(x,y) & -u(x,y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Además, se tiene que

$$\begin{vmatrix} u(x,y) & v(x,y) \\ v(x,y) & -u(x,y) \end{vmatrix} = -u(x,y)^2 - v(x,y)^2 = -\alpha^2 \neq 0.$$

Así, el sistema (4) tiene como única solución la trivial, es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0,$$

Utilizando nuevamente las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene que

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

De donde, se puede concluir que tanto u como v son funciones constantes, por lo tanto, f es constante en D. $\square$

$\aleph_0$

1. Resuelva
$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^2+1/2)^2}\,dz,$$
donde $C : |z| = 3$.

Solución. Se tiene que
$$\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^2+1/2)^2}\,dz = \oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz,$$
además, $i/\sqrt{2}$ y $-i/\sqrt{2}$ caen dentro de la curva C. Por lo tanto, tomemos C_1 y C_2 dos curvas cerradas que no se corten y que estén dentro de C tales que $i/\sqrt{2}$ cae dentro de C_1 y fuera de C_2 y $-i/\sqrt{2}$ cae dentro de C_2 y fuera de C_1, así
$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^2+1/2)^2}\,dz &= \oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz\\
&= \oint_{C_1} \frac{\operatorname{sen}(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\operatorname{sen}(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz,\\
&= \oint_{C_1} \frac{\frac{\operatorname{sen}(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{\operatorname{sen}(z)}{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz\\
&= \oint_{C_1} \frac{f(z)}{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{g(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz.
\end{aligned}$$
donde f y g son las funciones definidas por
$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2} \qquad \text{y} \qquad g(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2},$$
Dado que f es holomorfa dentro de C_1 y g es holomorfa dentro de C_2, se tiene que
$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^2+1/2)^2}\,dz &= \oint_{C_1} \frac{f(z)}{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz + \oint_{C_2} \frac{g(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dz\\
&= \frac{2i\pi}{1!} f'\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2i\pi}{1!} g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$
Por otro lado, se tiene que,
$$f'(z) = \frac{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cos(z) - 2\operatorname{sen}(z)}{\left(z+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3} \qquad \text{y} \qquad g'(z) = \frac{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cos(z) - 2\operatorname{sen}(z)}{\left(z-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3}.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z^2+1/2)^2}\,dz &= \frac{2i\pi}{1!} f'\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2i\pi}{1!} g'\left(-\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2i\pi \left(\frac{\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3} + \frac{\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)}{\left(-\frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3} \right) \\
&= \frac{2i\pi}{\left(\frac{2i}{\sqrt{2}}\right)^3} \left(\frac{2i}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2i}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
&= \frac{2i\pi}{-2\sqrt{2}i} \left(\frac{4i}{\sqrt{2}}\cos\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) - 4\operatorname{sen}\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
&= -2\pi i \cos\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}\pi \operatorname{sen}\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -2\pi i \cosh\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\sqrt{2}\pi i \operatorname{senh}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

□

2. Estudie la convergencia de la sucesión $z_n = \frac{e^{i3n}}{n^2}$.

Solución. Para $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, se tiene que

$$
|z_n| = \left|\frac{e^{i3n}}{n^2}\right| = \frac{|e^{i3n}|}{n^2} = \frac{1}{n^2}.
$$

Así, cuando $n \to +\infty$, se tiene que $|z_n| \to 0$, por lo tanto $z_n \to 0$, es decir $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente. □

3. Verifique que la serie

$$
\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4-(-1)^n}{n}\right)^{n^2} i^{n^2}
$$

es convergente.

Demostración. Utilizando el criterio de la raíz, definamos

$$
x_n = \sqrt[n]{\left|\left(1 - \frac{4-(-1)^n}{n}\right)^{n^2} i^{n^2}\right|}.
$$

Así, para $n \geq 5$, se tiene que

$$
x_n = \sqrt[n]{\left|1 - \frac{4-(-1)^n}{n}\right|^{n^2} |i^{n^2}|} = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{4-(-1)^n}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{4-(-1)^n}{n}\right)^n.
$$

Demostraremos que $\limsup x_n < 1$, para lo cual, notemos que, para $n > 5$,

$$
x_{2n} = \left(1 - \frac{4-(-1)^{2n}}{2n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{4-1}{2n}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{1}{2n/3}\right)^{2n/3}\right)^3,
$$

así, cuando $n \to +\infty$, se tiene que $x_{2n} \to e^{-3} < 1$. Por otro lado,

$$
x_{2n+1} = \left(1 - \frac{4-(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 - \frac{4+1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(\left(1 - \frac{1}{(2n+1)/5}\right)^{(2n+1)/5}\right)^5,
$$

así, cuando $n \to +\infty$, se tiene que $x_{2n+1} \to e^{-5} < 1$. Por lo tanto, dado que ambas subsucesiones cubren toda la sucesión original, se tiene que

$$
\limsup x_n < 1.
$$

Con lo cual, se concluye que la serie converge. □

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS COMPLEJO • EXAMEN N° 1

Semestre 2016-A *Mat. Andrés Merino*

1. Sean f y g dos funciones complejas definidas por $f(z) = \bar{z}$ y $g(z) = z^2$. Estudie la diferenciabilidad de la función $h = g \circ f$.

Solución. Se tiene que $h(z) = \bar{z}^2$, así, para $x, y \in \mathbb{R}$ se obtiene que

$$f(x+iy) = (\overline{x+iy})^2 = (x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy.$$

Por lo tanto, si tomamos

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = -2xy,$$

se tiene que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Por otro lado, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -2y.$$

Por lo tanto, dado que todas estas funciones son continua, para que f sea diferenciable, es necesario y suficiente que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, f es diferenciable si y solo si

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

lo que equivale a

$$2x = -2x \qquad \text{y} \qquad -2y = -(-2y),$$

es decir, $x = 0$ y $y = 0$. Con esto, se tiene que f es diferenciable únicamente en el punto 0. □

2. Sea $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función de variable compleja a valores reales. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$, entonces $f'(z_0) = 0$.

Demostración. Dado que f solo toma valores reales, para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

con $v(x,y) = 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Dado que f es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$, con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicho punto, por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = 0.$$

Así, se tiene que

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 - i0 = 0.$$

□

3. Determine el máximo conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$ tal que la función f, definida por

$$f(x+iy) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$$

para $x, y \in \mathbb{R}$, sea diferenciable en S. Además, halle $f'(z)$ para cualquier $z \in S$.

Demostración. Si definimos

$$u(x,y) = x^3 + 3xy^2 - x \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = y^3 + 3x^2y - y,$$

se tiene que $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$. Por otro lado, se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=3x^2+3y^2-1, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=3y^2+3x^2-1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=6xy, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=6xy.$$

Por lo tanto, dado que todas estas funciones son continua, para que f sea diferenciable, es necesario y suficiente que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, f es diferenciable si y solo si

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

lo que equivale a

$$3x^2+3y^2-1=3y^2+3x^2-1 \quad \text{y} \quad 6xy=-(6xy),$$

dado que la primera ecuación es siempre verdadera y la segunda se cumple siempre y cuando $xy=0$, se tiene que f es diferenciable en $x+iy$ si y solo si $xy=0$. Por lo tanto, el máximo conjunto $S\subseteq\mathbb{C}$ tal que la función f es diferenciable está dado por

$$S=\{x+iy\in\mathbb{C}:x,y\in\mathbb{R}\ \text{ y }\ xy=0\}=\{x+iy\in\mathbb{C}:x,y\in\mathbb{R}\ \text{ y, }\ x=0\ \text{ o }\ y=0\}.$$

Así, sea $x+iy$, con $x,y\in\mathbb{R}$, dado que f es derivable en $x+iy$, se tiene que

$$f'(x+iy)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=3y^2+3x^2-1-i(6xy)=3y^2+3x^2-1. \qquad \square$$

$\aleph_0$