Cuadernos de Matemática
de la Escuela Politécnica Nacional

7

Análisis Complejo

Guia

Eduardo Arias

FACULTAD DE CIENCIAS E.P.N ECUADOR

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE mat

Cuadernos de Matemática
de la Escuela Politécnica Nacional

E. Arias

Análisis Complejo

Guia

DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA

Cuadernos de Matemática No. 7

ANÁLISIS COMPLEJO: GUIA

Eduardo Arias

Responsable de la Edición: Andrés Merino
Revisión técnica: Jonathan Ortiz

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-111-22

Publicado por la Unidad de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

Índice general

PREFACIO

El presente libro es la recopilación de los apuntes de clase de la asignatura “Análisis Complejo” dictada por el profesor Phd. Paúl Acevedo en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional, y recopilados por el estudiante Eduardo Arias, el cual cursó la asignatura en el semestre referencial 2016-A.

NÚMEROS COMPLEJOS Y OPERACIONES

Introducción

DEFINICIÓN 1.1: Número complejo

Se dice que z es un número complejo *si $z = (a, b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Además, al conjunto de todos los números complejos se los denotará como $\mathbb{C}$.*

OBSERVACIÓN. (a, b) es un elemento de $\mathbb{R}^2$. Básicamente, $\mathbb{C}$ será equivalente a $\mathbb{R}^2$, pero con operaciones de producto y división.

OBSERVACIÓN. La idea de introducir $\mathbb{C}$ es que es posible definir un producto cerrado y que cumpla las siguientes propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad con respecto a la suma.

Podemos ver que a un número complejo lo podemos expresar como

$$z = (a, b) = a\underbrace{(1, 0)}_{1} + b\underbrace{(0, 1)}_{i} = a \cdot 1 + b \cdot i$$

con

$$\begin{aligned} 1 &:= (1, 0), \\ i &:= (0, 1), \end{aligned}$$

además, definimos al cero como

$$0 := (0, 0).$$

Así, podemos reescribir al conjunto $\mathbb{C}$ de la definición (1) como

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Definamos al conjunto

$$\mathcal{R} = \{(x, 0) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Nótese que $\mathcal{R}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$, de dimensión 1.

Definiendo la aplicación siguiente

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathcal{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,0) &\longmapsto x \end{aligned}$$

se puede probar que T es lineal y biyectiva, es decir,

$$\mathcal{R} \approx \mathbb{R}^1$$

Decimos que el conjunto A es isomorfo al conjunto B si y solo si existe una función biyectiva $f\colon A \to B$ que preserva ciertas propiedades; por ejemplo, en este caso decimos que $\mathcal{R}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$, pues la aplicación T es biyectiva y preserva las propiedades de los reales.

De lo anterior se puede ver que

$$\begin{aligned} T(1,0) = 1 &\Longleftrightarrow (1,0) \approx 1 \\ &\Longleftrightarrow (1,0) = 1. \end{aligned}$$

Aunque esta última expresión es un abuso de notación.

Existen dos formas de explicar la expresión $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$:

1. Dado que $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces tenemos que $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$, ahora como $\mathbb{R} \approx \mathcal{R}$ tenemos que

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

La demostración se la deja al lector.

2. También, como para todo $z \in \mathbb{C}$ existen únicos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $z = a + ib$. En particular para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$x = x \cdot 1 + 0 \cdot i$$

y este es un elemento de $\mathbb{C}$, por lo cual se tiene que

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Operaciones sobre $\mathbb{C}$

DEFINICIÓN 1.2: Operaciones

Para todo $z_1 = (a_1, b_1), z_2 = (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen las siguientes operaciones:

1. Suma

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

[1] $\mathcal{R}$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

2. Producto por un escalar

$$\alpha \cdot z = (\alpha a, \alpha b).$$

3. Producto entre complejos

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Este producto cumple las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad con respecto a la suma.

Tomando en cuenta al *neutro aditivo* como

$$0 := (0, 0)$$

y al *neutro del producto* como

$$1 := (1, 0),$$

Ahora, para todo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$, su *inverso aditivo* es

$$-z := (-a, -b)$$

y su *inverso multiplicativo* si $z \neq 0$ es

$$z^{-1} := \frac{1}{a^2 + b^2}(a, -b). \tag{1.1}$$

Con lo anterior podemos probar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

Observación. Gracias a que $\mathbb{C}$ es un campo se lo puede considerar como un conjunto de escalares. Con esta nueva definición, los elementos de $\mathbb{C}$ definen números, no vectores.

$$\mathbb{C} = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Donde i es el número imaginario tal que cumple la propiedad

$$i \cdot i = -1.$$

Gracias a que $\mathbb{C}$ es un cuerpo, podemos tratarlo como al cuerpo $\mathbb{R}$, es decir, podemos utilizar sus propiedades de cuerpo.

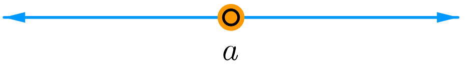
Definición 1.3: Parte real y parte imaginaria de un número complejo

Para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ se notan las siguientes funciones

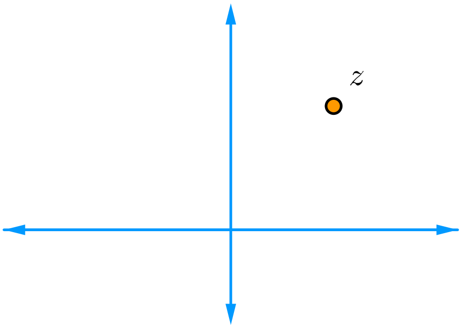
$$a = \mathrm{Re}(z) \qquad y \qquad b = \mathrm{Im}(z).$$

Representación geométrica de $\mathbb{C}$

En $\mathbb{R}$, un elemento a se lo puede representar como un punto:



En $\mathbb{C}$, a un elemento z también se lo puede representar como un punto:



Mediante estos gráficos y lo mostrado en la sección anterior se puede notar que para todo elemento $z \in \mathbb{C}$ se lo puede ver como un elemento de un cuerpo, es decir, podemos utilizar sus propiedades de cuerpo como son la multiplicación y división.

DEFINICIÓN 1.4: Plano Complejo

Al plano donde a cada $z \in \mathbb{C}$ se lo considera un escalar se lo nota como Plano Complejo, Plano Z o Plano de Argand.

DEFINICIÓN 1.5: Módulo

Podemos crear la noción de "tamaño" asociada a un número complejo de la siguiente manera. Para todo $z \in \mathbb{C}$, a la distancia que existe entre z y el elemento 0 lo notaremos como $|z|$ y lo definiremos como:

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Además a esta función la llamaremos módulo *de z.*

DEFINICIÓN 1.6: Conjugado de un número complejo

Para todo $z \in \mathbb{C}$, a

$$\overline{z} := a - ib$$

lo llamaremos el conjugado *de z y notaremos como $\overline{z}$.*

Para todo $z \in \mathbb{C}^*$ con las definiciones (5) y (6) podemos reescribir la ecuación (1.1) de la siguiente manera

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \tag{1.2}$$

además para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \neq 0$ podemos definir la división entre números complejos como:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot z_2^{-1} \\ &= \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

EJERCICIO 1.1. 1. Muestre que para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

a) $\operatorname{Re}(z_1 z_1) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)$

b) $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Im}(z_2) + \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)$.

2. Muestre que para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica la siguiente ecuación:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$

Esta identidad se la conoce como "igualdad del paralelogramo". Explique el por qué de esta denominación.

$\mathbb{C}$ visto como un espacio vectorial

Sabemos que a la tetrapleta $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión 2, por tener una base de dos elementos.[2] Por otro lado, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial de dimensión 1. Visto esto se preguntarán ¿qué sucede con $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$?

Pues bien, veamos sus bases:

1. Notemos que una base para $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es el conjunto

$$B_1 = \{1, i\},$$

pues para todo $z \in \mathbb{C}$ se necesitan dos únicos $a, n \in \mathbb{R}$ tales que

$$z = a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i.$$

La demostración se lo deja como ejercicio para el lector.

2. Por otro lado, veamos que el conjunto

$$B_2 = \{1\}$$

[2] Por ejemplo la base $B = \{(1,0); (0,1)\}$

es una base para $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, +, \cdot)$ con el campo C. En efecto, notemos que

$$z = z \cdot 1,$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

Comportamiento de "i" a través de productos sucesivos

Notemos que a partir de su definición podemos ver lo siguiente:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = 1, \quad \ldots$$

como pueden observar se cumple que la sucesión $(i^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ se la puede representar como:

$$i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 4n \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \\ i & \text{si } k = 4n+1 \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{si } k = 4n+2 \text{ con } n \in \mathbb{Z}, \\ -i & \text{si } k = 4n+3 \text{ con } n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{1.4}$$

OBSERVACIÓN. Nótese que a la ecuación (1.4) la podemos simplificar como

$$i^k = i^r,$$

donde r es el residuo de la división de k para 4, en otras palabras

$$k \equiv r \pmod 4.$$

EJEMPLO 1.1. Calculemos, las siguientes expresiones:

1. $(1+i)^{3858}$

$$\begin{aligned} (1+i)^{3858} &= \left((1+i)^2\right)^{1929} \\ &= (2i)^{1929} \\ &= 2^{1929}(i)^{1929} \\ &= 2^{1929} i. \end{aligned}$$

2. $(1-i)^{3859}$

$$\begin{aligned} (1-i)^{3859} &= \left((1-i)^2\right)^{1929+1} \\ &= (-2i)^{1929}(1-i) \\ &= (-2)^{1929}(i)^{1929}(1-i) \\ &= -2^{1929} i(1-i) \\ &= -2^{1929} + i 2^{1929}. \end{aligned}$$

Observemos que estos dos casos son particulares, no necesariamente se cumple una propiedad similar.

La observación anterior solo se puede utilizar cuando tenemos una potencia de la forma

$$(a)^k,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y $a \in \mathbb{C}$ tal que existe un entero l que es divisible para k y además existe un $b \in \mathbb{C}$ tal que $a^l = bi$, si se cumple esto, entonces se cumple que

$$(a)^k = b^m i^m,$$

donde $m \in \mathbb{Z}$ tal que $k = lm$.

Por otro lado, para el presente folleto usaremos a x y y para declarar variables reales y a z para denotar una variable compleja.

DEFINICIÓN 1.7: Algebráicamente cerrado

Sea $\mathbb{K}$ un campo, se dice que el campo $\mathbb{K}$ es algebráicamente cerrado *si todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{K}$.*

De esta definición sale que el campo $\mathbb{R}$ no es algebráicamente cerrado. En efecto, basta considerar el polinomio

$$p(x) = x^2 + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Este polinomio no tiene raíces en los reales.

TEOREMA 1.1: Teorema fundamental del álgebra

El campo $\mathbb{C}$ es algebráicamente cerrado.

La demostración de este teorema la realizó G.F. Gauss, la cual es bastante compleja, pero se simplificó sustancialmente con el análisis complejo.

DEFINICIÓN 1.8: Orden

Decimos que un conjunto X es ordenado *o* tiene orden *si posee una relación "$\preceq$" que cumple con las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in X$:*

1. *Reflexividad:*

$$x \preceq x.$$

2. *Antisimetria:*

$$x \preceq y \wedge y \preceq x \Longrightarrow x = y.$$

3. *Transitividad:*

$$x \preceq \wedge y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z.$$

Además, cuando para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ implica que $x \preceq y$ o $y \preceq x$ se dice que es un orden total*, o que X está* ordenado totalmente.

OBSERVACIÓN. $\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado.[3]

DEFINICIÓN 1.9: Tricotomía

Para todo X un conjunto totalmente ordenado con la relación de orden "$\preceq$", la ley tricotomía *dice que para todo $x, y \in X$ se cumple que*

$$x \preceq y \quad \veebar \quad y \preceq x \quad \veebar \quad x = y.$$

PROPOSICIÓN 1.2. $\mathbb{C}$ no es un cuerpo totalmente ordenado, es decir no existe una relación de orden total en C.

Demostración. Se procederá a demostrarlo por reducción a lo absurdo. Así, supongamos que $\mathbb{C}$ es un cuerpo totalmente ordenado, y denotemos como "$\preceq$" un orden total en este conjunto. Como $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$, se tiene la relación de orden total "$\succ$" al menos debe cumplir con las propiedades de la relación de orden en $\mathbb{R}$.

Por tricotomía, si

$$0 \prec i \tag{1.5}$$

se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &\prec i \\ 0 \cdot i &\prec i^2 \\ 0 &\prec -1 \\ 1 &\prec 0 \\ i \cdot 1 &\prec 0 \\ i &\prec 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Las ecuaciones (1.5) y (1.6) se contradicen, por lo cuál se termina la demostración y concluimos que el cuerpo $\mathbb{C}$ no es totalmente ordenado. $\square$

OBSERVACIÓN. Por ejemplo, si $z \leq 10$ implica que $z \in \mathbb{R}$.

LEMA 1.3. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ expresados en su forma binomial, notemos que sus conjuga-

[3] La demostración no compete al presente curso.

dos se encuentran dados por

$$\overline{z_1} = a_1 - ib_1 \qquad \text{y} \qquad \overline{z_2} = a_2 - ib_2.$$

Ahora, si sumamos esto obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \overline{z_1} + \overline{z_2} &= a_1 - ib_1 + a_2 - ib2 \\ &= (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \\ &= \overline{z_1 + z_2}. \end{aligned}$$

De lo que concluimos que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

□

PROPOSICIÓN 1.4 (Propiedades del conjugado de $z \in \mathbb{C}$)**.** Las siguientes propiedades se cumplen para todo $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$:

1. $\overline{\sum_{i=1}^{n} z_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}$
2. $\overline{\prod_{i=1}^{n} z_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{z_i}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sean $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, \ldots, z_n = a_n, +ib_n \in \mathbb{C}$, con $a_1, b_2, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$..

Las propiedades 1 y 2 se van a demostrar por inducción.

1. Por inducción supongamos que n=2, por el lema (1.3) se tiene que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Ahora, supongamos un caso para $n = k$, con $k \in \mathbb{K}_+^*$ y $k \geq 2$.

$$\begin{aligned} \overline{\sum_{i=1}^{k} z_i} + \overline{z_{k+1}} &= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\right) - i\left(\sum_{i=1}^{k} b_i + b_{k+1}\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right) - i\left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i\right) \\ &= \overline{\sum_{i=1}^{k+1} z_i}. \end{aligned}$$

2. Similar al ejercicio anterior, para $n = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)} \\
&= \overline{\Big(a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2)\Big)} \\
&= \Big(a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + b_1a_2)) \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{z_1}\,\overline{z_2} &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) \\
&= \Big((a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)\Big). \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (1.7) y (1.8) se tiene la igualdad.

Ahora, supongamos que se cumple para $n = k$, con $k \in \mathbb{K}_+^*$ y $k \geq 2$. Por la definición de producto de números complejos (2), se tiene que

$$\prod_{i=1}^{k} z_i = a + ib,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Utilizando el resultado anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\prod_{i=1}^{k+1} z_i\right)} &= \overline{\left(\prod_{i=1}^{k} z_i\right) \cdot z_{k+1}} \qquad (1.9) \\
&= \overline{(a + ib)(a_{k+1} + ib_{k+1})} \\
&= \overline{\Big(aa_{k+1} - bb_{k+1} + i(ab_{k+1} + ba_{k+1})\Big)} \\
&= \Big(aa_{k+1} - bb_{k+1} - i(ab_{k+1} + ba_{k+1}),\Big) \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

con $a_{k+1}, b_{k+1} \in \mathbb{R}$ tales que $z_{k+1} = a_{k+1} + ib_{k+1}$.

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{k+1} \overline{z_i} &= \prod_{i=1}^{k} \overline{z_i} \cdot \overline{z_{k+1}} \qquad (1.11) \\
&= \overline{\prod_{i=1}^{k} z_i} \cdot \overline{z_{k+1}} \\
&= (a - ib)(a_{k+1} - ib_{k+1}) \\
&= \Big((aa_{k+1} - bb_{k+1}) - i(ab_{k+1} + a_{k+1}b)\Big) \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

de las ecuaciones (1.10) y (1.12) se sigue el resultado.

3. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Por la definición (5) se tiene que

$$\overline{z} = a - ib.$$

Es claro que $\overline{z} \in \mathbb{C}$, por lo cual

$$\begin{aligned}\overline{\overline{z}} &= \overline{a - ib}\\ &= a + ib\\ &= z.\end{aligned}$$

4. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Supongamos que se cumple la condición

$$z = \overline{z}$$

y veamos la forma del elemento z. Así, se tiene que

$$z = \overline{z} \tag{1.13}$$

$$a + ib = a - ib \tag{1.14}$$

Pero para que se cumpla la ecuación (1.14) $b = 0$, así a z se lo puede representar como

$$z = a + i0,$$

o lo que es lo mismo $z \in \mathbb{R}$.

Nótese que a la ecuación (1.13) se la puede escribir de la siguiente manera

$$\mathrm{Re}(z) = z.$$

□

Definición 1.10: Producto interno

Para todo espacio vectorial $(X, \mathbb{K}, +, \cdot)$*, se define el* producto interno *como la función*

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X &\longrightarrow \mathbb{K}\\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle\end{aligned}$$

tal que para todo $x, y, z \in X$ *y para todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$,
4. *y* $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Proposición 1.5 (Propiedades del módulo de $z \in \mathbb{C}$)**.** Las siguientes propiedades se cumplen para todo $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$:

1. $\left|\prod_{i=1}^{n} z_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |z_i|$
2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
3. $\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$
4. $\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \cdot \overline{z_2}$ define un producto interno sobre $\mathbb{C}$.
5. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$

Demostración. Sean $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2, \ldots, z_n = a_n, +ib_n \in \mathbb{C}$, con $a_1, b_2, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_2 \in \mathbb{R}$..

Las propiedades 1 y 2 se van a demostrar por inducción.

1. Para $n = 2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2|^2 &= |(a_1 + ib_2)(a_2 + ib_2)|^2 \\
&= |(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1b_2)|^2 \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2. \\
&= (a_1a_2)^2 + (a_1b_2)^2 + (b_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2. \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
|z_1|^2|z_2|^2 &= |a_1 + ib_1|^2|a_2 + ib_2|^2 \\
&= \Big((a_1)^2 + (b_1)^2\Big)\Big((a_2)^2 + (b_2)^2\Big) \\
&= (a_1a_2)^2 + (a_1b_2)^2 + (b_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2. \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (1.15) y (1.16) se sigue el resultado.

Ahora, supongamos que se cumpla para un caso $n = k$, con $k \in \mathbb{Z}_+^*$ y $n \geq 2$. Nótese que

$$\prod_{i=1}^{k} z_i = z = a + ib. \qquad (1.17)$$

Como supusimos que se cumple para $n = k$, se tiene que

$$\left|\prod_{i=1}^{k} z_i\right| = \prod_{i=1}^{k} |z_i|. \qquad (1.18)$$

Ahora, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{i=1}^{k+1} z_i\right| &= |z \cdot z_{k+1}| \\
&= |z||z_{k+1}| \qquad \text{por (1.17)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\prod_{i=1}^{k} z_i\right| |z_{k+1}|| && \text{por (1.18)}\\
&= \prod_{i=1}^{k+1} |z_i|.
\end{aligned}
$$

Por el principio de inducción finita tenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$ y $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\left|\prod_{i=1}^{n} z_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |z_i|.$$

2. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|z|^2 &= \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2\\
&= (a)^2 + (b)^2\\
&= (a+ib)(a-ib)\\
&= z \cdot \overline{z}.
\end{aligned}
$$

3. Para $n = 2$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}\\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})\\
&= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}\\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}. \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

Para concluir que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, se debe probar que

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} \leq 2|z_1||z_2|.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} &= (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i) + (a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)\\
&= a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_1 b_2 - b_1 a_2)i + a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 - b_2 a_2)i\\
&= 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)\\
&\leq 2\Big((a_1{}^2 + b_1{}^2)(a_2{}^2 + b_2{}^2)\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (1.20)\\
&= 2|z_1||z_2|.
\end{aligned}
$$

Veamos detenidamente como llegamos a la desigualdad expresada en (1.20). Tenemos lo siguiente

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 = a_1{}^2 a_2{}^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1{}^2 b_2{}^2,$$

además tenemos que

$$(a_1{}^2 + b_1{}^2)(a_2{}^2 + b_2{}^2) = a_1{}^2 a_2{}^2 + a_1{}^2 b_2{}^2 + a_2{}^2 b_1{}^2 + b_1{}^2 b_2{}^2.$$

Por propiedades en los reales tenemos que

$$2a_1a_2b_1b_2 \leq {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2,$$

es decir, tenemos que

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \leq ({a_1}^2 + {b_1}^2)({a_2}^2 + {b_2}^2)$$

Ahora, de lo anterior y la ecuación (1.19) se sigue que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

4. Para que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sea un producto interno debe cumplir con la definición (10). Sea $z, \in \mathbb{C}$, debemos probar

   a) que $\langle z, z \rangle \geq 0$. Así, por definición tenemos que

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle &= z \cdot \overline{z} \\ &= |z|^1 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

   b) que $\langle z, z \rangle = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

      1) Supongamos que $z = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle &= z \cdot \overline{z} \\ &= 0 \cdot \overline{0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

      2) Ahora, supongamos que z está expresado en su forma binomial como $z = a + ib$ y además $\langle z, z \rangle = 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle &= 0 \\ z \cdot \overline{z} &= 0 \\ \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 &= 0 \\ a^2 + b^2 &= 0, \end{aligned}$$

      De aquí noten que, puesto que $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos que $a^2, b^2 \geq 0$. Ahora, noten que

$$0 \leq a^2 \leq a^2 + b^2 \leq 0,$$

      de lo cual tenemos que $a^2 = 0$, por un razonamiento similar tenemos que $b^2 = 0$ y de eso tenemos que

$$z = 0.$$

   c) que para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tenemos que $\langle z_1, z_2 \rangle = \overline{\langle z_1, z_2 \rangle}$.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{\langle z_1, z_2\rangle} &= \overline{z_2 \cdot \overline{z_1}}\\ &= \overline{z_2} \cdot z_1\\ &= < z_1, z_2 > .\end{aligned}$$

d) por último, debemos probar que para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, entonces $< \alpha z_1, z_2 > = \alpha < z_1, z_2 >$.

Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\begin{aligned}< \alpha \cdot z_1, z_2 > &= \alpha \cdot z_1 \cdot \overline{z_2}\\ &= \alpha \cdot (z_1 \cdot \overline{z_2})\\ &= \alpha < z_1, z_2 > .\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN. Notemos que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define sobre $\mathbb{C}$ una norma. Así, para todo $z \in \mathbb{C}$ se define la norma de z como

$$\|z\| = \langle z, z\rangle^{\frac{1}{2}}$$

y la denotaremos por $\|z\|$.

La demostración se lo deja como ejercicio para el lector.

EJEMPLO 1.2. Mostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Solución. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Nótese que su conjugado es $\overline{z} = a - ib$. Así, se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{z + \overline{z}}{2} &= \frac{a + ib + a - ib}{2}\\ &= \frac{2a}{2}\\ &= a\\ &= \operatorname{Re}(z)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{z - \overline{z}}{2i} &= \frac{a + ib - a + ib}{2i}\\ &= \frac{2ib}{2i}\\ &= b\\ &= \operatorname{Im}(z)\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 1.3. Mostrar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\max\{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

Solución. Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Por la definición (5) se tiene que

$$|z|^2 = |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2$$

$$\geq |\operatorname{Im}(z)|^2,$$

lo que implica que

$$\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|,$$

e manera similar tenemos que

$$\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|.$$

De lo que cual tenemos que

$$\text{máx}\{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\} \leq |z|,$$

pues como verán tenemos que

$$\operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) \leq |z|,$$

como la propiedad se cumple tanto para la parte real como para la imaginaria, entonces se seguirá cumpliendo para el mayor de los dos, es decir, para el máximo entre las dos.

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned}
(|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)^2 &= |\operatorname{Re}(z)|^2 + 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|^2 \\
&\geq |\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2 \\
&\geq |z|^2 \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

de esto se sigue que

$$|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

Por todo lo anterior se tiene

$$\text{máx}\{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

□

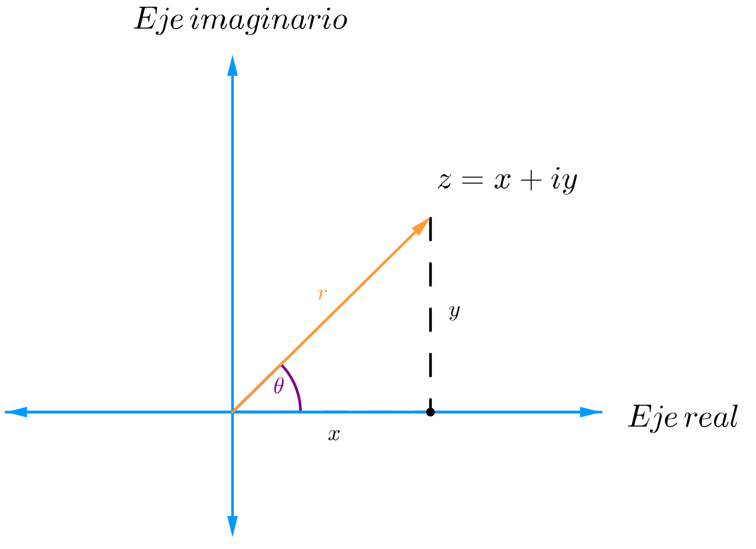
EJERCICIO 1.2. Pruebe las desigualdades siguientes:

1. Para todo $z, w \in \mathbb{C}$
$$|z - w| \geq \Big||z| - |w|\Big|$$

2. Para todo $z, w \in \mathbb{C}$ tal que $w \neq 0$
$$|z + w| \geq \frac{1}{2}(|z| + |w|)\left|\frac{z}{|z|} + \frac{w}{|w|}\right|.$$

Representación polar de un $z \in \mathbb{C}$

El número $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ tiene su representación en el plano complejo como:



donde r el módulo de z.

r : radio.

θ : ángulo que forma el vector $\overrightarrow{0z}$ con el eje real.

Así, podemos ver que

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\sin\theta.$$

Definición 1.11

En variable compleja definimos al conjunto $arg(z)$, como el conjunto de todos los θ posibles tales que θ es el ángulo que hace el vector $\overrightarrow{0z}$ con el eje real, es decir,

$$\arg(z) = \{\theta : \theta \text{ es el ángulo que forma el vector } \overrightarrow{0z} \text{ con el eje real}\}. \tag{1.21}$$

Para evitar ambigüedad vamos a considerar que el argumento de z estará localizado en un intervalo de longitud 2π, y consideraremos el intervalo

$$\theta \in \,]-\pi, \pi\,].$$

Esto será lo mismo que decir, si θ es el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{0z}$ con el eje real se tiene que existe un α tal que

$$\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}, \tag{1.22}$$

este ángulo α será un elemento del intervalo $]-\pi, \pi\,]$.

DEFINICIÓN 1.12: Argumento principal

El argumento principal de z *es el ángulo* α *que cumple con la ecuación* (1.22) *tal que* $\alpha \in\,]-\pi, \pi\,]$ *y se denotará como* $\operatorname{Arg}(z)$.

Con la definición anterior podemos redefinir al conjunto definido en la ecuación (1.21) como

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : \theta = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\operatorname{Arg}(z) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

De la definición (12) podemos definir lo siguiente.

DEFINICIÓN 1.13: Coordenadas polares de un número complejo

Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *con* $x, y \in \mathbb{R}$*, se lo puede representar de la forma siguiente*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

donde $r = |z|$ *y* $\theta \in \arg(z)$.

OBSERVACIÓN. Como $\operatorname{Arg}(z)$ es único su representación en forma polar es única. Por otro lado, si $\theta \in \arg(z)$ su representación no es única, por ejemplo notemos que dos formas de representar a i en coordenadas polares son $i = 1\,(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$ y $i = 1\,(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi))$.

Por facilidad usaremos la notación siguiente

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= |z|(\operatorname{cis}\theta) \end{aligned}$$

donde $\operatorname{cis}\theta$ representa a la suma $\cos\theta + i\sin\theta$.

EJEMPLO 1.4. ¿Es verdad que para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg(z_2)?$$

Solución. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y sean $\theta_1 \in \arg(z_1)$ y $\theta_2 \in \arg(z_2)$. Se tiene que $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1$ y $z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2$.

Tenemos por la definición (1.6) que

$$\theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1 \cdot z_2)$$

pues notemos que

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \operatorname{cis}\theta_1)(r_2 \operatorname{cis}\theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \Big((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\Big) \end{aligned}$$

$$= r_1 r_2 \Big(\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \Big)$$

Así,

$$\arg z_1 + \arg(z_2) \subseteq \arg(z_1 \cdot z_2).$$

Por otro lado, supongamos que $\alpha \in \arg(z_1 \cdot z_2)$, debemos probar que $\alpha \equiv \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}$.

De la suposición que $\alpha \in \arg(z_1 \cdot z_2)$, tenemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi k$, de esto obtenemos que

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r \operatorname{cis}(\alpha) \\ &= r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

por la periodicidad de las funciones Seno y Coseno.

Ahora, por la definición en la ecuación (1.21) se tiene que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : \ z = r \operatorname{cis}(\theta)\},$$

con $r = r_1 r_2$, además

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\alpha) &= \sin(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$\alpha \equiv \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi},$$

es decir,

$$\alpha \in \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Y todo lo anterior implica que

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

□

EJEMPLO 1.5. ¿Es verdad que para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)?$$

Solución. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Del ejemplo anterior tenemos que

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2),$$

pero notemos que por definición tenemos

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \{\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) + 2\pi k : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\arg(z_1) = \{\operatorname{Arg}(z_1) + 2\pi k : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

y

$$\arg(z_2) = \{\operatorname{Arg}(z_2) + 2\pi k : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

De esto, existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + 2\pi k_0.$$

A esta expresión la podemos expresar de forma general como

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) \equiv \operatorname{Arg}(z_{|}) + \operatorname{Arg}(z_2) \pmod{2\pi}.$$

□

PROPOSICIÓN 1.6 (Propiedades de multiplicación y división en coordenadas polares). 1.

Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1, z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2 \in \mathbb{C}$ donde $\theta_1 \in \arg(z_1)$ y $\theta_2 \in \arg(z_2)$.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

2. Para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_2 \neq 0$ y $z_1 = r_1 \operatorname{cis}\theta_1, z_2 = r_2 \operatorname{cis}\theta_2 \in \mathbb{C}$ donde $\theta_1 \in \arg(z_1)$ y $\theta_2 \in \arg(z_2)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

Demostración. 1. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ expresados en su forma polar,

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \operatorname{cis}\theta_1)(r_2 \operatorname{cis}\theta_2) \\
&= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2 \Big((\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \Big) \\
&= r_1 r_2 \Big(\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \Big)
\end{aligned}$$

2. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \neq 0$ expresados en su forma polar,

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \operatorname{cis}\theta_1}{r_2 \operatorname{cis}\theta_2} \\
&= \frac{r_1}{r_2} (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \\
&= \frac{r_1}{r_2} \Big((\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1) \Big) \\
&= \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 1.3. 1. Para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Muestre que el argumento principal de z, se puede expresar de las siguiente maneras:

a)

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) & \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ y } \operatorname{Im}(z) > 0, \\ \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ y } \operatorname{Im}(z) \geq 0, \\ \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) - \pi & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ y } \operatorname{Im}(z) < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ y } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

b)

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} 2\arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z) + |z|}\right) & \text{si } z \in \mathbb{R}, \\ \pi & \text{si } z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

2. Encuentre una ecuación que relacione los conjuntos $\arg(z)$, $arg(\overline{z})$ y $\arg(\frac{1}{z})$. para $z \in \mathbb{C}^*$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

3. Calcular los conjuntos solución para que

$$\frac{2z-1}{z-2}$$

a) tenga argumento principal $\frac{\pi}{2}$

b) tenga argumento principal $-\frac{\pi}{2}$.

Potencia entera de un número complejo

Los resultados que se mostrarán en esta sección son de mucha importancia, pues conectan a los números complejos con las funciones trigonométricas reales.

TEOREMA 1.7: Teorema de Moivre

Para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces se cumple que

$$z^n = |z|^n \operatorname{cis}(n\theta),$$

donde $\theta \in \arg(z)$.

OBSERVACIÓN. Este resultado se puede extender a los racionales y a su vez a los reales. Su demostración queda de ejercicio para el lector.

Demostración. Vamos a usar inducción matemática. Para $n = 1$, tenemos que

$$z = |z| \operatorname{cis} \theta \quad \text{con } \theta \in \arg(z),$$

esto es verdadero, pues es la expresión de un compleja en su forma polar.

Para $n = 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z \\ &= |z| \operatorname{cis} \theta \cdot |z| \operatorname{cis} \theta \\ &= |z|^2 (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= |z|^2 \Big((\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + i(2 \sin \theta \cos \theta) \Big) \\ &= |z|^2 (\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)) \\ &= |z|^2 \operatorname{cis}(2\theta). \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que se cumple para $n = k$, es decir, tenemos que

$$z^k = |z|^k \operatorname{cis}(k\theta).$$

Luego, debemos probar que se cumple para $n = k + 1$, así se tiene que

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \\ &= |z|^k \operatorname{cis}(k\theta) \cdot |z| \operatorname{cis} \theta \\ &= |z|^{k+1} \operatorname{cis}(\theta) \operatorname{cis}(\theta) \\ &= |z|^{k+1} \Big((\cos(k\theta) + i \sin(k\theta))(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \Big) \\ &= |z|^{k+1} \Big((\cos(k\theta) \cos(\theta) - \sin(k\theta) \sin(\theta)) + i(\sin(k\theta) \cos(\theta) + \sin(\theta) \cos(k\theta)) \Big) \\ &= |z|^{k+1} \Big(\cos((k+1)\theta) + i \sin((k+1)\theta) \Big) \\ &= |z|^{k+1} \operatorname{cis} \Big((k+1)\theta \Big) \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, para $n = -1$, se tiene que □

DEFINICIÓN 1.14: Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta = \operatorname{cis} \theta.$$

OBSERVACIÓN. Una propiedad interesante es que al teorema (1.7) le podemos añadir la fórmula de Euler y obtener que

$$\left(e^{i\theta} \right)^n = e^{in\theta}.$$

Una propiedad interesante que muestra la definición (14) es:

$$\begin{aligned}\overline{e^{i\theta}} &= \overline{\operatorname{cis}\theta}\\ &= \cos(\theta) - i\sin\theta\\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\\ &= e^{-i\theta}\\ &= \left(e^{i\theta}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

También tenemos una propiedad muy útil con la multiplicación

$$\operatorname{cis}(\theta)\operatorname{cis}(\lambda) = \operatorname{cis}(\theta+\lambda).$$

Noten que tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\operatorname{cis}(\theta)\operatorname{cis}(\lambda) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\lambda + i\sin\lambda)\\ &= (cos(\theta)\cos(\lambda) - \sin(\theta)\sin(\lambda)) + i(\sin(\theta)\cos(\lambda) + \sin(\lambda)\cos(\theta))\\ &= \cos(\theta+\lambda) + i\sin(\theta+\lambda)\\ &= \operatorname{cis}(\theta+\lambda).\end{aligned}$$

Si $n \in \mathbb{Z}^*$, ¿existe algún $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$?

Para responder a esta pregunta tomamos como referencia la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.15: **Raíz $n-$ésima de $z \in \mathbb{C}$**

*Para todo $n \in \mathbb{Z}^*$ con $n \geq 2$ y para todo $z \in \mathbb{C}$. Definimos a la **raíz** $n-$**ésima** de z como*

$$w = z^{\frac{1}{n}}.$$

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que cumplen con la definición (15). Si los expresamos en su forma polar, tenemos que

$$w = |w|\operatorname{cis}\theta \qquad \text{y} \qquad z = |z|\operatorname{cis}\lambda,$$

con $\theta \in \arg(w)$ y $\lambda) \in \arg(z)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}z &= w^n\\ &= |w|^n(\operatorname{cis}(\theta))^n\\ &= |w|^n\operatorname{cis}(n\theta)\\ &= |z|\operatorname{cis}(\lambda)\end{aligned}$$

De esto, podemos concluir dos cosas:

1. $|w|^n = |z|$ y
2. $n\theta \equiv \lambda \pmod{2\pi}$.

Nótese que $|z|, |w| \in \mathbb{R}$. Así, se tiene que

$$|w| = |z|^{\frac{1}{n}}.$$

Ahora, lo segundo es equivalente a decir que existe un $k_0 \in \mathbb{Z}^*$ tal que

$$n\theta = \lambda + 2\pi k_0.$$

Como $\lambda \in \arg(z)$ implica que existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\lambda = \operatorname{Arg}(z) + 2k_0\pi,$$

de lo que se sigue

$$n\theta = \operatorname{Arg}(z) + 2(k_0 + k_1)\pi$$

y

$$\theta = \frac{\operatorname{Arg}(z) + 2(k_0 + k_1)\pi}{n}.$$

Si tomemos a $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(k_0 + k_1) = k$, se tiene que

$$\theta = \frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}.$$

Así, tenemos que

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right),$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Sea

$$w_k := |z|^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right),$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Notemos que $w_1, 2_2, \ldots, w_{n-1}$ son distintos entre sí. A $w_1, 2_2, \ldots, w_{n-1}$ los llamamos las n raíces distintas de z. Así, sea $m \in \mathbb{N}$ y definamos a $k = n + m$. Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\operatorname{cis}\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2\pi k}{n}\right) &= \exp\left(i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2\pi k}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{i\left(\operatorname{Arg}(z) + 2\pi n + 2\pi m\right)}{n}\right) \\
&= \exp\left(i\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2\pi m}{n} + 2\pi\right)\right) \\
&= \exp\left(i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2\pi m}{n}\right)\right) \\
&= \operatorname{cis}\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2\pi m}{n}\right).
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.16: Potenciación de números complejos

Para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$w = z^n.$$

Decimos la potencia n-ésima *y la notamos como z^n.*

En el siguiente folleto definiremos una potenciación más general.

Como podemos notar esta definición es similar a la definición (15), por tal motivo la idea que tenemos es de que la unicidad no se cumple. Vamos a demostrar la unicidad de w.

Así, supongamos que existen w_1 y w_2 que cumplen con la definición (16),

$$\begin{aligned} w_1 &= |w_1| \exp\left(i \operatorname{Arg}(w_1)\right) = z^n \\ w_2 &= |w_2| \exp\left(i \operatorname{Arg}(w_2)\right) = z^n, \end{aligned}$$

de esto tenemos que

$$|w_1| = |z| = |w_2|$$

y

$$\operatorname{Arg}(w_1) = n \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w_2).$$

De esto tenemos que

$$\exp\left(i \operatorname{Arg}(w_1)\right) = \exp\left(i \operatorname{Arg}(w_2)\right),$$

y así tenemos quex

$$w_1 = w_2.$$

LEMA 1.8. Todas las raíces n-ésimas tienen el mismo módulo $|z|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración. Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ con $n \geq 2$. Así, existen $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{C}$ tales que son las n raíces distintas de $z^{\frac{1}{n}}$, donde

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i \frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right),$$

para cualquier $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Ahora, para cualquier $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |w_k| &= \left| |z|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i \frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right) \right| \\ &= \left| |z|^{\frac{1}{n}} \right| \cdot \left| \exp\left(i \frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right) \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \left| \cos\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right) \right| \\
&= |z|^{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{\cos^2\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}\right)} \\
&= |z|^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

Podemos concluir que las raíces n-ésimas tiene el mismo módulo

$$|z|^{\frac{1}{n}}.$$

□

Observación. ¿Existe algún $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^n = z$?

La respuesta es afirmativa, Procedamos a demostrar este resultado.

Así, como a z y w se los puede expresar de la forma

$$
\begin{aligned}
w &= |w| e^{i \operatorname{Arg}(w)} \\
z &= |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)},
\end{aligned}
$$

así, tenemos que

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i \dfrac{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi}{n}}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Y lo representaremos de la forma

$$w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}.$$

Observación. Si tratamos a 1 como un número real tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se cumple que

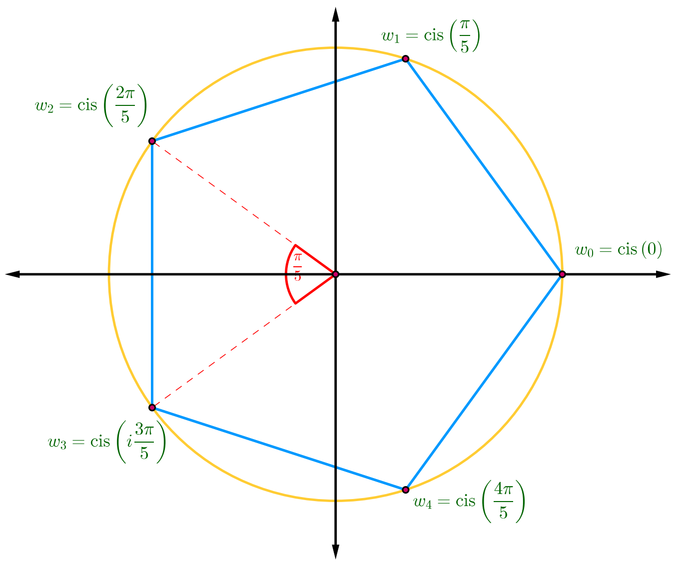
$$1^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Pero si lo tratamos como un número complejo, tenemos que

$$
\begin{aligned}
1^{\frac{1}{n}} &= \exp\left(i\left(\frac{\operatorname{Arg}(1) + 2k\pi}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Es decir, el número complejo 1 tiene n raíces distintas.

Notemos que las raíces del complejo 1 forman un polígono de n lados iguales, es decir, un polígono regular. Para $n = 5$ tenemos el siguiente polígono:



Se deja como ejercicio para el lector la verificación de $w_0, \ldots, w_4$ son las raíces quintas de la unidad.

DEFINICIÓN 1.17

Se dice que $a, b \in \mathbb{Z}^*$ son coprimos *si el máximo común divisor entre* a *y* b *es 1, es decir, si*

$$\gcd(a, b) = 1.$$

PROPOSICIÓN 1.9. Para todo $m, n \in \mathbb{N}^*$ tales que $\gcd(m, n) = 1$ y para todo $z \in \mathbb{C}$. Existe $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$w^{\frac{m}{n}} = z.$$

Noten que, si m y n no son coprimos, entonces tienen al menos un factor en común. Así, supongamos que existen $p, q, s \in \mathbb{Z}$ tales que $m = p \cdot s$ y $n = q \cdot s$, con esto se tiene que

$$\frac{m}{n} = \frac{p \cdot s}{q \cdot s} = \frac{p}{q},$$

con esto tenemos que

$$z^{\frac{m}{n}} = z^{\frac{p}{q}}. \tag{1.23}$$

En la proposición anterior utilizamos números coprimos por facilidad y evitar caer en redundancia, pues noten que en la ecuación (1.1) se redujo a operar una potencia con p y q coprimos.

La demostración de esta proposición es muy sencilla pues, notemos que

$$\left(w^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

representa sacar las raíces $n-$ésimas de w y a estas elevarlas a la potencia m. De igual manera, la expresión

$$(w^m)^{\frac{1}{n}}$$

significa que debemos calcular las raíces $n-$ésimas del número w^m.

EJEMPLO 1.6. Halle el conjunto de los $z \in \mathbb{C}$ que cumpla con la expresión

$$\mathrm{Re}\left(z^2\right) = |\sqrt{3} - i|$$

y grafíquelo.

Solución. Supongamos que $z = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}$ son desconocidos. Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left((x+iy)^2\right) &= \mathrm{Re}\left(x^2 + 2ixy - y^2\right)\\ &= x^2 - y^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, calculando el módulo del número $\sqrt{3} - i$, tenemos que

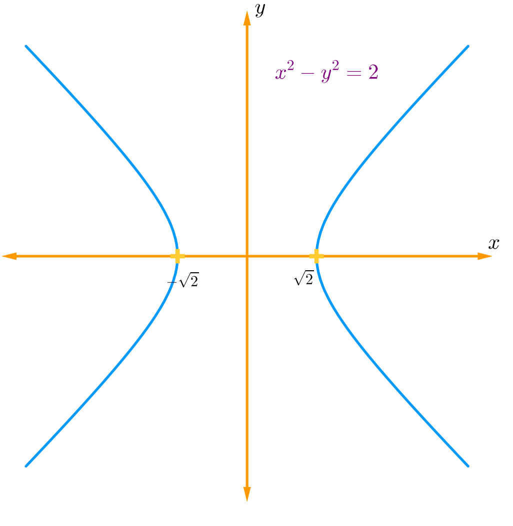
$$|\sqrt{3} - i| = 2.$$

Con lo que obtenemos que el conjunto

$$S := \{z = x + iy : \ x^2 - y^2 = 2\}$$

es la solución a esta ecuación.

Y el gráfico del conjunto S es el siguiente:



□

EJERCICIO 1.4.

1. *a*) Verifique que para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ se tiene que

$$1 + z^2 + \cdot + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

   b) Use lo del literal anterior para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})\theta\right)}{2\sin(\frac{\theta}{2})}, \quad \text{con } 0 < \theta < 2\pi$$

   y

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \text{con } 0 < \theta < 2\pi.$$

2. Muestre que la suma de las raíces $n-$ésimas de la unidad es cero, es decir,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right) = 0.$$

3. Resolver la ecuación

$$az^2 + bz + c = 0,$$

   donde $a, b, c \in \mathbb{C}$.

4. Resolver la ecuación

$$z^4 + (1 + i)z^2 + 5i = 0.$$

5. Si $z = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$, calcular el valor de

$$|e^{iz}|.$$

6. Sea $z \in \mathbb{C}$ ¿Bajo qué condiciones sobre z es posible encontrar un $n \in \mathbb{Z}^*$ tal que $z^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

7. Bajos las condiciones del literal anterior, deduzca si existe $n \in \mathbb{Z}^*$ tal que $(\frac{1}{2} - i)^n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ¿Qué pasa con el caso $(-1 + i)^n = i$?

8. ¿Es posible encontrar un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^n = -1$?

Funciones complejas, límites y continuidad

Definición 2.1

De forma general, una función compleja es una función $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, donde D es un dominio abierto.

Definición 2.2: Dominio

Decimos que D es un dominio *si D es abierto y conexo.*

Definición 2.3: Función simple

A una función $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que para todo $z \in D$ existe un $w \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = w$$

la llamamos univaluada *o* de simple evaluación.

Ejemplo 2.1. La función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^2 + (3i)z. \end{aligned}$$

es una función de simple evaluación, pues es la suma de funciones univaluadas.

$(3i)z$ es una función univaluada, pues a cada $z \in \mathbb{C}$ le corresponde un $w = (3i)z \in \mathbb{C}$, además la función z^2 también es una función univaluada por la definición (2).

Definición 2.4: Función $n-$valuada

A una función $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que para todo $z \in D$ existen $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ siendo $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$ cumple con lo siguiente

$$f(z) = w_1 \qquad f(z) = w_2 \qquad \cdot \qquad f(z) = w_n$$

la llamamos multivaluada n veces *o simplemente* $n-$valuada.

EJEMPLO 2.2. La función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

es multivaluada, pues notemos que $z^{\frac{1}{n}}$ por la definición (15) tiene n valores diferentes.

DEFINICIÓN 2.5

Se dice que la función $f\colon D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es sw ∞ variaición *o $\infty-$*variación *si para todo $z \in D$ existen $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$f(z) = w_n, \qquad \textit{para } n \in \mathbb{N}.$$

EJEMPLO 2.3. La función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \arg(z) \end{aligned}$$

por definición es de $\infty-$variación.

Cabe recalcar que el domino y la imagen de una función $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la definimos de la misma manera que una función real.

OBSERVACIÓN.

1. f multivaluada y f $\infty-$valuada no son funciones matemáticas. Sin embargo en análisis complejo se suele utilizar la denominación de función.

2. En el presente curso vamos a estudiar funciones univaluadas, pues si una función f es $n-$valuada se la puede dividir en n funciones univaluadas.

Si consideramos a z en su forma binomial, es decir, $z = x + iy$ podemos separar a una función $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y).$$

DEFINICIÓN 2.6

Sea $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja, definimos la parte real de f como

$$\mathrm{Re}(f) = u(x,y)$$

y a su parte imaginaria como

$$\mathrm{Im}(f) = v(x,y).$$

Si z se encuentra expresada en su forma binomial, a la una función f compleja la podemos ver como un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$, así

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto \Big(u(x,y), v(x,y)\Big). \end{aligned}$$

Observación. Si f es Fréchet-diferenciable, implica que f tiene todas sus derivadas direccionales. Además también implica que exista su matriz Jacobiana definida por

$$\mathcal{D}f(x.y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

y lo anterior no representa la derivada de una función compleja.

Una función compleja realiza una extensión natural de una función real, es decir,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \xrightarrow[\text{natural}]{\text{extensión}} \begin{array}{rccc} \overline{f}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

esto es gracias a que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, así a la función f la podemos extender a todo $\mathbb{C}$.

Por otro lado, como a una función compleja la podemos ver como un campo vectorial tenemos que

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rccc} \overline{f}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) \end{array}$$

la cual tiene ciertas propiedades del campo vectorial, aunque a la función copleja se la puede manipular con mayor facilidad.

Básicamente una función compleja tiene mejores propiedades que una función real o que un campo vectorial.

Observación. A esta función f se la puede ver como una función intermedia entre funciones complejas y campos vectoriales.

Ejemplo 2.4. Calcule los campos escalares de la función $f(z) = z^3$, es decir, calcule las funciones u y v.

Expresemos a z en su forma binomial, así tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \\ f(x,y) &= (x+iy)^3 \\ &= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \\ &= \underbrace{(x^3 - 3xy^2)}_{=u(x,y)} + i\underbrace{(3x^2y - y^3)}_{=v(x,y)}. \end{aligned}$$

Con lo cual podemos expresar a f como

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Funciones elementales complejas

DEFINICIÓN 2.7: Funciones polinomiales

Son las funciones que se pueden expresar como combinación lineal de potencias de z tales que sus potencias sean enteros no negativos. Así

$$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j,$$

donde $a_j \in \mathbb{C}$ para cada $j = 1, 2, \cdots, n$.

Notemos también que el dominio de estas funciones es todo los complejos,es decir,

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{C}.$$

EJEMPLO 2.5. Verifiquemos si $f(z) = f(x, y) = (x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$ es una función polinomial.

Utilizemos el cambio de variable

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}$$
$$y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

así, obtenemos que

$$f(z) = z\overline{z} + i\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\overline{z}^2$$

Notemos por la definición (7) tenemos que esta función f no lo es, pues contiene como combinación lineal las expresiones $z\overline{z}$ y $\overline{z}^2$.

DEFINICIÓN 2.8: Funciones racionales

Una función racional la definiremos como el cociente de dos funciones racionales, es decir, sean $p(z)$ y $q(z)$ dos funciones polinomiales tales que

$$p(z)R = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$
$$yq(z) = \sum_{j=0}^{m} b_j z^j.$$

La función

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

es una función racional.

Notemos que el dominio de una función racional es todos los complejos, menos los punto s en el qu su denominador sea cero, así

$$\operatorname{dom}(f) = \mathbb{C} \setminus \{z |\, q(z) = 0\}.$$

DEFINICIÓN 2.9: Funciones exponenciales

Por extensión natural definimos a la función exponencial en los complejos como: para todo $z \in \mathbb{C}$ expresado en su forma binomial

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Notemos que el dominio de la función exponencial es todos los complejos.

PROPOSICIÓN 2.1. Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ expresados en su forma binomial. Para la función exponencial tenemos las siguientes propiedades:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
2. $|e^z| = \left|e^{\operatorname{Re}(z)}\right| = |e^x|$.
3. $\arg(e^z) = \imath(z)$.
4. $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2\pi k i,\, k \in \mathbb{Z}$.
5. $e^{-z} = (e^z)^{-1} = \frac{1}{e^z}$.
6. e es periódico, con periodicidad $2\pi i$.
7. Sea $n \in \mathbb{Z}$,entonces tenemos que $(e^z)^n = e^{nz}$.

Demostración. Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ expresados en su forma binomial. Así, tenemos que

1. Por la la definición (9) tenemos que

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} \cdot e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\Big((\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1)\Big) \\ &= e^{x_1+x_2}(\operatorname{cis}(y_1+y_2)) \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

2. Al igual que los demás items, por la definición (9) tenemos que

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^x(\cos y + i \sin y)| \\ &= |e^x|\,|(\cos y + i \sin y)| \\ &= \left|e^{\operatorname{Re}(z)}\right| \end{aligned}$$

$$= |e^x|.$$

3. Notemos que para todo $a \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\arg(a \cdot z) = \arg(z).$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \arg\Big(e^x(\cos y + i\sin y)\Big) &= \arg(\cos y + i\sin y) \\ &= \arg(z). \end{aligned}$$

4. Supongamos que $e^z = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} e^z = 1 &\iff e^x(\cos y + i\sin y) = 1 \\ &\iff \sin y = 0 \text{ y } e^x\cos y = 1 \\ &\iff y = 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ y } e^x = 1. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} (e^z)^{-1} &= \Big(e^x(\operatorname{cis} y)\Big)^{-1} \\ &= e^{-x}\Big(\operatorname{cis}(-y)\Big) \\ &= e^{-z}. \end{aligned}$$

6. Sea $\tau \in \mathbb{C}$, tal que

$$e^{z+\tau} = e^z.$$

Así, tenemos por la definición (9) que

$$e^{z+\tau} = e^{x+\mathrm{Re}(\tau)}\Big(\operatorname{cis}(y + \mathrm{Im}(\tau))\Big)$$

Si esto igualamos a e^z obtenemos que

$$e^x(\operatorname{cis} y) = e^{x+\mathrm{Re}(\tau)}\Big(\operatorname{cis}(y + \mathrm{Im}(\tau))\Big),$$

de lo que podemos concluir que

$$e^x = e^{x+\mathrm{Re}(\tau)},$$

es decir, τ es un imaginario puro. Y

$$\operatorname{cis}(y + \mathrm{Im}(\tau)) = \operatorname{cis} y,$$

es decir, $\mathrm{Im}(\tau) = 2\pi$ o lo que es lo mismo

$$\tau = 2i\pi.$$

7. Esta demostración es similar a la del teorema (1.7).

□

Como una función compleja es la extensión natural de una real ¿esta tiene las mismas propiedades?

Para responder a esta pregunta tomemos en cuenta a la función Exponencial. Como bien lo sabemos en los reales esta función es inyectiva, mientras que en los complejos no, pues es una función con periodicidad $\tau = 2i\pi$. Por otro lado, mientras que en los reales se tiene que para cualquier x $e^x > 0$, en su extensión natural a los complejos no necesariamente se cumple pues existe al menos un z en los complejos tale que $e^z < 0$.[1]

Una función trigonométrica compleja es una extensión natural de una función trigonométrica real.

Por la fórmula de Euler sabemos que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{2.1}$$

además

$$\begin{aligned} e^{-iz} &= \cos(-z) + i\sin(-z) \\ &= \cos z - i \sin z. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sumando las ecuaciones (2.1) y (2.2) obtenemos

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

para todo x en los reales. Mientras que si restamos la ecuación (2.1) de la ecuación (2.2) obtenemos

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

para todo x en los*lso* reales.

Con lo anterior podemos definir a las funciones Seno y Coseno en los complejos.

DEFINICIÓN 2.10: Funciones trigonométricas

De acuerdo a lo anterior definimos para todo z en los complejos

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

y

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Como sabemos las funciones Seno y Coseno en los reales están acotadas, pero en los complejos esto no sucede así y es sencillo verlo pues por definición en los reales la función

[1]Siempre y cuando e^z sea un real.

Exponencial no se encuentra acotada.

PROPOSICIÓN 2.2. Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

1. La función Coseno es par, mientras que la función Seno es impar.
2. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
3. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) \pm \sin(z_2)\cos(z_1)$.
4. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) \mp \sin(z_1)\sin(z_2)$.

Demostración. □

OBSERVACIÓN. El resto de funciones trigonométricas se definen de igual manera que en los reales. Por ejemplo

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

EJEMPLO 2.6. Encuentre el dominio de la función Tangente en los complejo.

Es sencillo ver que

$$\operatorname{dom}(\tan z) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} |\ \cos z = 0\},$$

así tenemos la siguiente cadena de equivalencias

$$\begin{aligned}
\cos z = 0 &\iff e^{iz} + e^{-iz} = 0 \\
&\iff e^{-y}\Big(\cos x + i\sin x\Big) + e^{y}\Big(\cos x - i\sin x\Big) \\
&\iff (e^{-y} + e^{y})\cos x = 0 \ \wedge\ (e^{-y} - e^{y})\sin x = 0 \\
&\iff x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z} \ \wedge\ y = 0.
\end{aligned}$$

De lo cual podemos concluir que

$$\operatorname{dom}(\tan z) = \mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} |\ z = \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En las funciones conocemos que para cualquier $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

y

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

DEFINICIÓN 2.11: Funciones trigonométricas hiperbólicas

Para $z \in \mathbb{C}$ definimos al Coseno Hiperbólico como

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

y al Seno Hiperbólico como

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

PROPOSICIÓN 2.3. Para $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tenemos las siguientes propiedades:

1. Coseno Hiperbólico es una función par y Seno Hiperbólico es una función impar.
2. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
3. $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) \pm \sinh(z_2)\cosh(z_1)$.
4. $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) \pm \sinh(z_1)\sinh(z_2)$.

Demostración. □

Podemos relacionar a las funciones trigonométricas con las hiperbólicas de la siguiente manera:

$$\cos(iz) = \cosh z$$
$$\sin(iz) = i\sinh(z).$$

OBSERVACIÓN. Al igual que en los reales, el resto de funciones hiperbólicas se definen de igual manera.

Sabemos que en los reales la función Logaritmo natural es la función inversa a la Exponencial, es decir, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^y = x,$$

donde

$$y = \ln x.$$

En el caso complejo la función Logaritmo Natural será la "función multivaluada inversa" de la función Exponencial $e^w = z$.

Supongamos que existe $w \in \mathbb{C}$ expresado en su forma binomial como $w = u + iv$ tal que

$$e^w = z.$$

De lo anterior podemos ver claramente que

$$|z| = |e^w| = e^u.$$

como pueden observar esta exponencial es una función real, así

$$u = \ln|z|.$$

Por otro lado tenemos que

$$\arg(z) = \arg\left(e^{w}\right) = \operatorname{Im}(w) = v,$$

es decir,

$$\arg(z) = v.$$

De lo cuál podemos ver que

$$w = u + iv = \ln(|z|) + i\arg(z),$$

si tomamos a lo anterior como

$$\ln z = \ln(|z|) + i\arg(z)$$

hemos obtenidos la definición de la función Logaritmo en los complejos.

DEFINICIÓN 2.12: Logaritmo Principal

Definamos al Logaritmo Principal como

$$\operatorname{Ln} z = \ln(|z|) + i\operatorname{Arg}(z).$$

PROPOSICIÓN 2.4. Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tenemos las siguientes propiedades:

1. $\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2)$.
2. $\ln(\frac{z_1}{z_2}) = \ln(z_1) - \ln(z_2)$.
3. $n\ln(z) \subsetneq \ln\left(z^n\right)$.

Demostración. Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.

1.
2.
3. Sea $w \in n\ln(z)$, lo que implica que a w lo podemos escribir como

$$w = n\left(\ln|z| + i\operatorname{Arg} z + i2k_0\pi\right)$$

para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Notemos que

$$w = \ln\left(|z^n|\right) + i\left(n\operatorname{Arg}(z) + 2\underbrace{nk_0}_{k_1}\pi\right),$$

donde $k_1 \in \mathbb{Z}$, de lo cuál se sigue que

$$w = \ln\left(|z^n|\right).$$

Por otro lado notemos que un elemento y de $\ln(z^n)$ se escribe de la forma

$$y = \ln(|z^n|) + i(\operatorname{Arg}(z^n) + 2k\pi),$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Recordemos que para $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 2$ se cumple que

$$n \arg(z) \subsetneq \arg(z^n),$$

y se cumple que

$$\operatorname{Arg}(z^n) \equiv n \operatorname{Arg}(z) \pmod{2\pi}. \tag{2.3}$$

Con esta última relación tenemos que

$$y = \ln(|z^n|) + i(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi).$$

Ahora, nósete que w tiene esta forma por lo cuál

$$w \in ln(z^n).$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} n\ln(z) &= n\ln|z| + in\arg(z) \\ &\subseteq \ln|z^n| + i\arg(z^n) \\ &= \ln(z^n). \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 2.13: Potencias Complejas

Sean $z \in \mathbb{C}^*$ y $w \in \mathbb{C}$ una potencia complpeja se define como

$$z^w = e^{w\ln(z)}.$$

Nótese que esta definición también cumple para cualquier $w \in \mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN.

1. Es cierto que $e^{\operatorname{Ln}(z)} = z$. Esto es gracias a que la función Logaritmo principal es univoca.

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Ln}(z)} &= e^{ln|z| + i\arg(z)} \\ &= e^{ln|z|}e^{i\arg(z)} \\ &= |z| \operatorname{cis}\Big(\arg(z)\Big). \end{aligned}$$

2. Mientras que $\operatorname{Ln}(e^z) = z$. Para probarlo daremos un contra ejemplo.

   Así, sea $z \in \mathbb{C}$ expresado en su forma binomial tal que $y > \pi$. Cn esto fijémonos que tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln}(z) &= \ln|e^z| + i\operatorname{Arg}(e^z) & \\
&= \ln(e^x) + i(y + 2\pi k) & \text{con } k \in \mathbb{Z} \\
&= x + i(y + 2\pi k) & \text{con } k \in \mathbb{Z} \\
&= z + i2\pi k & \text{con } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

De lo anterior es fácil ver que

$$\operatorname{Ln}(e^z) \neq z.$$

3. ¿Es cierto que $\operatorname{Ln}(z^w) = w\operatorname{Ln}(z)$? Antes de comenzar a probar si es cierto introduciremos el concepto de Potencia Principal de un número complejo[2]. Es fácil darnos cuenta a partir de la definición (13), que la potencia compleja es ∞ valuada, por ende debe existir la Potencia Principal, y a esta la definimos como

$$Z^w = e^{w\operatorname{Ln} z}.$$

Para comenzar utilizaremos el valor principal de la función Potencia compleja. Así, por definiciones tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln}(Z^w) &= \operatorname{Ln}\left(e^{w\operatorname{Ln} z}\right) \\
&= \ln\left(e^{\operatorname{Re}(w\operatorname{Ln} z)}\right) + i\left(\operatorname{Arg}\left(e^{w\operatorname{Ln} z}\right)\right)
\end{aligned}$$

con $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Arg}\left(e^{w\operatorname{Ln} z}\right) = \operatorname{Im}(w\operatorname{Ln} z) + 2\pi k_0$. Ssí, tenemos que

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re}(w\operatorname{Ln} z) + i\Big(\operatorname{Im}(w\operatorname{Ln} z) + 2\pi k_0\Big) \\
&= w\operatorname{Ln} z + 2i\pi k_0.
\end{aligned}$$

Como puedes ver solo tendríamos la igualdad cuando $k_0 = 0$.

Límites

Como bien sabemos una función compleja se encuentra en la mitad de la transición de una función real a un campo vectorial, pero como bien lo notamos esta tiene mejores propiedades.

Más adelante vamos a notar que calcular un límite complejo es casi igual a calcular un límite en un campo vectorial.

[2]Valor pincipal de la potencia compleja.

Definición 2.14: Límite

Sea $f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función, donde $\mathcal{U}$ es un abierto. Definimos al limite como

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon)$$

o equivalentemente

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Como pueden observar la definición de límite casi no ha cambiado nada de la que conocemos en las reales, salvo que aquí utilizamos el módulo en lugar del valor absoluto. En el curso de Análisis Matemático I verán que esta definición se puede generalizar.

Proposición 2.5. Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función y $z_0 \in \mathbb{C}$ expresado en su forma binomial por $z_0 = x_0 + iy_0$. Si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L,$$

entonces es equivalente a los límites en los campos escalares definidos por

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(L)$$

y

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(L)$$

Demostración. Supongamos que existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Así, sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} 0 < |z - z_0| &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= \|(x, y)^T - (x_0, y_0)^T\| \\ &< \delta_\varepsilon, \end{aligned}$$

es decir,

$$0 < \|(x, y)^T - (x_0, y_0)^T\| < \delta_\varepsilon. \tag{2.4}$$

De manera similar tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(z) - L| &= \left| \mathrm{Re}\left(f(z)\right) + i\,\mathrm{Im}\left(f(z)\right) - \mathrm{Re}(L) - i\,\mathrm{Im}(L) \right| \\
&= \sqrt{\left(\mathrm{Re}\left(f(z)\right) - \mathrm{Re}(L) \right) + \left(\mathrm{Im}\left(f(z)\right) - \mathrm{Im}(L) \right)^2} \\
&= \left\| \left(\mathrm{Re}\left(f(z)\right), \mathrm{Im}\left(f(z)\right) \right)^T - \left(\mathrm{Re}\left(L\right), \mathrm{Im}\left(L\right) \right)^T \right\|,
\end{aligned}$$

de donde podemos ver que

$$\left| \mathrm{Re}\left(f(z)\right) - \mathrm{Re}(L) \right| < \varepsilon \tag{2.5}$$

y

$$\left| \mathrm{Im}\left(f(z)\right) - \mathrm{Im}(L) \right| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Notemos que de las desigualdades (2.4) y (2.5) tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathrm{Re}\left(f(z)\right) = \mathrm{Re}(L).$$

Y de las desigualdades (2.4) y (2.6) tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \mathrm{Im}\left(f(z)\right) = \mathrm{Im}(L).$$

□

OBSERVACIÓN. El limite de una función compleja se puede estudiar como el límite de un campo vectorial, por esto es que toda la teoría que hemos visto en el curso de Análisis Vectorial sirve para la presente sección.

Los límites complejos tienen el mismo comportamiento, las mismas propiedades y las mismas dificultados que los límites en campos vectoriales.

OBSERVACIÓN. Si una función compleja f se encuentra definida sobre una vecindad V_{z_0} de z_0, entonces si $z \in V_{z_0}$ tenemos que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

EJEMPLO 2.7. Halla el límite (si existe) de

$$\lim_{z\to 0} \frac{|z|}{z}.$$

Es fácil ver que la expresión anterior es equivalente a

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{|z|}.$$

Ahora, si expresamos a z en su forma binomial obtendremos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - i \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Tomemos en cuenta la dirección

$$y = x.$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2}\,|x|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}.,\end{aligned}$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por ende este límite no existe.

Límites infinitos y al infinito

La noción de un límite infinito es que mientras más se acerca por medio de la pre-imagen a un cierto número z_0, la imagen en módulo se hará cada vez más grande.

Definición 2.15: Límite infinito

Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función y* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Definimos un* límite infinito *como*

$$(\forall M > 0)(\exists \delta_M > 0)(0 < |z - z_0| < \delta_M \Rightarrow |f(z)| > M)$$

o de manera equivalente

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

La noción de un límite al infinito es que mientras $|z|$ crezca lo suficiente (tienda al infinito) su imagen se irá aproximando a un cierto valor.

Definición 2.16: Límite al infinito

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una función. Definimos un* límite al infinito *como*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M_\varepsilon > 0)(|z| > M \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon)$$

o de manera equivalente

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L.$$

EJEMPLO 2.8. Demuestra que se cumplen los siguientes límites

1. $$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^2} = 0.$$

   Por la definición (16) tenemos que

   $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M_\varepsilon > 0)(|z| > M \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon)$$

   Sea $\varepsilon > 0$, debemos probar la existencia de un $M > 0$ tal que se cumpla la definición anterior.

   Así, supongamos que se cumple

   $$\left|\frac{1}{z^2} - 0\right| < \varepsilon,$$

   si invertimos esta desigualdad tenemos que

   $$|z^2| > \frac{1}{\varepsilon},$$

   ahora, puesto que la función Raíz Cuadrada es creciente tenemos que

   $$|z| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

   Tomando

   $$M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

   se cumple el límite.

2. $$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2} = \infty.$$

   Por la definición (15) tenemos que, para $M > 0$ debemos probar que existe $\delta > 0$ tal que cumple con la definición.

   Así, sea $M > 0$. Supongamos que se cumple que

   $$\left|\frac{1}{z^2}\right| > M,$$

   es fácil ver que esto es equivalente a

   $$|z| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

   Ahora, si tomamos a

   $$\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

   se cumple el límite.

Continuidad

DEFINICIÓN 2.17: Continuidad

Se dice que una función f es continua en $z_0 \in \mathbb{C}$ si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_\varepsilon > 0)(|z - z_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)$$

o equivalente mente, si cumple las tres propiedades siguientes

1. *si f está definida en z_0,*
2. *si existe el límite*
$$\lim_{z \to z_0} f(z),$$
3. *y si*
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Estudiar la continuidad de funciones en $\mathbb{C}$ es lo mismo que estudiar la continuidad de campos vectoriales.

PROPOSICIÓN 2.6. Una función f es continua en z_0 si y sólo si $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(z)$ son continuas en z_0.

La demostración de esta proporción es similar a la de la proposición (2.5).

Ejercicios

EJERCICIO 2.1. 1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^3 = -1$ y $\alpha \neq -1$. Calcular el valor de $\left(\alpha^2(\alpha - 1)^2\right)^{-1}$.

Halle dicho valor sin calcular los valores posibles que puede tener α.

Solución. Se tiene que $\alpha^3 + 1 = 0$, por lo tanto

$$(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0,$$

como $\alpha \neq -1$, tenemos que

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0.$$

Ahora, calculando, tenemos que

$$\left(\alpha^2(\alpha - 1)^2\right)^{-1} = (\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\alpha + 2 + \alpha^2)^{-1} \\
&= (1)^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

   a) $\sinh z = 0$

   b) $e^z = -2$

Solución. *a*) Sea $z \in \mathbb{C}$ expresado en su forma binomial. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\sinh z = 0 &\iff \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \\
&\iff e^z = e^{-z} \\
&\iff e^{2z} = 1 \\
&\iff e^2 \operatorname{cis}(2y) = 1 \\
&\iff e^{2x}\cos(2y) = 1 \text{ y } e^{2x}\sin(2y) = 0.
\end{aligned}
$$

Por ende, si $z = x + iy$ es solución de la ecuación, tenemos que

$$e^{2x}\cos(2y) = 1 \text{ y } e^{2x}\sin(2y) = 0.$$

Como $x \in \mathbb{R}$, sabemos que $e^{2x} > 0$, por lo tanto

$$\cos(2y) > 0 \text{ y } e^{2x}\sin(2y) = 0,$$

de donde obtenemos que $2y = 2\pi k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $y = \pi k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Así, tenemos que

$$e^{2x} = e^{2x}\cos(2\pi k) = e^{2x}\cos(2y) = 1,$$

por lo tanto $x = 0$.

Por ende, todas las soluciones de la ecuación son los números complejos de la forma $z = i\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$.

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ expresado en su forma binomial. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
e^z = -2 &\iff e^x = -2 \\
&\iff e^x \cos y = -2 \text{ y } e^x \sin y = 0
\end{aligned}
$$

como $e^x > 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\iff e^x = 2, \cos y = -1 \text{ y } \sin y = 0$$

Así, tenemos que $x = \ln 2$ y además sabemos que para que

$$\cos y = -1,$$

tenemos que $y = (2k+1)\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, pero para este mismo y obtenemos que

$$\sin y = 0.$$

Así, tenemos las soluciones de la ecuación son de la forma $z = \ln 2 + i(2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$\square$

3. Muestre que:

   a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$

   b) $\cos^4 z + \sin^2 z = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2(2z)$

Solución. *a*) Tomemos $z \in$, ahora por definición sabemos que

$$\sin(2z) = \frac{e^{2zi} - e^{-2zi}}{2i},$$

pero esto lo podemos expresar como

$$\frac{\left(e^{zi} - e^{-iz}\right)\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{2i},$$

y de esto tenemos que

$$\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z).$$

b) Tomemos a $z \in \mathbb{C}$, sabemos que

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

entonces tenemos que

$$\sin^4 z + 2\sin^2 z\cos^2 z + \cos^4 z = 1.$$

Notemos que

$$\sin^2 z\cos^2 = (\sin z\cos z)^2 = \sin^2(2z),$$

por lo cuál obtenemos

$$\cos^4 z + \sin^4 z = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2z).$$

□

4. Muestre que

a) $z^{a+b} \subsetneq z^a \cdot z^b$, para $a, b \in \mathbb{C}$.

b) $(z_1 z_2)^a = {z_1}^a \cdot {z_2}^a$, para $z \in \mathbb{C}$.

Solución. a) Sean $z, a, b \in \mathbb{C}$. Tomemos $w \in z^{a+b}$, tenemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$w = e^{(a+b)(\mathrm{Ln}(z)+2i\pi k)} = e^{a(\mathrm{Ln}(z)+2i\pi k)}e^{b(\mathrm{Ln}(z)+2i\pi k)}.$$

Ahora, dado que $e^{a(\mathrm{Ln}(z)+2i\pi k)} \in z^a$ y $e^{b(\mathrm{Ln}(z)+2i\pi k)} \in z^b$ concluimos que $w \in z^a \cdot z^b$.

Por otro lado, notemos que para $z = e$, $a = i$ y $b = -i$, tenemos que

$$z^{a+b} = e^0 = 1.$$

Pero,

$$z^a = e^{i-k\pi} \qquad \text{com } \kappa \in \mathbb{Z}$$

y

$$z^b = e^{-i2k\pi} \qquad \text{con } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

De esto podemos ver que

$$z^a \cdot z^b = e^{2k\pi},$$

es decir, encontramos un ejemplo en el cuál se puede mostrar la contenencia estricta. Así, concluimos que

$$z^{a+b} \subsetneq z^a \cdot z^b.$$

b) Sean $z_1, z_2, a \in \mathbb{C}$. Tomemos $w \in (z_1 \cdot z_2)^a$, tenemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$w = (z_1 \cdot z_2)^a = e^{a(\ln|z_1 \cdot z2| + i\arg(z_1 z_2))}.$$

Ahora, pro propiedades del Logaritmo natural real, por propiedades del Argumento, tenemos que existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$w = e^{a(\ln|z_1| + \ln|z_2| + i\,\mathrm{Arg}(z_1) + i\,\mathrm{Arg}(z_2) + 2i\pi(k+k_0))},$$

que es lo mismo que

$$w = e^{a(\ln|z_1| + i\,\mathrm{Arg}(z_1) + 2i\pi k)}e^{a(\ln|z_2| + i\,\mathrm{Arg}(z_2) + 2i\pi k_0)}.$$

Como podemos observar, $e^{a(\ln|z_1|+i\operatorname{Arg}(z_1)+2i\pi k)} \in {z_1}^a$ y $e^{a(\ln|z_2|+i\operatorname{Arg}(z_2)+2i\pi k_0)} \in {z_2}^a$, por ende tenemos que

$$(z_1 \cdot z_2)^a \subseteq {z_1}^a \cdot {z_2}^a.$$

Por otro lado, tomemos $w \in {z_1}^a \cdot {z_2}^a$. Así, tenemos que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$w = {z_1}^a \cdot {z_2}^a = e^{a(\ln|z_1|+i\operatorname{Arg}(z_1)+2i\pi k_1)} e^{a(\ln|z_2|+i\operatorname{Arg}(z_2)+2i\pi k_2)},$$

que es lo mismos que

$$w = e^{a(\ln|z_1|+i\operatorname{Arg}(z_1)+2i\pi k_1)+a(\ln|z_2|+i\operatorname{Arg}(z_2)+2i\pi k_2)}$$

y por propiedades de la función Logaritmo y argumento tenemos que existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$w = e^{a(\ln|z_1 \cdot z_2|+i\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2)+i2\pi(k_0+k_1+k_2))},$$

como $k_0 + k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$w = e^{a(\ln(z_1 \cdot 2))},$$

es decir, se cumple que

$${z_1}^a \cdot {z_2}^a \subseteq (z_1 \cdot z_2)^a,$$

que con lo demostrado anteriormente tenemos que

$${z_1}^a \cdot {z_2}^a = (z_1 \cdot z_2)^a.$$

□

5. Encuentre una relación entre los conjuntos $\ln(z^w)$ y $w\ln(z)$.

Solución. Sean $z, w \in \mathbb{C}$ con $z = x + iy$ expresado en su forma binomial. Tomemos a $u \in \ln(z^w)$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que por definición tenemos lo siguiente

$$u = \ln\left|e^{w\ln(z)}\right| + i\operatorname{Arg}\left(e^{w\ln(z)}\right) + i2\pi k,$$

ahora, puesto que existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\operatorname{Arg}(e^{w\ln(z)}) = \operatorname{Im}(w\ln(z)) + i2\pi k_0$$

y además por las definiciones (12) y (13) existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tales que

$$u = w\operatorname{Ln}(z) + i2(k + k_0 + k_1)\pi, \tag{2.7}$$

por lo cuál hemos demostrado que $u \in w \ln(z)$, pues $k + k_0 + k_i \in \mathbb{Z}$.

Ahora, tomemos $v \in w \ln(z)$, entonces existe $l \in \mathbb{Z}$ tal que

$$v = w(\ln |z| + i \operatorname{Arg}(z) + i2l\pi),$$

de donde es sencillo ver que

$$u = w \operatorname{Ln}(z) + w2il\pi. \tag{2.8}$$

Es claro ver las ecuaciones (2.7) y (2.8) solo serán iguales si $w \in \mathbb{Z}$. Así, tenemos que

$$\ln (z^w) \subsetneq w \ln(z).$$

□

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

Diferenciación compleja

Como vimos en la sección anterior, si a una función compleja la vemos como un campo vectorial las propiedades de límites y continuidad son equivalentes. Ahora, la pregunta es ¿Se cumplirá también para la diferenciación?

Para responder a esta pregunta introduciremos la siguiente definición.

Definición 3.1: Diferenciabilidad en $\mathbb{C}$

Para toda función compleja $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con U un abierto y $z_0 \in U$ un punto fijo. Decimos que la función f es diferenciable *en z_0 si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

o equivalentemente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Si el límite existe, la derivada de f en el punto z_0 la denotaremos como $f'(z_0)$.

Puesto que definimos a la diferenciación como un límite dirán que si lo podemos expresar como un campo vectorial, pero esto no es posible, ya que si al límite de la definición anterior lo expresamos como un campo vectorial obtendríamos

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{(x,y) - (x_0,y_0)},$$

pero esto no está bien definido ya que en $\mathbb{R}^2$ la operación de multiplicación no se encuentra definida.

Observación. Se dice que f es diferenciable en $U \subset \mathbb{C}$ si f es diferenciable en cualquier $z \in U$.

Ejemplo 3.1.

1. $f(z) = z_0$, con $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo.
   f es diferenciable en $\mathbb{C}$ y además $f'(z) = 0$.
2. $f(z) = z$. Es diferenciable en todo $\mathbb{C}$ y además $f'(z) = 1$.
3. $f(z) = z^n$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

Es diferenciable en todo $\mathbb{C}$.

Notemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^n - z^h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}z^k h^{n-k} - z^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{k}z^k h^{n-k-1}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(nz^{n-1}+\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n}{k}z^k h^{n-k-1}\right)\\
&= nz^{n-1}.
\end{aligned}$$

4. $f(z)=\overline{z}$ no es diferenciable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

   Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, así

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{\overline{z_0+h}-\overline{z_0}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}
\end{aligned}$$

   el cuál no existe, por ende la derivada no existe.

5. $f(z)=|z|$ no es diferenciable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{|z_0+h|-|z_0|}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|z_0+h|^2-|z_0|^2}{h(|z_0+h|+|z_0|)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\overline{z_0}+\overline{h}z_0+\overline{h}h}{h(|z_0+h|+|z_0|)}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h\overline{z_0}}{h(|z_0+h|+|z_0|)}+\frac{\overline{h}z_0+\overline{h}h}{h(|z_0+h|+|z_0|)}+\frac{\overline{h}h}{h(|z_0+h|+|z_0|)}\right)
\end{aligned}$$

   el cuál no existe, por ende la derivada no existe.

6. $f(z)=|z|^2$ no es diferenciable en ningún punto de $\mathbb{C}^*$, excepto en $z=0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2-|0|}{z-0} &= \lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}\\
&= \lim_{z\to 0}\overline{z}
\end{aligned}$$

el cuál no existe. Ahora, sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{|z_0+h|^2 - |z_0|^2}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{d}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)(\overline{z_0}+\overline{h}) - z_0\overline{z_0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z_0\overline{h} + h\overline{z_0} + h\overline{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(z_0 \frac{\overline{h}}{h} + z_0 + \overline{h} \right)
\end{aligned}$$

el cuál no existe, por ende la derivada no existe.

OBSERVACIÓN. Notemos que el campo vectorial de $f(z) = |z|^2$ es

$$f(x,y) = (x^2+y^2, 0)$$

que es diferenciable.y está dado por

$$\mathcal{D} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

para cualquier $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Como podemos observar la función f compleja no es diferenciable, pero su campo vectorial si lo es. Es decir, si el campo vectorial de una función compleja es diferenciable esto no implica que la función compleja lo sea.

PROPOSICIÓN 3.1. Sean f y g dos funciones complejas.

1. Si f es diferenciable en z_0, entonces f es continua en z_0.
2. Si f y g son diferenciables en z_0, entonces $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ son diferenciables.
3. Si f y g son diferenciables en z_0, además $g(z_0) \neq 0$. Entonces f/g es diferenciable en z_0.
4. Regla de la cadena. Supongamos que $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g\colon B \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donde U y B son abiertos tales que
$$f(U) \subset B$$
y además si f es diferenciable en $z_0 \in U$ y g es diferenciable en $f(z_0) \in B$. Entonces $g \circ f$ es diferenciable en $z_o \in B$ y
$$(g \circ f)'(z) = g'\Big(f(z_0)\Big) g'(z_0).$$

Demostración.

1. Sea f una función diferenciable en z_0. Así, notemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(z+h) - f(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z_0)}{h} \cdot (h)\\ &= f'(z_0)\cdot 0.\end{aligned}$$

   Con esto obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(z_0+h) &= \lim_{hto0} \Big(f(z_0+h)-f(z_0)\Big) - f(z_0)\\ &= 0 + f(z_0)\\ &= f(z_0)\end{aligned}$$

   Ahora, si tomamos $z = z_0 + h$, lo anterior lo podemos expresar como

$$\lim_{z-z_0\to 0} f(z) = f(z_0).$$

   Es decir, f es continua en $z = z_0$.

2. Sean f y g dos funciones diferenciables en z_0, es decir,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

   y

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}.$$

   Ahora,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)+g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0}\end{aligned}$$

   Por ende $f+g$ es diferenciable en z_0, para la resta es de manera similar. Ahora, para la multiplicación.

   Sea $\varepsilon > 0$. Para el producto consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned}|(f\cdot g)(z) - (f\cdot g)(z_0)| &= |f(z)\Big(g(z)-g(z_0)\Big) + g(z_0)\Big(f(z)-f(z_0)\Big)|\\ &\leq |f(z)||g(z)-g(z_0)| + |g(z_0)||f(z)-f(z_0)|\end{aligned} \tag{3.1}$$

   La cantidad $|g(z_0)||f(z)-f(z_0)|$ puede controlarse fácilmente. Dado $\varepsilon > 0$, así tomemos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(|g(z_0)|+1)}$, y sea δ_1. Tenemos que

$$\begin{aligned}&|z-z_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(z_0)||f(z)-f(z_0)| < |g(z_0)|\frac{\varepsilon}{2(|g(z_0)|+1)} < \frac{\varepsilon}{2}\\ &|z-z_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(z)| = |f(z)-f(z_0)+f(z_0)| = |f(z_0)| + \varepsilon_1.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ahora, definamos a $M = |f(z_0)| + \varepsilon_1$, y tomemos a $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M}$ y sea $\delta_2 = \delta_2(\frac{\varepsilon}{2M})$. Luego, definamos $\delta = \{\delta_1, \delta_2\}$. Teniendo en cuenta las desigualdades (3.1) y (3.2), podemos llegar a que

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} |f(z)||g(z) - g(z_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |g(z_0)||f(z) - f(z_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow |(f \cdot g)(z) - (f \cdot g)(z_0)| < \varepsilon.$$

3.

4.

□

Ecuaciones de Cauchy-Riemman

Observación. La idea es buscar una relación entre la diferenciación compleja con la diferenciación en campos vectoriales.

Así, supongamos que $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja y además que sea diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Podemos expresar a la función f en su forma binomial, así

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ahora, como supusimos que f es diferenciable en z_0 por definición tenemos que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\Big(v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) + iv(x_0 + h_1, y_0 + h_2)\Big) - \Big(u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\Big)}{h_1 + ih_2} \end{aligned}$$

con $h = h_1 + ih_2$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - u(x_0, y_0)}{h_1 + ih_2} + i \frac{v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - v(x_0, y_0)}{h_1 + ih_2} \right]$$

Si tomamos en cuenta que para $h_2 = 0$ implica que $h_1 \to 0$ tenemos lo siguiente

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \tag{3.3}$$

Ahora, si tomamos en cambio viceversa obtenemos lo siguiente

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{3.4}$$

Como supusimos que el límite existe, tenemos que las expresiones (3.3) y (3.4) son iguales con lo que obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array}\right. . \tag{3.5}$$

Condición necesaria para la diferenciación

Proposición 3.2. Sea $f\colon U \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja con U un abierto y además f diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Entonces se cumplen las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array}\right. ,$$

llamadas las ecuaciones de Cauchy-Riemman.

Demostración. La demostración es exáctamente similar a lo expresado en la observación anterior. □

Observación. La contra recíproca de la proposición (3.2) es muy útil para demostrar que f no es diferenciable en z_0. O expresado:

Si f no cumple con las ecuaciones (3.5) en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, entonces f no es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$.

Condición suficiente para la diferenciación

Proposición 3.3. Sea $f\colon U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función compleja con U abierto, tal que se puede expresar como

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Si $u, v, \dfrac{\partial u}{x}, \dfrac{\partial u}{y}, \dfrac{\partial v}{x}$ y $\dfrac{\partial v}{y}$ son continuas en (x_0, y_0) y además satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemman en el punto (x_0, y_0) entonces f es diferenciable en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$.

Ejemplo 3.2. Estudiar la diferenciabilidad de la función

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Diferenciabilidad de funciones elementales

OBSERVACIÓN. Una condición necesaria de diferenciabilidad es que la función sea continua. Pues como sabemos, si una función es diferenciable, entonces esta es continua.

OBSERVACIÓN. Para simplificar la escritura de las derivadas parciales no usaremos la notación de Leibniz[1], usaremos la notación de Cauchy

$$f_z,$$

que significa la derivada parcial de f con respecto a z.

Ya introducidos todos los conceptos anteriores, daremos a conocer la diferenciación de las funciones elementales y a su vez el subconjunto en donde se cumple esta propiedad.

EJEMPLO 3.3 (Función exponencial)**.** Notemos que si tomamos a $z \in \mathbb{C}$ expresado en su forma binomial tendremos que

$$f(z) = e^z = e^x\left(\cos y + i \sin y\right).$$

Donde los campos escalares asociados a f son

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

y

$$v(x, y) = e^x \sin y.$$

Es sencillo ver que tanto el campo escalar u como el campo escalar v son continuos en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ahora, sus derivadas parciales están dadas por

$$\begin{array}{ll} u_x = e^x \cos y & u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y & v_y = e^x \cos y \end{array}$$

Las derivadas parciales de los campos escalares u y v son continuas y además cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemman en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por la condición suficiente de diferenciabilidad tenemos que f es diferenciable en todo $\mathbb{C}$ y su derivada viene dada por

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

OBSERVACIÓN. La función $f(z) = e^{az}$, con $a \in \mathbb{C}$ es diferenciable en C y además

$$f'(z) = ae^{az}.$$

EJEMPLO 3.4 (Funciones trigonométricas)**.** Notemos que tanto el Seno como el Coseno se encuentran definidas con la función exponencial, así tenemos que la función Seno es dife-

[1] $\frac{\partial f}{\partial z}$

renciable en todo $z \in \mathbb{C}$ y su derivada está dada por

$$(\sin z)' = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})' = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z.$$

De manera similar, tenemos que la función Coseno es diferenciable en todo $z \in \mathbb{C}$ y su derivada viene dada por

$$(\cos z)' = -\sin z.$$

OBSERVACIÓN. El resto de funciones trigonométricas son diferenciables en sus respectivos dominios.

EJEMPLO 3.5 (Funciones hiperbólicas)**.** Puesto que las funciones hiperbólicas se definen de manera similar que las trigonométricas tenemos lo siguiente:

$$(\sinh z)' = \cosh z \qquad \text{y} \qquad (\cosh z)' = \sinh z,$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$.

EJEMPLO 3.6 (Logaritmo natural principal)**.** Por definición tenemos que para todo $z \in \mathbb{C}^*$ podemos expresar a

$$f(z) = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Observemos que los campos escalares asociados a f son

$$u(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

y

$$v(x, y) = 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

notemos además que hemos tomado a (x, y) en el conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq 0 \wedge y = 0\},$$

en este conjunto u y v son continuos.Pueden probar que el equivalente en $\mathbb{C}$ al conjunto S es el siguiente

$$T = \{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}(z) \leq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0\}.$$

Notemos que para todo $z \in T$ la función f es continua. Esto se lo deja como ejercicio para el lector.

Ahora, veamos las derivadas parciales de los campos escalares u y v.

Para u es sencillo ver que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Mientras que para v no son tan sencillas, veamos su derivada parcial con respecto a x. Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= 2 \cdot \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}} \cdot (-1) \cdot (y) \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} \\
&= \frac{-2y}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+y^2} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{-y}{x^2+x\sqrt{x^2+y^2}+y^2} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{-y}{x^2+y^2},
\end{aligned}$$

por un procedimiento similar podemos obtener que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Notemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

son continuas en S.

Como podrán observar los campos escalares u y v cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemman en $(x, y) \in S$. Y por la condición suficiente de diferenciabilidad f es continua en T, con su derivada f'

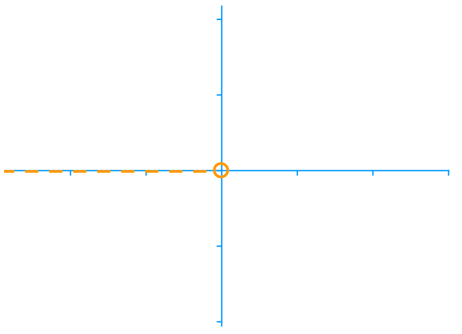
$$f'(z) = \frac{1}{z}.$$

OBSERVACIÓN. El logaritmo natural infinitamente valuado es diferenciable en su dominio. Notaremos como $\ln(z)_{\theta_0}$ a la función univaluada

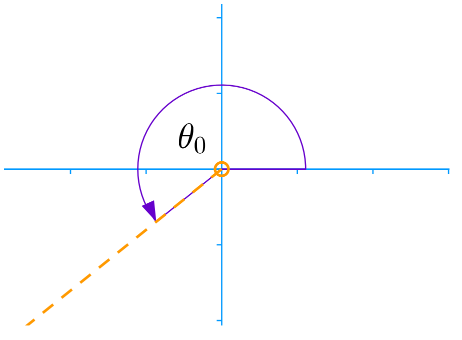
$$\ln(z)_{\theta_0} = \ln|z|\theta,$$

donde $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$, con $\theta_0 \in \arg(z)$.

El siguiente gráfico muestra el dominio donde la función Logaritmo Natural Principal es continua y diferenciable



Mientras que, lo expresado anteriormente si lo mostramos gráficamente es lo siguiente y de igual manera aquí $\ln(z)_{\theta_0}$ es continua y diferenciable



Si consideramos a $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \theta_0 \in \arg(z)\}$, la función $\ln(z)_{\theta_0}$ será diferenciable, y además tendremos que

$$\left(\ln(z)_{\theta_0}\right)' = \frac{1}{z}.$$

Nótese que podemos extender esta propiedad a cualquier θ_0, fijándolo y encontrando el conjunto donde la función Logaritmo es diferenciable.

Funciones Holomorfas

Vamos a introducir una subclase de funciones complejas, que poseen mejores propiedades que las ya vistas. Básicamente nos referimos a las propiedades de diferenciación, integración[2] y poseen un comportamiento que nos permiten obtener resultados sorprendentes en análisis complejo.

Definición 3.2: Función Holomorfa

Para toda función compleja $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in D$. Se dice que f es holomorfa *en el punto z_0 si f es diferenciable en z_0 y existe un $r > 0$ tal que f es diferenciable para todo $z \in B_r(z_0)$.*

[2] Que veremos en el siguiente folleto

DEFINICIÓN 3.3

Para toda función compleja $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y U un abierto. Se dice que f es holomorfa en U *si f es diferenciable en U.*

OBSERVACIÓN. Si $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función diferenciable en U, entonces f es holomorfa en U. La demostración se deja como ejercicio para el lector.[3]

EJEMPLO 3.7.

Coordenadas Conjugadas

Conocemos las coordenadas

$$\begin{array}{cc} (x,y) & \text{cartesianas,} \\ (r,\theta) & \text{polares,} \\ (r,\theta,z) & \text{cilíndricas y} \\ (r,\theta,\varphi) & \text{esféricas.} \end{array}$$

La idea de introducir las Coordenadas Conjugadas es representar una función compleja ya no como un campo vectorial, si no como una función que depende de z y $\overline{z}$.

Tomemos en consideración a $z \in \mathbb{C}$ expresado en su forma binomial, y además los cambios de variable

$$\begin{cases} x &= \dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ y &= \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \end{cases}.$$

DEFINICIÓN 3.4: Coordenadas Conjugadas

Se dice que

$$(z,\overline{z})$$

son las coordendas conjugadas.

Analicemos las derivadas en coordenadas polares. Así, sea f una función compleja diferenciable en un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Consideremos a f una función de (x,y). Tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} f_x &= f_z \cdot z_x + f_{\overline{z}} \cdot \overline{z}_x \\ &= f_z + f_{\overline{z}}, \end{aligned}$$

mientras que

$$f_y = f_z \cdot z_y + f_{\overline{z}} \cdot \overline{z}_y$$

[3] La idea de la demostración va utilizando la definición de conjunto abierto.

$$= i\left(f_z - f_{\overline{z}}\right).$$

De esto podemos ver que

$$f_x = f_z + f_{\overline{z}} \quad \text{y} \quad f_y = i\left(f_z - f_{\overline{z}}\right). \tag{3.6}$$

Notemos que si vemos como operadores a las ecuaciones de (3.6) tenemos lo siguiente

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{\partial}{\partial \overline{z}}. \tag{3.7}$$

De las ecuaciones expresadas en (3.7) podemos ver fácilmente que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{3.8}$$

Puesto que supusimos que f es diferenciable en z_0 tenemos que

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + v_x \\ &= \frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial x}v \\ &= u_z + u_{\overline{z}} + i\left(v_z + v_{\overline{z}}\right) \\ &= \left[u_z + iv_z\right] + \left[u_{\overline{z}} + iv_{\overline{z}}\right] \\ &= f_z + f_{\overline{z}}, \end{aligned}$$

es decir,

$$f'(z) = f_z + f_{\overline{z}}. \tag{3.9}$$

Por otro lado tenemos que

$$f'(z) = f_z - f_{\overline{z}}. \tag{3.10}$$

Igualando las ecuaciones (3.9) y (3.10) tenemos que

$$f_z + f_{\overline{z}} = f_z - f_{\overline{z}},$$

pero notemos que solo obtendremos la igualdad cuando $f_{\overline{z}} = 0$. Con lo cual tenemos las siguientes observaciones.

Observación.

1. Si f es diferenciable en $z \in \mathbb{C}$, entonces $f_{\overline{z}} = 0$.
2. Si f no cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemman en $z_0 \in \mathbb{C}$ implica que f no sea diferenciable en z_0 y esto implica que no sea holomorfa en z_0.
3. Para toda función compleja $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que está expresada en coordenadas conjugadas, si f depende de $\overline{z}$. Entonces f no es holomorfa, pero si puede ser diferenciable.
4. Todas las funciones elementales son holomorfas en su dominio de diferenciabilidad. Estas demostraciones se dejan como ejercicios para el lector.

5. La derivada de una función holomorfa f es

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z} = f_z.$$

PROPOSICIÓN 3.4. Para toda función compleja f. Se dice que es holomorfa en $S \subseteq \mathbb{C}$, si existe un abierto $B \subseteq \mathbb{C}$ tal que $S \subseteq B$ y que f sea holomorfa en B.

La demostración de esta proposición es casi inmediata, pues se deduce de la definición de función holomorfa.

Condición necesaria y suficiente de holomorfía en un punto

PROPOSICIÓN 3.5. Para toda función compleja $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con U un abierto. Si f es holomorfa, entonces f cumple con las condiciones de Cauchy-Riemman.

La demostración es un resultado rápido, pues si una función f es holomorfa implica que esta sea diferenciable en un abierto, lo que implica que cumpla con las ecuaciones de Cauchy-Riemman en ese mismo abierto.

PROPOSICIÓN 3.6. Para toda función compleja $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con U un abierto. Si las derivadas parciales de sus campos escalares existen y son continuas en una isometría $T \subseteq \mathbb{R}^2$ de $U \subseteq \mathbb{C}$ y si además f cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemman en U, entonces f es holomorfa en U.

La demostración de esta proposición se deduce de las definiciones (1) y (2), además de las condiciones suficientes de diferenciabilidad.

Condición necesaria y suficiente de holomorfía en un conjunto

PROPOSICIÓN 3.7. Para toda función compleja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ expresada en coordenadas conjugadas. Si $f_{\overline{z}} = 0$ en un dominio[a] $D \subseteq \mathbb{C}$ y si además f_z existe y es continua en D, entonces f es holomorfa en D.

[a] Ver la definición (2) en el primer folleto.

Demostración. □

PROPOSICIÓN 3.8. Para toda función compleja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ expresada en coordenadas conjugadas. Si $f_{\overline{z}} = 0$ en $z \in S \subseteq \mathbb{C}$ y si además f_z existe y es continua en $z \in S$, entonces f es holomorfa en $z \in S$.

Demostración. □

PROPOSICIÓN 3.9. Para toda función compleja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifica las condiciones de Cauchy-Riemman solamente en el grafo de una función real, entonces f no es holomorfa en todo C.

Demostración. □

DEFINICIÓN 3.5: Función entera

Se dice que una función compleja $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es* entera *si esta es holomorfa en todo* $\mathbb{C}$.

PROPOSICIÓN 3.10. Para todas las funciones holomorfas $f, g\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

1. $f \pm g$ es holomorfa en U,
2. $f \cdot g$ es holomorfa en U,
3. $\frac{f}{g}$ es holomorfa en $U \setminus \{z \in \mathbb{C} : \ g(z) \neq 0\}$ y
4. La composición de funciones holomorfas es holomorfa.

Demostración. □

PROPOSICIÓN 3.11 (Regla de L'Hôpital)**.** Para todas las funciones complejas f y g que son holomorfas en $z_0 \in \mathbb{C}$, con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Entonces tenemos que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Demostración. Sean f y g dos funciones complejas, holomorfas en $z_0 \in \mathbb{C}$ y además $g'(z_o) \neq 0$. Nótese que se tiene las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} \cdot \frac{z - z_0}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{\lim_{z \to z_0} \dfrac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} \\
&= \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.
\end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN. Es interesante ver que a la proposición (3.11) también la podemos utilizar cuando existen las indeterminaciones $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, \infty^0$ y 1^∞. Es decir, estos límites pueden ser tratados como en cálculo real si es que las funciones f y g son holomorfas en z_0.

Funciones Armónicas

DEFINICIÓN 3.6: Función Armónica

Para todo campo escalar real f en $\mathbb{R}^2$, se dice que f es **armónica** *en un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ si f posee derivadas parciales de primer y segundo orden, además estas son continuas y deben satisfacer que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{3.11}$$

Noten que si a la ecuación (3.11) la reescribimos con la notación de Cauchy para derivadas tenemos que

$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Es fácil ver que la ecuación (3.11) puede ser reescrita por un operador lineal aplicado al capo escalar f, así tenemos que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = 0.$$[4]

Noten que a la ecuación (3.11) también se la puede representar como

$$\Delta f = 0,$$

a esta ecuación se la conoce como la *la ecuación de Laplace*.

DEFINICIÓN 3.7

Para toda función $f : Y \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, se dice que f es de **clase** *$\mathcal{C}^2(Y)$ si esta tiene derivadas de primer y segundo orden continuas en Y. Además el conjunto $\mathcal{C}^2(Y)$ está dado por*

$$\mathcal{C}^2 := \Big\{ f : Y \subseteq \mathcal{X} \to \mathcal{X} :\ f \text{ tiene derivadas de primer y segundo orden continuas} \Big\}.$$

TEOREMA 3.12

Para toda función $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con D un dominio, si f es holomorfa, entonces f' es holomorfa en D.

[4] Al operador $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ se lo llama operador de Laplace o Laplaciano y se lo nota como Δ.

La demostración de este teorema queda pendiente para el próximo folleto, es introducido pues se lo necesita para la demostración de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.13. Para toda función f holomorfa en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, si a f la podemos representar como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces los campos escalares u y v son armónicos en el un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ que es isomorfo a D.

Demostración. Sea $f\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en un dominio D, además si a f la podemos representar como $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con u y v campos escalares de $S \subseteq \mathbb{R}^2$ donde S es un conjunto isomorfo al dominio D. Debemos probar que $u, v \in \mathcal{C}^2(S)$ y además para cualquier $(x, y) \in S$ que el Laplaciano de u y el Laplaciano de v son iguales a cero.

Como f es holomorfa en D, tenemos que los campos escalares u y v son continuos, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemman y además sabemos que sus derivadas parciales son continuas en S. Con esto podemos ver que $u, v \in \mathcal{C}^1(S)$. Ahora, tenemos que

$$u_x = v_y \tag{3.12}$$

y

$$u_y = -v_x. \tag{3.13}$$

Recordemos que para todo $z \in D$ a $f'(z)$ lo podemos representar como

$$f'(z) = u_x + iv_x.$$

Ahora, utilizando el teorema (3.12) obtenemos que f' es holomorfa en el dominio D, con esto tenemos que sus campos escalares u_x y v_x son continuos en todo S, además sus derivadas parciales son continuas también en S. Noten que otra manera de representar a $f'(z)$ es $f'(z) = v_y - iu_y$, así tenemos que las derivadas parciales de los campos escalares v_y y u_y son continuas en todo S. Como las derivadas parciales de primer y segundo orden de u y v son continuas en S, tenemos que $u, v \in \mathcal{C}^2(S)$.

Por otro lado, notemos que al derivar la ecuación (3.12) con respecto a x tenemos que

$$u_{xx} = v_{xy} \tag{3.14}$$

y si derivamos la ecuación (3.13) con respecto a y obtenemos que

$$u_{yy} = -v_{yx}. \tag{3.15}$$

Ahora, si sumamos las ecuaciones (3.14) y (3.15) obtenemos lo siguiente

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{yx}.$$

ahora, por un resultado de Análisis Vectorial tenemos que si un campo escalar en $T \subseteq \mathbb{R}^2$ es de clase $\mathcal{C}^2(T)$ sus segundas derivadas parciales mixtas son iguales. Puesto que $v \in \mathcal{C}^2(S)$, se tiene que $v_{xy} = v_{yx}$ y con esto tenemos que

$$\Delta u = 0.$$

La demostración de que $\Delta v = 0$, es similar a esta. $\square$

Armónica Conjugada

DEFINICIÓN 3.8

Para todo campo escalar armónico u en un conjunto isomorfo $s \subseteq \mathbb{R}^2$ de un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Se dice que v es **armónico conjugado** *de u si v es armónico en S y además la función f definida por*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

es holomorfa en D.

OBSERVACIÓN. Si u y v son campos escalares armónicos en $S \subseteq \mathbb{C}$, esto no necesariamente implica que la función $f(z)$ definida por $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ isomorfo a S. Lo mostraremos con un contra ejemplo, tomemos los campos escalares $u(x, y) = x$ y $v(x, y) = -y$, notemos que $u, v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, además $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$, pero la función compleja definida por

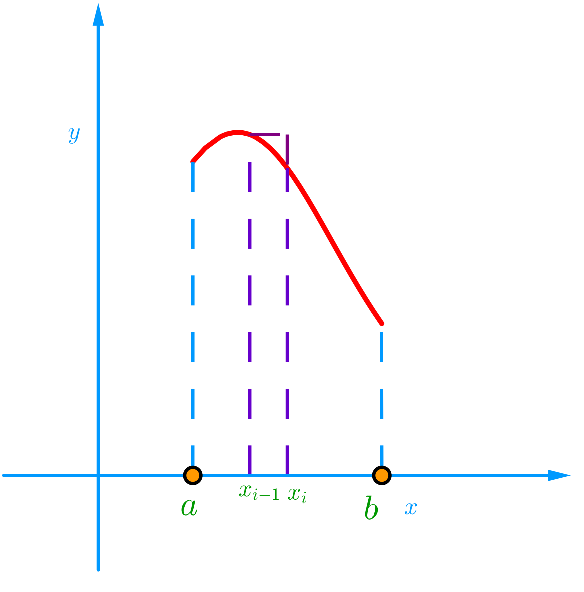
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x - iy = \overline{z}$$

no es holomorfa en ningún punto de $\mathbb{C}$.

INTEGRACIÓN COMPLEJA

En Cálculo Real, la noción de integral es el área bajo la curva. Para toda función $f\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definíamos lo siguiente

- P es una partición de $[a,b]$, con $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$,
- n intervalos y
- la longitud del intervalo, que en la suma de Riemman utilizábamos una longitud $h = \frac{b-a}{n}$, notemos que esta longitud h es homogénea, sin embargo podemos tomar longitudes heterogéneas.



Además, definiremos medida de la partición como el máximo entre las variaciones de x_{i-1} y x_i que es Δx_i, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y lo denotaremos por $\|P\|$. Con esto obtenemos que la medida de la longitud está dada por $\|P\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$.

Cuando aproximamos una integral con sumas de Riemman tomamos un $x_i{}^* \in [x_{i-1}, x_1]$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Con lo que obtenemos que

$$S_R^n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x_i,$$

como lo vimos en Cálculo Real, con esto podemos aproximar a la integral de f mediante

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x_i.$$

Por otro lado, Para la aproximación de la integral con la definición de Darboux definimos a $M_i = \max\{f(x_{i-1}), f(x_i)\}$, para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Con lo cuál obtenemos que la aproximación de la integral por medio de la definición de Darboux es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Sería ideal si estas definiciones se pudieran extender a todas las funciones complejas, pero no es así.

Ahora, consideremos una función compleja $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y sean $z_1, z_2 \in \Omega$. Tenemos dos dificultados si introducimos a la integral de f desde z_1 hasta z_2, o visto de otra manera $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$.

1. Perdemos la noción de área bajo la curva, pues si recordamos $\mathbb{C}$ puede ser visto como un espacio vectorial de dimensión 2 y
2. podemos notar que la integral depende del camino que tomemos, pues existen infinitos caminos(curvas o contornos) en Ω que unen a los puntos z_1 con z_2.

Integral de contorno

Para llegar a definir la integral compleja, vamos a empezar definiendo la integral sobre una curva. En esta sección nos dedicaremos a conocer las curvas de integración y a estudiar su parametrización. Para esto introduciremos algunos conceptos previos.

DEFINICIÓN 4.1: Parametrización

Una **parametrización** α *entre los conjuntos* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *y* $C \subseteq \mathbb{C}$ *se puede representar como una función continua tal que*

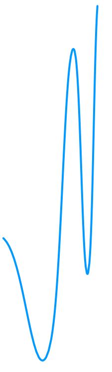
$$\begin{aligned} \alpha\colon [a, b] &\longrightarrow C \\ t &\longmapsto \alpha(t) = \alpha_1(t) + i\alpha_2(t). \end{aligned}$$

A partir de la definición (1) vamos a considerar la parametrización de cualquier curva $C \subseteq \mathbb{C}$ como la función $z(t) = x(t) + iy(t)$.

DEFINICIÓN 4.2: Curva Simple

Decimos que una curva C *es* **simple** *si no se cruza a sí misma.*

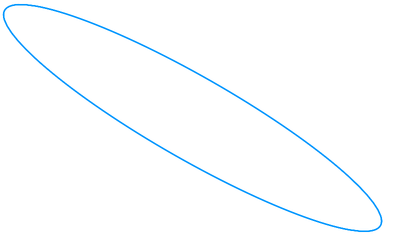
EJEMPLO 4.1. Un ejemplo de curva simple es la siguiente



DEFINICIÓN 4.3: Curva Cerrada

Decimos que una curva C es **cerrada** *si su extremo inicial es el mismo que el final.*

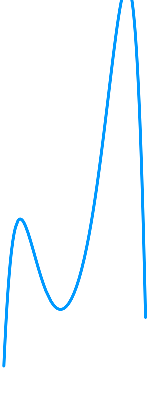
EJEMPLO 4.2. Un ejemplo de curva cerrada es la siguiente



DEFINICIÓN 4.4: Curva Suave

Decimos que una curva C donde su parametrización es $z(t) = x(t) + i(t)$ con $t \in [a, b]$, es **suave** *si $x, y \in \mathcal{C}^1([a, b])$.*

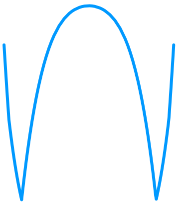
EJEMPLO 4.3. Un ejemplo de curva suave es la siguiente



DEFINICIÓN 4.5: Curva Suave a trozos

Decimos que una curva C es **suave a trozos***, si C es suave excepto en un número finito de puntos de C donde la derivada de x o y no existe.*

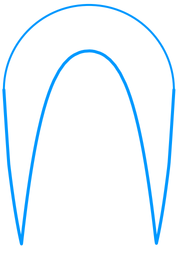
EJEMPLO 4.4. Un ejemplo de curva suave a trozos es la siguiente



DEFINICIÓN 4.6: Curva de Jordan

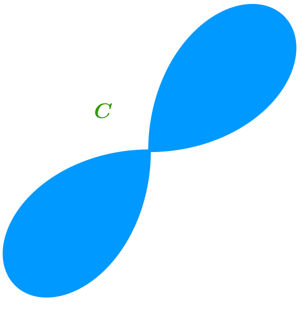
Decimos que una curva C es de **Jordan***, si esta es simple, cerrada y suave a trozos.*

EJEMPLO 4.5. Un ejemplo de curva de Jordan es la siguiente



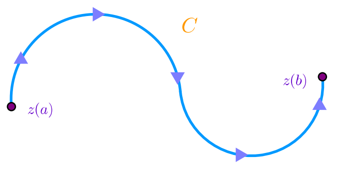
Orientación de contornos

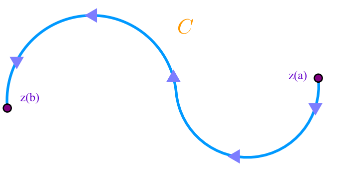
Si C es un contorno cerrado. La orientación positiva está dada por el sentido antihorario, esto se dá cuando la curva es simple.



Cuando la curva C es cerrada, pero no simple. La orientación positiva de la curva viene dada por la persona que resuelve el ejercicio.

En curvas simples, la orientación positiva viene dada por la parametrización de C, es decir, si $z(t) = x(t) + iy(t)$, con $t \in [a, b]$ es una parametrización de C, el sentido positivo viene dado por la dirección en la que t crece.





OBSERVACIÓN. Vamos a trabajar con curvas cuya orientación sea positiva.

Integrales de funciones complejas a variable real

Para esta subsección vamos a considerar a las funciones complejas y continuas

$$\begin{aligned} f\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(t) = u(t) + iv(t). \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 4.7

Definimos a la **integral** *de una función continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ sobre $[a,b]$ como*

$$\int_a^b f\,dt = \int_a^b u\,dt + i\int_a^b v\,dt.$$

PROPOSICIÓN 4.1. Para todas las funciones continuas $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene las siguientes propiedades:

1. $$\int_a^b \alpha f + g\,dt = \alpha\int_a^b f\,dt + \int_a^b g\,dt,$$
2. para todo $c \in [a,b]$ se tiene que
$$\int_a^b f\,dt = \int_a^c f\,dt + \int_c^b f\,dt$$
y
3. $$\int_b^a f\,dt = -\int_a^b f\,dt.$$

Demostración. □

Integrales de Contorno

Vamos a considerar a las funciones complejas y continuas $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y los contornos $C \subseteq \mathbb{C}$. Además, sea $z(t) = x(t) + iy(t)$ con $t \in [a,b]$ la parametrización de C.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_C \Big(u(x,y) + iv(x,y)\Big)(dx + idy)\\
&= \int_C \Big(u(x,y)\,dx + iv(x,y)\,dx + iu(x,y)\,dy - v(x,y)\,dy\Big)\\
&= \int_C \Big(u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\Big) + i\int_C \Big(v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\Big) \qquad (4.1)\\
&= \int_a^b \Bigg(u\Big(x(t),y(t)\Big)x'(t)\,dt - v\Big(x(t),y(t)\Big)y'(t)\,dt\Bigg) + i\int_a^b \Bigg(u\Big(x(t),y(t)\Big)y'(t)\,dt + v\Big(x(t),y(t\\
&= \int_a^b u(t)\Big(x'(t) + iy'(t)\Big)\,dt + i\int_a^b v(t)\Big(x'(t) + iy'(t)\Big)\,dt\\
&= \int_a^b f\Big(z(t)\Big)z'(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Con esto podemos introducir la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.8: Integral de contorno

Para toda función compleja $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que f es continua en Ω y además la parametrización de una curva $C \subseteq \Omega$ es $z(t) = x(t) + iy(t)$, con $t \in [a,b]$. Definimos la **integral de contorno** *como*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\Big(z(t)\Big)z'(t)\,dt.$$

PROPOSICIÓN 4.2. Para todas las funciones complejas $f, g\colon \Omega\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ y para toda curva $C \subseteq \Omega$, tales que f y g sean continuas en Ω. Se tienen las siguientes propiedades:

1. $\int_C \alpha f + g\,dz = \alpha\int_C f\,dz + \int_C g\,dz$,
2. $\int_C f\,dz = \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_2} f\,dz$, donde $C_1 \cup C_2 = C$ y además $C_1 \cap C_2$ excepto en los extremos que los unen; y
3. $\int_{-C} f\,dz = -\int_C f\,dz$.

Demostración. $\square$

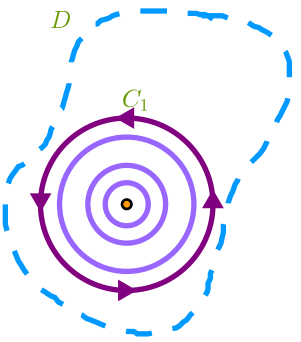
OBSERVACIÓN. La integral de contorno definida en (8) no es útil para definir la integral

$$\int_\Omega f\,dz.$$

Definición 4.9: Dominio simplemente conexo

Decimos que un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ es **simplemente conexo** *si a toda curva cerrada $C \subseteq D$ la podamos contraer continuamente hacia un punto $z \in D$.*

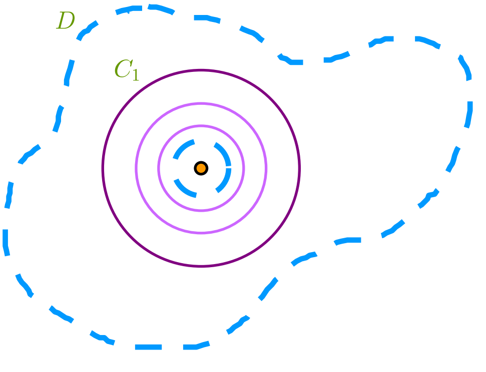
Ejemplo 4.6. Un ejemplo de dominio simplemente conexo es



Definición 4.10: Dominio multiplemente conexo

Decimos que un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ es **multiplemente conexo** *si existe al menos una curva cerrada $C \subseteq D$ tal que no la podamos contraer continuamente hacia un punto $z \notin D$, es decir, si la contracción queda fuera del dominio D.*

Ejemplo 4.7. Un ejemplo de dominio multiplemente conexo es



Teorema 4.3: Teorema de Cauchy para dominios simplemente conexos

Para toda función compleja que es holomorfa en un dominio simplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y para cualquier contorno de Jordan $C \subseteq \Omega$. Entonces

$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

Observación. Generalmente cuando la curva de integración en una integral de contorno es cerrada se utiliza la notación $\oint$.

Demostración. Para esta demostración usaremos un resultado de Análisis Vectorial, que es el teorema de Green.

Debemos considerar dos casos, uno en la curva sea simple y otro en que la curva no sea simple.

1. Así, sea $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en el dominio Ω, además sea $C \subseteq \Omega$ una curva de Jordan. Por la ecuación (4.1) tenemos que

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \Big(u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\Big) + i\oint_C \Big(v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\Big). \tag{4.2}$$

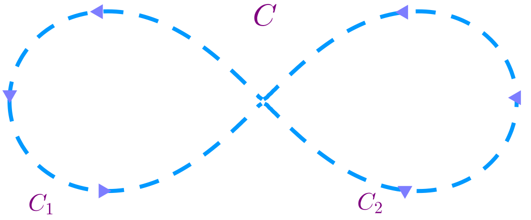
Puesto que f es holomorfa en Ω, tenemos que f' es holomorfa en Ω, así los campos escalares u y v son de clase $C^2(D)$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una isometría a Ω. Definamos al conjunto $R = \overset{\circ}{C}$, ahora, por el teorema de Green tenemos que la ecuación (4.2) se puede representar como

$$\oint_C f(z)\,dz = \iint_R (-v_x - u_y)\,dA + \iint_R (u_x - v_y)\,dA. \tag{4.3}$$

Como f es holomorfa en Ω, entonces los campos escalares U y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemman en el conjunto $R \subseteq D$, así tenemos de la ecuación (4.3) que

$$\oint_C f(z)\,dz = \iint_R 0\,dA + \iint_R 0\,dA. \tag{4.4}$$

2. Supongamos que el contorno C no es simple,



como lo podemos apreciar gráficamente lo podemos dividir en dos contornos C_1 y C_2, y con esto tendremos que

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{-C_2} f()\,dz, \tag{4.5}$$

la manera en la que tomamos a C_1 y C_2 nos permite utilizar la primera parte de la demostración, pues ambas curvas son curvas de Jordan.

□

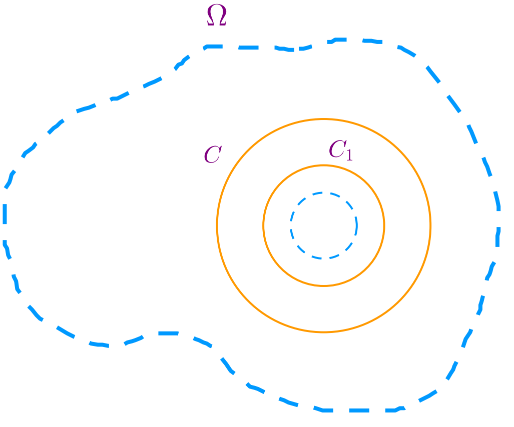
Notemos que el teorema (4.3) solo sirve para dominio simplemente conexos. Ahora, veremos un resultado que nos ayuda cuando tenemos una integral de contorno sobre una curva de Jordan dentro de un dominio multiplemente conexo.

COROLARIO 4.4 (Deformación de contornos)**.** Para toda función compleja f que es holomorfa en un dominio multiplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, para cualquier contorno de Jordan $C \subseteq \Omega$ tal que $\overset{\circ}{C}$ contiene al menos a un agujero de Ω y para toda deformación continua C_1 de C tal que $C_1 \subset \overset{\circ}{C}$ y además que no esté dentro del agujero, tenemos que

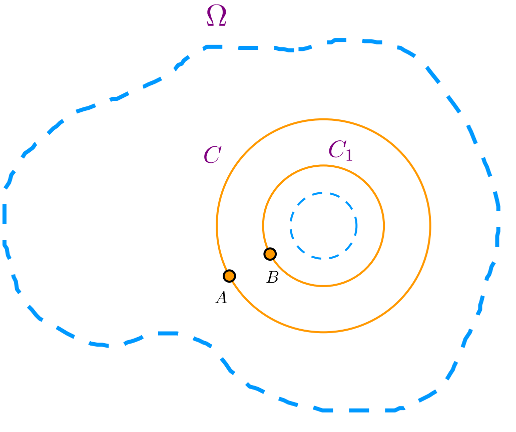
$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz.$$

Demostración. Sea $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa sobre el dominio multiplemente conexo Ω. Sea $C \subseteq \Omega$ una curva de Jordan que contiene al menos a un agujero de Ω ya demás sea C_1 otra curva de Jordan tal que $C_1 \subset \overset{\circ}{C}$ y que además contenga al agujero.

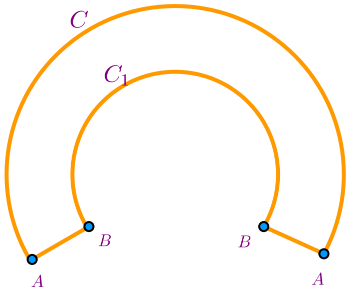
Notemos que gráficamente tenemos



Ahora, tomemos dos puntos uno en la curva C y otro en la curva C_1, como podemos apreciar en el gráfico



Notemos que si tomamos la recta $\overline{AB}$ podemos abrir a este nuevo conjunto de la siguiente manera



Pero notemos que este conjunto es una curva de Jordan dentro de un dominio simplemente conexo, pues hicimos este proceso para evitar el agujero que contiene Ω. Denotemos a este nueva curva de Jordan como C_2 y la definamos como $C_2 = \overrightarrow{AB} \cup -C_1 \cup \overrightarrow{BA} \cup C$, pues esta es la dirección positiva del contorno C_2. Así, por el teorema (4.3) tenemos que

$$\oint_{C_2} f(z)\, dz = 0, \tag{4.6}$$

pero como el contorno C_2 es igual a $\overrightarrow{AB} \cup -C_1 \cup \overrightarrow{BA} \cup C$ tenemos que la ecuación (4.6) podemos reescribirla de la siguiente manera

$$\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\, dz + \int_{-C_1} f(z)\, dz + \int_{\overrightarrow{BA}} f(z)\, dz + \int_C f(z)\, dz = 0. \tag{4.7}$$

Notemos que

$$\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\, dz = -\int_{\overrightarrow{BA}} f(z)\, dz, \quad \text{y} \quad \int_{C_1} f(z)\, dz = -\int_{-C_1} f(z)\, dz \tag{4.8}$$

por lo cual podemos concluir de las ecuaciones (4.7) y (4.8) que

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz.$$

$\square$

Lo que nos dice este corolario es que, si tenemos un dominio multiplemente conexo Ω, entonces la integral dentro de una curva de Jordan C que puede ser complicada de integrar, la podemos simplificar a la integral de contorno en una curva C_1 mucho más simple, pero siempre y cuando esta se encuentre dentro del interior de C.

OBSERVACIÓN. Para que se cumpla el corolario (4.4), no es necesario que f se encuentre definida en el interior de C_1.

EJERCICIO 4.1. Muestre que

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \wedge n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

donde $z_0 \in \overset{\circ}{C}$, y C es una curva de Jordan.

Solución. Vamos a demostrarlo en tres casos:

1. si $n = 1$, tenemos que $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Notemos que f no es holomorfa en todo $\overset{\circ}{C}$.

   Ahora, por el corolario (4.4) tenemos que integrar sobre la curva C va a ser lo mismo que integrar sobre la curva C_1, donde $C_1 \subset C$ y es la bola de centro z_0 y radio $r > 0$.[1] Con esto tenemos que una parametrización para C_1 es

   $$C_1 : z(t) = z_0 + r\exp(it),\ t \in [0, 2\pi].$$

   Con todo lo anterior tenemos que

   $$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{z-z_0}\,dz &= \oint_{C_1} \frac{1}{z-z_0}\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ri\exp(it)}{z_0 + \exp(it) - z_0}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.\end{aligned}$$

2. Si $n \leq 0$, tenemos que

   $$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = \oint_C (z-z_0)^{-n}\,dz,$$

   pero $(z-z_0)^{-n}$ es una función entera y por el teorema (4.3) tenemos que

   $$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = \oint_C (z-z_0)^{-n}\,dz = 0.$$

3. Si $n > 1$ y por el corolario (4.4) tenemos que

   $$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz &= \oint_{C_1} \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz \\ &= i\int_0^{2\pi} \frac{r\exp(it)}{r^n\exp(nit)}\,dt \\ &= \frac{1}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} \exp(-nit)\,dt \\ &= \frac{1}{-i(n-1)r^{n-1}}\exp(-nit)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{-i(n-1)r^{n-1}}\Big(\cos(-nt) + i\sin(-nt)\Big)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{-i(n-1)r^{n-1}}\Big(0\Big) = 0.\end{aligned}$$

[1]Notemos que deberíamos escoger un radio tal que C_1 quedase enteramente contenido dentro del interior de C, es decir, podemos escoger a r como $\frac{1}{2}\min_{z \in C} \|z - z_0\|$.

$\square$

TEOREMA 4.5: Teorema de Cauchy para dominios multiplemente conexos

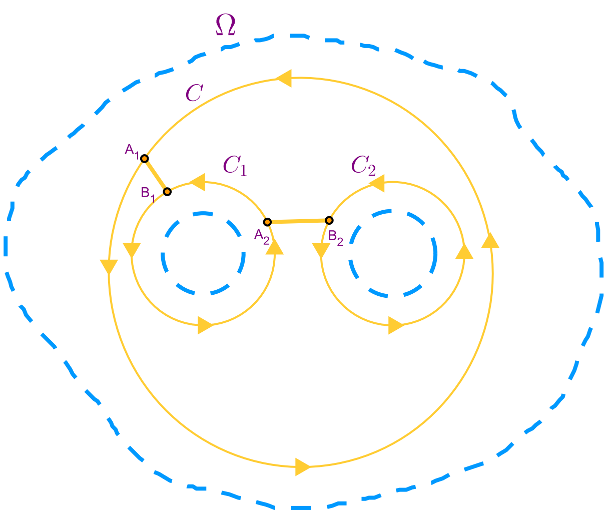
Para toda función holomorfa f en un dominio multiplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ formado por n agujeros. Para cualquier curva de Jordan $C \subset \Omega$ que contenga a los n agujeros en su interior, se tiene que

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,dz,$$

Demostración. Sea f una función holomorfa en un dominio multiplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ que tiene n agujeros, sea C una curva de Jordan que contiene a los n agujeros en su interior.

Vamos a utilizar el método de inducción matemática para demostrar este teorema.

Base de inducción, cuando $n = 2$. Notemos que tenemos algo parecido al siguiente gráfico



De esto podemos ver que si tomamos al contorno $\Gamma = \overrightarrow{A_1B_1} \cup \overset{\frown}{B_1A_2} \cup \overrightarrow{A_2B_2} \cup -C_2 \cup \overrightarrow{B_2A_2} \cup \overset{\frown}{A_2B_1} \cup C$, este es un camino de Jordan en un domino simplemente conexo.

Ahora por el teorema (4.3) tenemos que

$$0 = \oint_\Gamma f(z)\,dz,$$

por como está definido Γ tenemos que

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\overrightarrow{A_1B_1}} f(z)\,dz + \int_{\overset{\frown}{B_1A_2}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{A_2B_2}} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz \\ + \int_{\overrightarrow{B_2A_2}} f(z)\,dz + \int_{\overset{\frown}{A_2B_1}} f(z)\,dz + \int_C f(z)\,dz,\end{aligned}$$

por propiedades de la integral de contorno tenemos que

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz.$$

Hipótesis de inducción, supongamos que se cumple para un $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 2$. Así, tenemos que existe una sucesión de puntos $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ tales que $A_1 \in C$, $B_1 \in C_1$, $A_i \in C_{i-1}$ y $B_i \in C_i$ para $i \in \{2,3,\ldots,k\}$. Gráficamente tenemos lo siguiente

De esto podemos ver que si tomamos al contorno $\Gamma = \overrightarrow{A_1B_1} \cup \overset{\frown}{B_1A_2} \cup \overrightarrow{A_2B_2} \cup \cdots \cup \overrightarrow{A_{i-1}B_i} \cup \overset{\frown}{B_iA_{i+1}} \cup \cdots \cup \overrightarrow{A_nB_n} \cup -C_n \cup \overrightarrow{B_nA_n} \cup \overset{\frown}{A_nB_{n-1}} \cup \cdots \cup \overset{\frown}{A_{i+1}B_i} \cup \overrightarrow{B_iA_{i-1}} \cup \cdots \cup C$, este es un camino de Jordan en un domino simplemente conexo. De esto podemos observar que hemos formado una curva de Jordan dentro de dominio simplemente conexo. Así, por el teorema (4.3) tenemos que

$$0 = \oint_\Gamma f(z)\,dz, \tag{4.9}$$

pero notemos que esta ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\overrightarrow{A_1B_1}} f(z)\,dz + \int_{\overset{\frown}{B_1A_2}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{A_2B_2}} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\overrightarrow{A_{i-1}B_i}} f(z)\,dz + \int_{\overset{\frown}{B_iA_{i+1}}} f(z)\,dz \\ + \cdots + \int_{\overrightarrow{A_nB_n}} f(z)\,dz + \int_{-C_n} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{B_nA_n}} f(z)\,dz + \int_{\overset{\frown}{A_nB_{n-1}}} f(z)\,dz + \\ \cdots + \int_{\overset{\frown}{A_{i+1}B_i}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{B_iA_{i-1}}} f(z)\,dz + \cdots + \int_C f(z)\,dz. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora, de la ecuación (4.10) y por como está definido Γ, tenemos que

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{C_i} f(z)\,dz.$$

Ahora, notemos que el paso por inducción es similar a lo que acabamos de hacer. Se deja lo que queda de la demostración como ejercicio para el lector. □

Independencia de caminos

DEFINICIÓN 4.11

Para toda función continua $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, y para todos los camino $C, C_1 \subset \Omega$ que unen a los puntos z_0 y z_1. Decimos que la integral de contorno de f sobre C es **independiente del camino** *si*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz.$$

Cuando tenemos independencia de caminos en una integral de contorno tomamos la notación

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz.$$

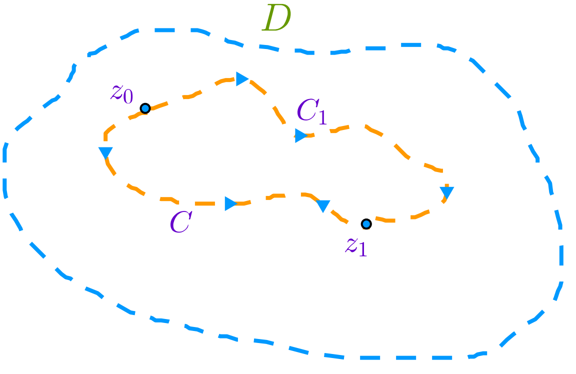
TEOREMA 4.6: Independencia de caminos

Para toda función continua f en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces la integral de contorno

$$\int_C f(z)\, dz$$

es independiente del camino, para todo camino C enteramente contenido en D ya demás que une al punto inicial z_0 y al punto final z_1.

Demostración. Sea f una función continua en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$. Y sean $C, C_1 \subset D$ dos caminos que unen al punto inicial z_0 con el punto final z_1.



Notemos que el camino $C \cup -C_1$ es un contorno cerrado en D, por el teorema (4.3) tenemos que

$$\int_{C\cup -C_1} f(z)\, dz = 0, \tag{4.11}$$

pero esta ecuación puede ser reescrita como

$$\int_C f(z)\, dz - \int_{C_1} f(z)\, dz = 0. \tag{4.12}$$

Notemos que la ecuación (4.12) implica que

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz.$$ □

DEFINICIÓN 4.12: Primitiva de una función

Para toda función f continua en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. Decimos que una función F es la **primitiva** *de f si*

$$f'(z) = f(z), \quad \textit{para todo } z \in D.$$

OBSERVACIÓN. Por la definición (12), F es holomorfa en D.

Lema 4.7. Para toda función f tal que para todo $z \in C$ y para algún $M > 0$ $|f(z)| \leq M$, con C un contorno. Entonces existe un $L > 0$ tal que

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML.$$

Demostración. Sea f una función y sea C contorno, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$. Tomemos $z(t)$ con $t \in [a, b]$ parametrización del contorno C. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)\, dz \right| &= \left| \int_a^b f\Big(z(t)\Big) z'(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b \left| f\Big(z(t)\Big) \right| \, |z'(t)|\, dt. \end{aligned}$$

Puesto que f está recorriendo en C, tenemos que

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq M \int_a^b |z'(t)|\, dt,$$

además si tomamos

$$L := \int_a^b |z'(t)|\, dt,$$

se tiene que

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML. \qquad \square$$

Teorema 4.8: Primer teorema fundamental del cálculo complejo

Para toda función f continua en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ tal que su integral de contorno es independiente del camino. Entonces, para todo camino C enteramente contenido en D, f tiene primitiva en D.

Demostración. Sea f una función continua en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$, además sea F una función definida sobre D de la siguiente manera

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw,$$

donde $z_0 \in D$ es fijo y $z \in D$. Debemos demostrar que para cualquier $z \in D$, se tiene que $F'(z) = f(z)$.

Así, sea $z \in D$. Como D es un dominio siempre es posible elegir un $h \in D$ tal que $z + h \in D$, además tenemos que z y $z + h$ lo podemos unir a través de un segmento de recta. Consideremos lo siguiente

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\int_{z_0}^{z+h} f(w)\, dw - \int_{z_0}^{z} f(w)\, dw \Big), \tag{4.13}$$

notemos que esta ecuación es equivalente a

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=\frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)\,dw. \tag{4.14}$$

Ahora, a la ecuación (4.14) restemos $f(z)$ y a demás tomemos el módulo, con lo que obtenemos

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|=\frac{1}{|h|}\left|\int_z^{z+h} f(w)\,dw-hf(z)\right|. \tag{4.15}$$

Notemos que

$$\int_z^{z+h} dw=h. \tag{4.16}$$

Ahora de las ecuaciones (4.15) y (4.16) tenemos que

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|=\frac{1}{|h|}\left|\int_z^{z+h}\Big(f(w)-f(z)\Big)\,dz\right|. \tag{4.17}$$

Como f es continua en h y en particular es continua en z, se cumple que

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta_{\varepsilon,z}>0)(|z-w|<\delta_{\varepsilon,z}\longleftarrow|f(z)-f(w)|<\varepsilon).$$

Así, sea $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$. Ahora, tomando $|h|<\delta$ y considerando $w=z+th$, se sigue que

$$|w-z|=|z+th-z|=|th|=t|h|\leq|h|<\delta.$$

Notemos que los w que verifican la desigualdad anterior son todos los puntos que se encuentran en la linea que une z con $z+h$. Así, por esto y el lema (4.7) tenemos que

$$\left|\int_z^{z+h}\Big(f(w)-f(z)\Big)\,dz\right|\leq\varepsilon|h|. \tag{4.18}$$

Si $|h|<\delta$, de la ecuación (4.17) y la desigualdad (4.18) tenemos que

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon. \tag{4.19}$$

Notemos que de la desigualdad (4.19) tenemos que

$$\lim_{h\to0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z),$$

pero esto es equivalente a $F'(z)=f(z)$. □

Observación. Del teorema (4.8) podemos decir que

$$\int f(z)\,dz=F(z)+C,$$

con $C\in\mathbb{C}$.

PROPOSICIÓN 4.9. Para toda función f holomorfa en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, f tiene una primitiva.

Demostración. Sea f una función holomorfa en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces tenemos que f es continua en D. Lo que implica que la integral de contorno es independiente del camino. De lo anterior y por el teorema (4.8) tenemos que f tiene primitiva. □

TEOREMA 4.10: Segundo teorema del cálculo complejo

Para tda función f continua en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ con su primitiva F. Entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0),$$

para todo contorno C enteramente contenido en D, donde z_0 es el punto inicial y z_1 el punto final.

Demostración. Sea f una función continua en un dominio $D \subseteq \mathbb{C}$. sea F su primitiva en D y además sea C un contorno enteramente contenido en D con su punto inicial z_0 y su punto final z_1, cuya parametrización es $z(t)$ con $t \in [a, b]$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b F\Big(z(t)\Big)z'(t)\,dt \\
&= \int_a^b F'\Big(z(t)\Big)z'(t)\,dt \\
&= F(z(b)) - F(z(a)) \\
&= F(z_1) - F(z_0).
\end{aligned}$$

□

Fórmulas integrales de Cauchy

TEOREMA 4.11: Primera fórmula integral de Cauchy

Para toda función holomorfa f en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, para todo $z_0 \in D$ y para todo contorno simple cerrado $C \subset D$ tal que $z_0 \in \overset{\circ}{C}$. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Demostración. Sea f una función holomorfa en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, sea $z_0 = \in D$ y además sea $C \Subset D$ un contorno simple cerrado tal que $z_0 \in \overset{\circ}{C}$.

Notemos que la función $\frac{f(z)}{z-z_0}$ es holomorfa en $D \setminus \{z_0\}$. Tomemos la esfera de centro z_0 y radio $0 < r < \inf_{z\in C} |z - z_0|(S_r(z_0))$, así por el teorema (4.5) tenemos que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{S_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz. \tag{4.20}$$

En particular, la integral de la ecuación (4.20) es independiente del radio que tomemos. Es decir, podemos tomar r tan pequeño como queramos, si tomamos $0 < r_0 < r$ tal que $r_0 \to 0$, notemos que $S_{r_0}(z_0) \subset \overset{\circ}{S_r}(z_0)$. Tomemos $M > 0$ tal que $|f'(z_0)| < M$. Así, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que para todo $z \in B_\varepsilon(z_0)$, implica que

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < m.$$

De lo anterior y el ejercicio (4.1) tenemos que

$$f(z_0) = \frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint_{S_{r_0}(z_0)} \frac{1}{z-z_0}\,dz, \tag{4.21}$$

pues $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{S_{r_0}(z_0)} \dfrac{1}{z-z_0}\,dz = 1.$

De la ecuación (4.21) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-z_0}\,dz - f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{S_{r_0}(z_0)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{S_{r_0}(z_0)} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \cdot |dz| \\
&\le \frac{M}{2\pi}\oint_{S_{r_0}(z_0)} |dz| = \frac{M}{2\pi}\cdot 2\pi r = M\cdot r,
\end{aligned}$$

pues tomamos $z \in B_\varepsilon(z_0)$. Como tomamos a r_0 arbitrariamente pequeño, obtenemos el resultado. □

La fórmula anterior no solo nos sirve para saber el valor de esta en un punto sabiendo los valores de esta en una frontera, también nos sirve para calcular integrales complejas que, de otra manera, podrían resultar complicadas.

EJEMPLO 4.8. Sea $C = \left\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\right\}$, calcule la integral $\oint_C \frac{\exp(z)}{z}\,dz$.

Solución. Del teorema (4.11) tenemos que

$$\oint_C \frac{\exp(z)}{z}\,dz = 2\pi i \exp(0) = 2\pi i.$$

□

TEOREMA 4.12: Segunda fórmula integral de Cauchy

Para toda función holomorfa f en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, para todo $z_0 \in D$ y para todo contorno simple cerrado $C \subset D$ tal que $z_0 \in \overset{\circ}{C}$. Entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\, dz,$$

con $n \in \mathbb{N}$.

Esta extensión de la fórmula integral de Cauchy a $f^{(k)(z_0)}$ es un resultado importante. Empezamos suponiendo que solo la primera derivada existe, y ahora esta suposición implica que existen todas las derivadas. En calculo la derivada no garantiza la continuidad de la función, mucho menos la diferenciabilidad. Mostraremos dos resultados que a partir de este teorema.

COROLARIO 4.13. Para toda función holomorfa f en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$. Entonces $f^{(n)}$ es holomorfa en D.

Demostración. Sea F una función holomorfa en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, sea $z_0 \in D$, por el teorema (4.12) tenemos que para $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz,$$

donde $C \subseteq D$ es un contorno simple cerrado que contiene a z_0 en su interior. Además recordemos el ejercicio (4.1), este ejercicio nos dice que la función $(z-z_0)^{-n}$ es de clase $\mathcal{C}^\infty\left(C \cup \overset{\circ}{C} \setminus \{z_0\}\right)$ y lo podemos extender a $D \setminus \{z_0\}$, pues la curva C es cualquier curva de Jordan que se encuentre enteramente contenida dentro de D. Ahora, tenemos que

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

es holomorfa en $D \setminus \{z_0\}$, así

$$\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz,$$

es holomorfa en $D \setminus \{z_0\}$, pero sabemos que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz,$$

De donde se sigue que $f^{(n)}$ es holomorfa en D. □

TEOREMA 4.14: Desigualdad de Cauchy

Para toda función holomorfa f en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$ y para todo

$z_0 \in D$. Si para todo $z \in \delta B_R(z_0)$ tal que $|f(z)| \leq M$, con $M > 0$. Entonces

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{R}^n M.$$

Demostración. Sea f una función holomorfa en un dominio simplemente conexo $D \subseteq \mathbb{C}$, sea C una curva definida por el contorno de $B_R(z_0) \subset D$, con $R > 0$, además si suponemos que existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$. Sea $z_0 \in D$, utilizando el teorema (4.12) con $n \in \mathbb{N}$ obtenemos

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw \tag{4.22}$$

y de lo cual tenemos

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \left|\oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \oint_C \left|\frac{f(z)}{(w - z_0)^{n+1}}\right| dw \\
&= \frac{n!}{2\pi} \oint_C dw
\end{aligned}$$

notemos que $\oint_C dw$ es la longitud de arco, por lo cual tenemos que

$$= \frac{n! \cdot M}{R^n}.$$

□

TEOREMA 4.15: Teorema de Liuville

Para toda función f entera y acotada. Entonces f es constante.

Demostración. Sea f una función entera y acotada. Sea además $z_0 \in \mathbb{C}$. Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por el teorema (4.14) tenemos que $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$, siempre que $z_0 \in B_R(z)$ para algún $z \in \mathbb{C}$. Si hacemos que $R \to \infty$ tendremos que

$$|f(z_0)| \leq 0,$$

de donde tenemos que $|f(z_0)| = 0$ y directamente implica que $f'(z_0) = 0$. Y de esto podemos concluir que $f(z_0)$ es constante, ahora como escogimos un $z_o \in \mathbb{C}$ arbitrario tenemos que f es constante. □

Este resultado es importante, pues notemos que en los reales no tenemos esta propiedad. Para mostrarlo basta poner como ejemplo a la función Seno. Sabemos que es de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ya demás está acotada, pero esto no implica que sea constante.

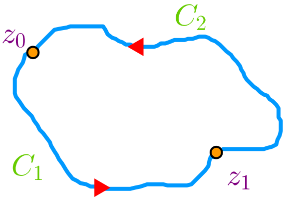
TEOREMA 4.16: Teorema de Morera

Para toda función compleja f definida sobre un dominio simple cerrado contenido en $D \subseteq \mathbb{C}$ y si para toda curva simple cerrada contenida en D cumple que $\oint_C f(z)\, dz = 0$. Entonces f es holomorfa.

Demostración. Sea f una función definida sobre un dominio simplemente cerrado $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea C una curva simple cerrada que está enteramente contenida en D tal que

$$\oint_C f(z)\, dz = 0, \tag{4.23}$$

entonces tenemos que la integral que une dos puntos $z_0 \in D$ y $z_1 \in D$ es independiente del camino.



De la ecuación (4.23) y tomando dos curvas simples C_1 y C_2 como se muestra en el gráfico anterior tenemos que

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz. \tag{4.24}$$

Como f es independiente del camino en D tenemos por el teorema (4.8) tenemos que f tiene primitiva en D. Así, sea F la primitiva de f en D, por definición de primitiva tenemos que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$, como D es un dominio simplemente conexo tenemos que F es holomorfa en D, por lo cual tenemos que f es holomorfa en D. $\square$

LEMA 4.17. Para todo polinomio complejo $p(z)$ de orden n, tenemos que existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$ entonces

$$\frac{1}{2}|a_n|\,|z^n| \leq |p(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n|\,|z^n|.$$

Demostración. Sea $p(z)$ un polinomio complejo de orden n, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \\ &= |a_n|\,|z^n| \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n\, z^{n-k}} \right|. \end{aligned}$$

Notemos que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n\, z^{n-k}} \to 1,$$
cuando $z \to \infty$. Recordemos que la definición $\varepsilon - \delta$ de límite es la siguiente
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0) \left(|z| > M \Longleftrightarrow \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n\, z^{n-k}} \right| < \varepsilon \right). \tag{4.25}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Para ε tenemos que existe $M > 0$ tal que se cumple (4.25). Así, tenemos lo siguiente
$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n\, z^{n-k}} \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n\, z^{n-k}} \right| \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_{n-k}}{|a_n|\, M^{k+1}} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Si $M \geq 1$ tenemos que de (4.26) que
$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n\, z^{n-k}} \right| < \max_{1 \leq i \leq n-1} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{M^k} \right) \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \frac{n}{M^n} \tag{4.27}$$
o si $0 < M < 1$ tenemos de (4.26) que
$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n\, z^{n-k}} \right| < \max_{1 \leq i \leq n-1} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \frac{n}{M}. \tag{4.28}$$
De (4.27) y (4.28) podemos obtener ε.

Ahora, tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe $M > 0$ tal que si $|z| > M$ implica que
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n\, z^k} \right| < \frac{1}{2}. \tag{4.29}$$

Notemos que
$$\left| 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n\, z^k} \right| \leq |1| + \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n\, z^k} \right| < \frac{3}{2}, \tag{4.30}$$
mientras que
$$\left| 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n\, z^k} \right| \geq \left| |1| + \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n\, z^k} \right| \right| > \frac{1}{2}. \tag{4.31}$$
De (**??**) y (4.31) tenemos que
$$\frac{1}{2}|a_n|\, |z^n| \leq |p(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n|\, |z^n|.$$

□

A través del teorema (4.15) vamos a demostrar que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado.

Otra manera de escribir que C es algebraicamente cerrado es la siguiente:

TEOREMA 4.18: C **es algebraicamente cerrado**

Para todo polinomio $p(z)$ no constante de orden n, con coeficientes en C, entonces p tiene al menos una raíz en C.

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, donde $a_k \in \mathbb{C}$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_n \neq 0$ y además p no es constante. Por absurdo, supongamos que para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos que $p(z) \neq 0$. Definamos la función $f(z) = \frac{1}{p(z)}$, notemos que f está bien definida en todo $\mathbb{C}$, además como p es entera tenemos que f es entera. Por el lema (4.17) tenemos que $|f(z)| \to 0$, cuando $|z| \to \infty$.

Sea $\varepsilon = 1$. Para ε, existe $M > 0$ tal que si $|z| > M$ implica que $|f(z)| < |$, pero esto es equivalente a decir que para F está acotada en $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_M(0)$.

Por otro lado, para todo $z \in \overline{B}_M(0)$ tenemos que f está acotada, pues notemos que $\overline{B}_M(0)$ es un compacto y además f es continua en $\overline{B}_M(0)$, por eso tenemos que $f\left(\overline{B}_M(0)\right)$ está acotado.

Por lo anterior tenemos que f está acotada en C ya demás es entera, por el teorema (4.15) se tiene que f es constante, esto implica directamente que p está acotado. Esta es una contradicción, pues supusimos que p no era constante. Por lo que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$p(z_0) = 0.$$

$\square$

Sucesiones y Series

Sucesiones y Series Numéricas

Sucesiones Numéricas

Definición 5.1: Sucesión

Definimos una **sucesión** *como una función z tal que*

$$\begin{aligned} z\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto z(n) = z_n. \end{aligned}$$

Y la notaremos como el conjunto $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Notemos que la notación $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un abuso de notación, pues como z es una función lo normal sería notar a la sucesión por $z(\mathbb{N})$.

Definición 5.2: Subsucesión

Para toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y para toda función creciente $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Decimos que $\{z_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **subsucesión** *de $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definición 5.3: Convergencia

Decimos que una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** *si existe algún $z \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

o de manera equivalente

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n \geq N \Longrightarrow z_n \in B_\varepsilon(z)).$$

Puesto que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, tenemos que a cada elemento de la sucesión lo podemos representar como una suma de elementos reales, es decir, a cada z_n lo podemos escribir como $z_n = x_n + iy_n$ donde $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. De esto podemos ver que a la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la podemos escribir como la suma de dos sucesiones reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} + i\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

PROPOSICIÓN 5.1 (Caracterización de convergencia)**.** Para toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. La sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sí y solo si $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen.

Demostración. Sea la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, tal que a cada elemento $n-$ésimo lo podamos representar como $z_n = x_n + iy_n$, con $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

Notemos que tenemos las siguientes cadenas de desigualdades

$$|x_n - x| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \tag{5.1}$$

y

$$|y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|. \tag{5.2}$$

1. Supongamos que $z_n \to z$, tomando el limite cuando $n \to \infty$ en las desigualdades (1.1) y (1.2) obtenemos que $x_n \to x$ y $y_n \to y$.

2. Supongamos que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, Así, si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ en la desigualdad (1.1) obtenemos que $z_n \to z$.

□

PROPOSICIÓN 5.2. Para todo par de sucesiones $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ convergentes en C, tales que $z_n \to z$ y $w_n \to w$, se tiene las siguientes propiedades:

1. Unicidad del límite,

2. para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene que $z_n + \alpha w_n \to z + \alpha w$,

3. $z_n w_n \to zw$,

4. si $w \neq 0$, $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$ y

5. f es continua sí y solo si $f(z_n) \to f(z)$.

Demostración.

1. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, supongamos que $z_n \to z$ y $z_n \to w$, y sea $\varepsilon > 0$. Por la definición (3) para $\frac{\varepsilon}{2}$ existen $N_1, N_2 \notin \mathbb{N}$ tales que

$$\text{si } n > N_1 \Longrightarrow |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.3}$$

y

$$\text{si } n > N_1 \Longrightarrow |z_n - w| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.4}$$

Ahora, tomemos $N := \text{máx}\{N_1, N_2\}$, si $n > N$ obtenemos lo siguiente

$$|z - w| \leq |z_n - z| + |z_n - w| < \varepsilon. \tag{5.5}$$

De la desigualdad (1.5) tenemos que $z = w$.

2. Sean $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes, y además sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Expresando a las sucesiones anteriores como $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n + ib_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Por hipótesis tenemos que
$$x_n + iy_n \to x + iy \quad \text{y} \quad a_n + ib_n \to a + ib. \tag{5.6}$$

   Notemos que

$$\begin{aligned} z_n + \alpha w_n &= x + iy_n + (\alpha_1 + i\alpha_2)(a_n + ib_n) \\ &= x_n + \alpha_1 a_n - \alpha_2 b_n + i(y_n + \alpha_2 a_n + \alpha_1 b_n), \quad \text{con } \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \end{aligned}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, notemos que las sucesiones $\{x_n + \alpha_1 a_n - \alpha_2 b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n + \alpha_2 a_n + \alpha_1 b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones reales convergentes, tales que

$$x_n + \alpha_1 a_n - \alpha_2 b_n \to x + \alpha_1 a - \alpha_2 b \quad \text{y} \quad y_n + \alpha_2 a_n + \alpha_1 b_n \to y + \alpha_2 a + \alpha_1 b. \tag{5.7}$$

   De (1.7) tenemos que
$$z_n + \alpha w_n \to z + \alpha w.$$

3. Sean $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes expresadas como $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n + ib_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por hipótesis tenemos que

$$z_n = x_n + iy_n \to x + iy \quad \text{y} \quad w_n = a_n + ib_n \to a + ib. \tag{5.8}$$

   Ahora, notemos que

$$z_n w_n = x_n a_n - y_n b_n + i(x_n b_b + y_n a_n), \tag{5.9}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. De (1.9) tenemos que

$$x_n a_n - y_n b_n \to xa - yb \quad \text{y} \quad x_n b_b + y_n a_n \to xb + ya. \tag{5.10}$$

   De (1.8) y (1.10) tenemos que
$$z_n w_n \to zw.$$

4. Es similar a la anterior.

5.

□

DEFINICIÓN 5.4: Sucesión de Cauchy

Decimos que una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *es* **de Cauchy** *si cumple con lo siguiente*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n, m \geq N \implies |z_n - z_m| < \varepsilon).$$

PROPOSICIÓN 5.3 (Criterio de convergencia de Cauchy)**.** Para toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. La sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge sí y solo si $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Demostración. □

Series Numéricas

DEFINICIÓN 5.5: Sumas parciales

Para toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, decimos que*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$$

es una **suma parcial**.

DEFINICIÓN 5.6: Serie numérica

Una **serie** *es una sucesión de sumas parciales y se la nota como* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, donde* S_n *son las sumas parciales de una sucesión* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por notación se representa a una serie como $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ o $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z_k$.

DEFINICIÓN 5.7: Convergencia de Series

Decimos que una serie $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** *sí y solo si existe* $S \in \mathbb{C}$ *tal que*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n = S.$$

PROPOSICIÓN 5.4 (Condición necesario para que una serie converja)**.** Para toda serie compleja $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ sea convergente, se necesita que

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0.$$

Demostración. Sea $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ una serie convergente. Como una serie es una sucesión de sumas parciales podemos usar el criterio de Cauchy. Así, sea $\varepsilon > 0$, para ε existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si

$n, n-1 \geq N$ implica que

$$|S_n - s_{n-1}| = |z_n| < \varepsilon. \tag{5.11}$$

Hemos llegado a dado un ε, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica que $|z_n| < \varepsilon$ que es lo mismo que $z_n \to 0$. $\square$

OBSERVACIÓN. Generalmente se usa el recíproco de la proposición (1.4), pues esta nos dá una condición suficiente de divergencia.

DEFINICIÓN 5.8: Serie de Rieman

Decimos que una serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ *es* **de Riemman***, si la podemos expresar como*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha},$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$.

Una serie de Riemman converge sí $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$ y diverge si $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha) \leq 1$.

DEFINICIÓN 5.9: Serie Geométrica

Para toda serie que se pueda expresar como

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} az^n,$$

donde $a \in \mathbb{C}$*, la llamamos* **serie geométrica**.

EJERCICIO 5.1. ¿Bajo que condición la serie geométrica $\sum_{n\in\mathbb{N}} az^n$ converge?

Solución. Sea $\sum_{n\in\mathbb{N}} az^n$ una serie geométrica. Notemos que

$$\sum_{k=0}^{n} az^k = a\frac{1-z^{n+1}}{1-z}. \tag{5.12}$$

Ahora, si tomamos el límite cuando $n \to +\infty$ a la ecuación (1.12) obtenemos lo siguiente

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} az^k = a \lim_{n\to+\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = a\left(1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{z^{n+1}}{1-z}\right). \tag{5.13}$$

Para que exista el límite anterior debemos demostrar que $\frac{z^{n+1}}{1-z}$ converge, es decir, que su límite existe. Así, sea $\varepsilon > 0$, debemos demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica que $\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| < \varepsilon$.

Tenemos lo siguiente

$$\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| = \frac{|z^{n+1}|}{|1-z|}, \tag{5.14}$$

pero esto queremos que sea menor a ε.

Aplicando Logaritmo Natural[1] en la ecuación (1.14) tomando en cuenta la condición que queremos, obtenemos lo siguiente

$$n < \frac{\ln \varepsilon + \ln |1-z|}{\ln |z|} - 1 = \rho(\varepsilon, z). \tag{5.15}$$

De la desigualdad (1.15), se tiene que tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $N < \rho(\varepsilon, z)$ se tiene el resultado.

Así, si $|z| < |$ implica que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} az^k = \frac{a}{1-z} -$$

Si $|z| \geq 1$ la serie geométrica diverge. □

PROPOSICIÓN 5.5. Para toda sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $z_n = x_n + iy_n$, con $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge sí y solo si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ y $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ convergen.

Demostración. Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $z_n = x_n + iy_n$, con $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Notemos que tenemos

$$|x_n| \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n| \tag{5.16}$$

y de similar manera

$$|y_n| \leq |z_n| \leq |x_n| + |y_n|. \tag{5.17}$$

1. Supongamos que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge, lo que implica que la serie es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, para ε, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n-1 \geq N$ implica que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{n-1} z_k\right| = |z_n| < \varepsilon \tag{5.18}$$

De las desigualdades (1.17) y (1.18) obtenemos que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right| = |x_n| < \varepsilon. \tag{5.19}$$

Como para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n-1 \geq N$ implica la desigualdad (1.19), tenemos que la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es de Cauchy.

[1] El real.

Para la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ el procedimiento es similar, si no que para esta debemos usar la desigualdad (1.17).

2. Ahora, supongamos que las series $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ y $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ convergen. Como convergen, se tiene que son de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, para $\frac{\varepsilon}{2}$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, n-1 \geq N := \text{máx}\{N_1, N_2\}$ implica que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right| < \varepsilon, \tag{5.20}$$

de ls desigualdades (1.16) y (1.20) obtenemos que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{n-1} z_k\right| = |z_n| < \varepsilon. \tag{5.21}$$

De lo que podemos concluir que la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ es de Cauchy, lo que implica que esta converge.

□

DEFINICIÓN 5.10: Absolutamente Convergente

Para toda serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$. *Decimos que la serie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ **converge absolutamente** *si* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$ *converge.*

DEFINICIÓN 5.11: Convergencia Condicional

Para toda serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ *que converge, pero que no converge absolutamente decimos que la serie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ **converge condicionalmente.**

PROPOSICIÓN 5.6. Para toda serie absolutamente convergente $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$. Entonces la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge.

Demostración. □

DEFINICIÓN 5.12: Serie alternante

Para toda serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ *que se puede expresar como*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n,$$

la llamamos **serie alternante.**

Una serie alternante $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge si $a_n \to 0$ y La sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.[2]

OBSERVACIÓN. Si alguna de las condiciones anteriores falla, decimos que el criterio no concluye, es decir, no podemos decir si la serie converge o diverge.

OBSERVACIÓN (Criterio de la razón)**.** Para toda serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, decimos que la serie converge si

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L < 1,$$

diverge si $L > 1$ y que el criterio no concluye si $L = 1$.

OBSERVACIÓN (Criterio de la raíz)**.** Para toda serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$, decimos que la serie converge si

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sqrt[n]{|z_n|}\right| = L < 1,$$

diverge si $L > 1$ y que el criterio no concluye si $L = 1$.

Sucesiones y Series de Funciones

Sucesiones de Funciones

DEFINICIÓN 5.13: Convergencia puntual

Para toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones complejas. Para* $z_0 \in \mathbb{C}$*, decimos que la sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** *a una función compleja* f *en* z_0 *si*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$$

o equivalentemente

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N_{\varepsilon,z_0} \in \mathbb{N})(\forall n \geq N \Longrightarrow |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

DEFINICIÓN 5.14: Convergencia puntual en un conjunto

Para toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones complejas. Para* $z_0 \in D \subseteq \mathbb{C}$*, decimos que la*

[2] En sentido complejo, es decir, si tenemos que $|a_0| \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots$.

sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge puntualmente** *a una función compleja* f *en* D *si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall z \in D)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall n \geq N \Longrightarrow |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon).$$

DEFINICIÓN 5.15: Uniformemente convergente

Para toda sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funciones complejas, decimos que la sucesión* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformemente** *a* f *en* $D \subseteq \mathbb{C}$ *si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})(\forall z \in D \land \forall n \geq N \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon).$$

Una diferencia entre (14) y (15) es que, la convergencia uniforme converge con la misma tasa de cambio en todo punto de D, mientras que en la convergencia puntual no se tiene esto.

OBSERVACIÓN. Convergencia uniforme implica convergencia puntual.

PROPOSICIÓN 5.7. Para toda sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continuas, si en $D \subseteq \mathbb{C}$ la sucesión converge uniformemente a f. Entonces f es continua en D.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas, uniformemente convergente a f en $D \subseteq \mathbb{C}$. Sea $\varepsilon > 0$, como la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f, tenemos que para $\frac{\varepsilon}{3}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $w, z \in D$ y para $n \geq N$ tenemos que $|f_n(w) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ahora, para $\frac{\varepsilon}{3}$ existe $\delta_1 > 0$ tal que para $w \in B_{\delta_1}(z)$ implica que $|f_n(w) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para $z, w \in D$ tales que cumplen con lo anterior, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
|f(w) - f(z)| &= |f(w) - f_n(w) + f_n(w) - f_n(z) + f_n(z) - f(z)| \\
&\leq |f(w) - f_n(w)| + |f_n(w) - f_n(z)| + |f_n(z) - f(z)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, tomando $\delta = \delta_1$ se sigue que

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon,$$

es decir, f es continua en D. □

OBSERVACIÓN.

PROPOSICIÓN 5.8. Para toda sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continuas en Γ una curva suave, si la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en Γ. Entonces

$$\int_\Gamma f_n(z)\,dz \to \int_\Gamma f(z)\,dz$$

o lo que es equivalente

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Gamma f_n(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz.$$

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en Γ una curva suave, y converge uniformemente a f en Γ. Sea $\varepsilon > 0$, para $\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{L}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ implica que

$$|f_n(z) - f(z)| < \hat{\varepsilon},$$

donde $L = \int_\Gamma dz$. Consideremos lo siguiente

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f_n(z)\,dz - \int_\Gamma f(z)\,dz\right| &= \left|\int_\Gamma f_n(z) - f(z)\,dz\right| \\ &\leq \int_\Gamma |f_n(z) - f(z)|\,dz \\ &< \hat{\varepsilon}L = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Series de Funciones

Como lo habíamos visto, una serie es una sucesión de sumas parciales. La idea de una serie de funciones es la representación de sumas parciales de funciones evaluadas en un punto, es decir, transformar una serie de funciones en una serie numérica.

DEFINICIÓN 5.16: Serie de Funciones

Para toda sucesión de funciones complejas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una **serie de funciones** *es una sucesión de sumas parciales tal que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z).$$

Lo expuesto en la sección acerca de series numéricas se aplican a las series de funciones, con la diferencia que estas propiedades las aplicamos a cada z en su dominio.

Tomando esto en cuenta, es posible introducir a la convergencia uniforme de una serie.

DEFINICIÓN 5.17: Convergencia Uniforme de Series

Para toda serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$, decimos que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ converge uniformemente a f en $z \in D$ si se cumple lo siguiente

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\left(\forall z \in D \land \forall n \geq N \Longrightarrow \left|\sum_{0\leq k\leq n} f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon\right).$$

Notemos que la última parte de la definición (17) es equivalente a

$$\left|\sum_{0\leq k\leq n} f_n(z) - f(z)\right| = \left|\sum_{k>n} f_n(z)\right|,$$

es decir, para analizar la convergencia uniforme de una serie de funciones solo debemos analizar la convergencia de su cola.

TEOREMA 5.9: Criterio M de Weierstrass

Para toda sucesión de funciones complejas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre $D \subseteq \mathbb{C}$ y para $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_k$ una serie real convergente tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in D$ tenemos que $|f_n(z)| \leq M_n$. Entonces la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ converge absolutamente y además converge uniformemente.

Demostración. Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas y $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n$ una serie real convergente. Supongamos que para todo $z \in D$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(z)| \leq M_n$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n$ es una serie convergente tenemos que para ε existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ implica que

$$\left|\sum_{k>n} M_k\right| < \varepsilon. \tag{5.22}$$

Para $n \geq N$ tenemos que

$$\left|\sum_{k>n} f_n(z)\right| \leq \left|\sum_{k>n} |f_n(z)|\right| \leq \left|\sum_{k>n} M_k\right|. \tag{5.23}$$

Ahora, de (1.22) y (1.23) tenemos que

$$\left|\sum_{k>n} f_n(z)\right| < \varepsilon. \tag{5.24}$$

Pero notemos que esto se cumple para un $N \in \mathbb{N}$ dado ε, es decir, la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ converge uniformemente. Notemos que esto mismo implica que la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(z)$ converge absolutamente. $\square$

Series de Potencia

La idea de introducir las series de potencia es el análisis de las series de Taylor, Maclaurin y de manera más importante las series de Laurent.

DEFINICIÓN 5.18: Series de Potencia

A toda serie de la forma $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ *con la sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ *se la llama* **serie de potencia centrada en** $z_0 \in \mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 5.19: Radio de Convergencia de una serie de potencia

Al máximo radio $R > 0$ *de la bola centrada en* z_0*, para el cual la serie de potencia* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ *converge absolutamente se lo llama* **radio de convergencia.**

A continuación veremos una manera de encontrar dicho radio de convergencia.

Consideremos la serie de potencias $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$, por el criterio de la razón tenemos sabemos que para que la serie de potencias converja se necesita que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = |z-z_0|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z-z_0|L, \tag{5.25}$$

Bibliografía

[1] M Distéfano, M Aznar, y M Pochulu. Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de los números complejos: un análisis ontosemiótico, 2012.

[2] Erwin Kreyszig. *Advanced engineering mathematics*. John Wiley, 9th ed edición, 2006.

[3] Bernard Epstein Liang-shin Hahn. *Classical complex analysis*. Jones and Bartlett books in mathematics and computer science. Jones and Bartlett Publishers, 1st edición, 1996.

[4] Dennis G. Zill y Patrick D. Shanahan. *A First Course in Complex Analysis with Applications*. Jones and Bartlett Publishers, Inc., 1 edición, 2003.

Índice alfabético