ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Análsis Complejo
Hoja de Ejercicios 1

1. Si $|z| = 1$, pruebe que
$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = 1.$$
para cualesquiera números complejos a y b. Describa todas las propiedades de números complejos usadas.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones. Gráfique todas las soluciones, describa cada solución como número complejo y en forma polar.

   *a)** $z^5 - 2 = 0$ *b)* $z^4 + i = 0$.

3. Usando el Principio de Inducción demuestre que
$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n\,,$$
para todo $n = 2, 3, \cdots$.

4. Obtenga el conjugado del número complejo
$$\frac{(3+8i)^4}{(1+i)^{10}}.$$

5. Demuestre que si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $z\overline{w} + \overline{z}w = 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$.

6. Si $a, b \in \mathbb{C}$ pruebe la identidad del paralelogramo:
$$|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right).$$
Interprete geométricamente este resultado.

7.* Demuestre que si $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$ entonces, se tiene:
$$\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w).$$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Análsis Complejo

Hoja de Ejercicios 2

1. Demuestre que $\operatorname{sen}(iy) = i\sinh(y)$, donde, por definición,

$$\sinh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

2. Demuestre que $\cos(iy) = \cosh(y)$, donde, por definición,

$$\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}.$$

3. Exprese en la forma $a + bi$.

   a) e^{3-i}
   b) $\operatorname{sen}(1+i)$
   c) $\cos(2+3i)$

4. Dada la ecuación compleja $\cos z = \frac{1}{2}$, demuestre que $z_n = \pm\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, son las únicas soluciones, esto es, no hay soluciones fuera del eje real.

5. Encuentre todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z = 3$.

6. Sea $z_1 = a + ib$ y $z_2 = c + id$ números complejos, donde $\theta_1 = \arg(z_1)$ y $\theta_2 = \arg(z_2)$ donde $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi[$. Demuestre que

$$z_1^{z_2} = e^{|z_2| e^{i\theta_2}\left(\frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right)+i\theta_1\right)}.$$

7. Encuentre todos los valores de

   a) $\log(-i)$
   b) $\log(1+i)$
   c) $-i^i$
   d) $(1+i)^i$
   e) $(1+i)^{1+i}$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Análsis Complejo

Hoja de Ejercicios 3

1. Determine el conjunto más grande donde la función $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z + 1}{z^4 + 1}$ es continua. Justifique su respuesta.

2. Para cada una de las funciones, describa el dominio de definición.

   a) $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z + \bar{z}}$

   b) $f(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$

3. Escriba la función $f(z) = z^3 + 2z + 1$ en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

4. Suponga que $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$. Exprese $f(z)$ en términos de z.

5. Use la definición de límite para probar que $\lim\limits_{z \to z_0} \left(z^2 + 5\right) = z_0^2 + 5$.

6. Usando propiedades encuentre paso a paso los siguientes límites.

   a) $\lim\limits_{z \to 3i} \dfrac{z^2 + 9}{z - 3i}$

   b) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^2 + 1}{z^4 - 1}$

   c) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^3 + 3iz^2 + 7}{z^2 - i}$

   d) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^2 + 1}{z^2 + z + 1 - i}$

7. Analice la continuidad de la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 - 1}{z - 1} & , |z| \neq 1 \\ 3 & , |z| = 1 \end{cases}$$

   en los puntos $1, -1, i, -i$.

8. Sea $z \in \mathbb{C}$. Muestre que $\{z\}$ es un conjunto cerrado.

9. Sombree la siguiente región y determine si es abierto y/o conexo:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < |z + 1|\}.$$

10. Sea S un conjunto que consiste de todos los puntos z tal que $|z| < 1$ o $|z - 2| < 1$. Dibuje esta región y determine si es o no conexo justificando su respuesta.

1. Con la definición, encuentre la derivada de $w = f(z) = z^3 - 2z$ en el punto en el que:

   a) $z = z_0$.

   b) $z = -1$.

2. Muestre que que $\dfrac{d}{dz}\bar{z}$ no existe en ninguna parte, es decir, $f(z) = \bar{z}$ no es analítica en ninguna parte.

3. Se demostró en clase que si $f(z)$ es analítica en z_0, entonces es continua en z_0. Dé un ejemplo que muestre lo contrario de lo que se dice en este inciso no necesariamente es verdad.

4. Dada $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, encuentre:

   a) $\dfrac{dw}{dz}$.

   b) Dónde no es analítica.

5. Encuentre $f'(z)$ cuando

   a) $f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$, $z \neq -\dfrac{1}{2}$.

   b) $f(z) = e^{z^3}$.

   c) $f(z) = z^3 + z$.

6. Muestre que

   a) $f(z) = x - iy^2$ es diferenciable solamente en $y = -\dfrac{1}{2}$ y $f'(z) = 1$.

   b) $f(z) = x^2 + iy^2$ es diferenciable solamente cuando $x = y$ y $f'(z) = 2x$.

   c) $f(z) = yx + iy^2$ es diferenciable en $x = y = 0$ y $f'(z) = 0$.

   d) $f(z) = x^3 + i(1-y)^3$ es diferenciable solamente en $x = 0$, $y = 1$ y $f'(z) = 0$.

7. Para cada una de las siguientes funciones, determine el conjunto de puntos en los cuales es (i) diferenciable (ii) analítica. Encuentre la derivada donde exista.

   a) $f(z) = (x^3 + 3xy^2 - 3x) + i(y^3 + 3x^2y - 3y)$.

   b) $f(z) = \dfrac{2z^2+6}{z(z^2+4)}$.

8. Demuestre que $f(z) = e^{y^2-x^2}\,(\cos(2xy) - i\,\mathrm{sen}(2xy))$ es diferenciable en todo punto, analítica completa y $f'(z) = -2ze^{-z^2}$.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Análsis Complejo

Hoja de Ejercicios 5

1. Para cada uno de los siguientes dominios, haga su gráfico y determine si es simplemente conexo, multiplemente conexo o ninguno (no conexo).

   a) $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |2z - z| < 3\}$.

   b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg}(z) \neq 0\}$.

   c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| > 1, |z - 3| > 3 \text{ y } |z| < 10\}$.

   d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \neq 0\}$.

   e) $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ y } \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

   f) $F = \mathbb{C} - \{x + iy : 0 \leq x \leq 3\}$.

2. Encuentre la longitud de arco del arco de cicloide dado por $z(t) = a(t - \operatorname{sen} t) + ai(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ donde a es un número positivo real.

3. Sea γ la curva dada por $z(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Evalúe $\displaystyle\int_\gamma |z|^2 dz$.

4. Sea $f(z) = y - x - 3ix^2$ y γ dada por el segmento de línea $z = 0$ y $z = 1 + i$. Evalúe $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.

5. Sea γ dada por el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Evalúe

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z-2}{z} dz$.

   b) $\displaystyle\int_{-\gamma} |z^{1/2}| \exp\left(i\mathrm{Arg}\ z\right) dz$.

6. Sea $f(z) = x$. Evalúe $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ donde γ es el contorno del cuadrado unitario.

7. Demuestre que si $w : [a, b] \to \mathbb{C}$ entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left|\int_a^b w(t)dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|dt, \quad a \leq b < \infty.$$

1. Sea γ el semicírculo de $-3i$ a $3i$ en sentido antihorario. Muestre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = \pi i$.

2. Evalúe cada una de las siguientes integrales donde la trayectoria es un contorno arbitrario entre los límites de sus integraciones.

   a) $\displaystyle\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz.$ *b)* $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz.$ *c)* $\displaystyle\int_1^3 (z-3)^3\, dz.$

3. Muestre que si z^i es el valor principal, entonces

$$\int_\gamma z^i dz = -\frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i),$$

   donde γ es el semicírculo superior de $z=1$ a $z=-1$.

4. Sean f' y g' analíticas para todo z, y sea γ cualquier contorno que une los puntos z_1 y z_2. Muestre que

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_\gamma f'(z)g(z)dz.$$

5. Para cada una de las siguientes funciones f, describa el dominio de analiticidad y aplicando el Teorema de Cauchy-Goursant muestre que $\int_\gamma f(z)dz = 0$, donde γ es el círculo $|z| = 1$.

   a) $f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2} dz.$

   b) $f(z) = ze^{-z}.$

   c) ¿Es posible aplicar el Teorema de Cauchy-Goursant a la siguiente función?

$$f(z) = \frac{1}{(2z-i)^2}.$$

6. Sea γ el límite del dominio entre el círculo $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados se encuentran a lo largo de las rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Suponiendo que γ está orientado de modo que los puntos del dominio se encuentran a la izquierda de γ, establezca porqué $\displaystyle\int_\gamma f(z) = 0$.

a) $f(z) = \dfrac{z+2}{\operatorname{sen}(z/2)}$.

b) $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$.

7. Demuestre el Teorema de Morera.

8. Muestre que la fórmula integral de Cauchy implica el Teorema de Cauchy-Goursant.

9. Sea γ el límite de un rectángulo cuyos vértices son $-2-2i$, $2-2i$, $2+i$ y $-2+i$ en la dirección positiva. Evalúe cada una de las siguientes integrales.

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z-\frac{\pi i}{4}}dz$.

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z^4}dz$.

   c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(2z+1)^2}dz$.

   d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z^2+2}dz$.

1. Muestre que los coeficientes de la ecuación polinomial $P_n(z) = 0$ son reales y si z_0 es una raíz, entonces $\bar{z}_0$ también es una raíz.

2. Considere la serie geométrica $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} ac^j$, donde $|c| < 1$. Demuestre que esta serie converge a $\dfrac{a}{1-c}$.

3. Si $0 \leq r < 1$ muestre que

   a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} r^j \cos(j\theta) = \frac{1 - r\cos(\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta)}$. *b*) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} r^j \operatorname{sen}(j\theta) = \frac{r\operatorname{sen}(\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta)}$.

4. Analice la convergencia de las siguientes series.

   a) $\left\{\dfrac{3n + 2(i)^n}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$. *b*) $\left\{\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right\}_{n=0}^{+\infty}$. *c*) $\left\{\dfrac{3n + 7ni}{2n + 5i}\right\}_{n=0}^{+\infty}$.

5. Analice la convergencia de las siguientes series.

   a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j+1}$.

   b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-i)^j}{(j+1)^2}$.

   c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(1+3i)^j}{5j}$.

   d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2i^j}{5 + ij^2}$.

   e) $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i^j}{j+1}$.

6. Con la definición demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) = 1$.

7. Pruebe que para $|z| \leq 1$ la serie $z(1-z) + z^2(1-z) + z^3(1-z) + \cdots$ converge y encuentre su suma.

8. Demuestre que si $|z| \leq \dfrac{1}{2}$, la suma del problema 6 converge uniformemente a la suma z.

9. Determine si la serie del problema 6 converge uniformemente si $|z| \leq 1$

10. Demuestre que la sucesión $\dfrac{1}{1+nz}$ converge uniformemente a cero para todo z tal que $|z| \geq 2$.

11. Analice la convergencia puntual y uniforme de las series $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} f_j(z)$ sobre el dominio dado, donde $f_j(z)$ es:

    a) $\dfrac{z^j}{(j+1)(j+2)}$, $|z| \leq 1$.

    b) $\dfrac{1}{(z+j+1)^2}$, $\quad \mathrm{Re}(z) \geq 0$.

12. Pruebe que si $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente sobre un dominio S a $f(z)$ y cada $f_n(z)$ es continua sobre S, entonces $f(z)$ es continua sobre S.