1. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha^3 = -1$ y $\alpha \neq -1$. Calcular el valor de
$$(\alpha^2(\alpha-1)^2)^{-1}.$$

Solución. Se tiene que $\alpha^3 + 1 = 0$, por lo tanto
$$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1) = 0,$$
como $\alpha \neq -1$, se tiene que
$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0.$$
Ahora, calculando, se tiene que
$$\begin{aligned}(\alpha^2(\alpha-1)^2)^{-1} &= (\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2)^{-1}\\ &= (-\alpha + 2 + \alpha^2)^{-1}\\ &= (\alpha^2 - \alpha + 1 + 1)^{-1}\\ &= (1)^{-1}\\ &= 1.\end{aligned}$$
□

2. Resuelva la ecuación $\operatorname{senh}(z) = 0$.

Solución. Tomemos $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Se tiene que
$$\begin{aligned}\operatorname{senh}(z) = 0 &\iff \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0\\ &\iff e^z = e^{-z}\\ &\iff e^{2z} = 1\\ &\iff e^{2x+2iy} = 1\\ &\iff e^{2x}(\cos(2y) + i\operatorname{sen}(2y)) = 1\\ &\iff e^{2x}\cos(2y) = 1 \quad \text{y} \quad e^{2x}\operatorname{sen}(2y) = 0.\end{aligned}$$
Por lo tanto, si $z = x + iy$ es solución de la ecuación, se tiene que
$$e^{2x}\cos(2y) = 1 \qquad \text{y} \qquad e^{2x}\operatorname{sen}(2y) = 0.$$
Como $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $e^{2x} > 0$, por lo tanto
$$\cos(2y) > 0 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(2y) = 0,$$
de donde se obtiene que $2y = 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $y = k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Así, se tiene que
$$e^{2x} = e^{2x}\cos(2k\pi) = e^{2x}\cos(2y) = 1,$$
por lo tanto, $2x = 0$, es decir, $x = 0$.

Por lo tanto, todas soluciones de la ecuación son los números complejos de la forma $z = ik\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. □

3. Sean $a, b, z \in \mathbb{C}$, muestre que $z^{a+b} \subsetneq z^a \cdot z^b$.

Demostración. Recordemos que para $z \in \mathbb{C}$, se tienen las siguientes igualdades

$$\ln(z) = \{w \in \mathbb{C} : \exp(w) = z\} = \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} = \{\operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Además, para $x \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$z^x = \exp(x \cdot \ln(z)) = \{\exp(xw) : \exp(w) = z\} = \{\exp(x(\operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi)) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ahora, sean $a, b, z \in \mathbb{C}$. Tomemos $w \in z^{a+b}$, se tiene que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{aligned} w &= \exp((a+b)(\operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi)) \\ &= \exp(a(\operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi)) \exp(b(\operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi)). \end{aligned}$$

Dado que

$$\exp(a(\operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi)) \in z^a \qquad \text{y} \qquad \exp(b(\operatorname{Ln}(z) + 2ik\pi)) \in z^b,$$

se concluye que $w \in z^a \cdot z^b$. Es decir $z^{a+b} \subseteq z^a \cdot z^b$.

Por otro lado, tomemos $z = e$, $a = i$ y $b = -i$, se tiene que

$$z^{a+b} = e^{i-i} = e^0 = \{\exp(0(\operatorname{Ln}(e) + 2ik\pi)) : k \in \mathbb{Z}\} = \{\exp(0)\} = \{1\}.$$

Además,

$$z^a = e^i = \{\exp(i(\operatorname{Ln}(e) + 2ik\pi)) : k \in \mathbb{Z}\} = \{\exp(i)\exp(-2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\},$$

y

$$z^b = e^{-i} = \{\exp(-i(\operatorname{Ln}(e) + 2ik\pi)) : k \in \mathbb{Z}\} = \{\exp(-i)\exp(2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

de donde

$$\begin{aligned} z^a \cdot z^b &= \{(\exp(i)\exp(-2k_1\pi))(\exp(-i)\exp(2k_2\pi)) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\exp(2(k_2 - k_1)\pi : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\exp(2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Así, se obtuvo que en este caso $z^{a+b} \subsetneq z^a \cdot z^b$, es decir, $e^0 \subsetneq e^i \cdot e^{-i}$, por lo tanto, en general, no se tiene la igualdad. □

4. Sean $a, b, z \in \mathbb{C}$, muestre que $z^{ab} \subsetneq (z^a)^b$.

Demostración. Recordemos que para $z \in \mathbb{C}$, se tienen las siguientes igualdades

$$\ln(z) = \{\ln|z| + i(\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} = \ln|z| + i\arg(z)$$

Además, para $w \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$z^w = \exp(w \cdot \ln(z)) = \exp\Big(w \cdot \big(\ln|z| + i\arg(z)\big)\Big).$$

Ahora, sean $a, b, z \in \mathbb{C}$. Notemos que

$$z^a = \exp\Big(a \cdot \big(\ln|z| + i\arg(z)\big)\Big)$$

y que

$$(z^a)^b = \exp\Big(b \cdot \big(\ln|z^a| + i\arg(z^a)\big)\Big).$$

Con esto, si $a = a_1 + ia_2$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned} z^a &= \exp\Big(a \cdot \big(\ln|z| + i\arg(z)\big)\Big) \\ &= \exp\Big((a_1 + ia_2) \cdot \big(\ln|z| + i\arg(z)\big)\Big) \\ &= \exp\Big(\big(a_1\ln|z| - a_2 \cdot \arg(z)\big) + i\big(a_2\ln|z| + a_1 \cdot \arg(z)\big)\Big) \\ &= \exp\Big(\big(a_1\ln|z| - a_2 \cdot \arg(z)\big)\Big) \cdot \exp\Big(i\big(a_2\ln|z| + a_1 \cdot \arg(z)\big)\Big), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$|z^a| = \exp\Big((a_1 \ln|z| - a_2 \cdot \arg(z)) \Big),$$

y

$$\arg(z^a) = a_2 \ln|z| + a_1 \cdot \arg(z) + 2\pi \cdot \mathbb{Z}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
(z^a)^b &= \exp\Big(b \cdot \big(\ln|z^a| + i \arg(z^a) \big) \Big) \\
&= \exp\left(b \cdot \left(\ln\Big(\exp\Big((a_1 \ln|z| - a_2 \cdot \arg(z)) \Big) \Big) + i(a_2 \ln|z| + a_1 \cdot \arg(z) + 2\pi \cdot \mathbb{Z}) \right) \right) \\
&= \exp\Big(b \cdot (a_1 \ln|z| - a_2 \cdot \arg(z) + ia_2 \ln|z| + ia_1 \cdot \arg(z) + 2i\pi \cdot \mathbb{Z}) \Big) \\
&= \exp\Big(b \cdot (a \ln|z| + ia \cdot \arg(z) + 2i\pi \cdot \mathbb{Z}) \Big) \\
&= \exp\Big((ab) \cdot \big(\ln|z| + i \cdot \arg(z) \big) + 2i\pi b \cdot \mathbb{Z} \Big) \\
&= \exp\Big((ab) \cdot \big(\ln|z| + i \cdot \arg(z) \big) \Big) \cdot \exp(2i\pi b \cdot \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Por otro lado, dado que

$$z^{ab} = \exp\Big((ab) \cdot \big(\ln|z| + i \arg(z) \big) \Big)$$

y que $\{1\} \subseteq \exp(2i\pi b \cdot \mathbb{Z})$, se tiene que

$$\exp\Big((ab) \cdot \big(\ln|z| + i \arg(z) \big) \Big) \subseteq \exp\Big((ab) \cdot \big(\ln|z| + i \cdot \arg(z) \big) \Big) \cdot \exp(2i\pi b \cdot \mathbb{Z}),$$

es decir, $z^{ab} \subseteq (z^a)^b$. □

5. Sean $a, z \in \mathbb{C}$, encontrar una relación entre $a \cdot \ln(z)$ y $\ln(z^a)$.

Solución. Por el ejercicio anterior, si $a = a_1 + ia_2$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$|z^a| = \exp\Big((a_1 \ln|z| - a_2 \cdot \arg(z)) \Big),$$

y

$$\arg(z^a) = a_2 \ln|z| + a_1 \cdot \arg(z) + 2\pi \cdot \mathbb{Z}.$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\ln(z^a) &= \ln|z^a| + i \arg(z^a) \\
&= \ln\Big(\exp\Big((a_1 \ln|z| - a_2 \cdot \arg(z)) \Big) \Big) + i(a_2 \ln|z| + a_1 \cdot \arg(z) + 2\pi \cdot \mathbb{Z}) \\
&= a_1 \ln|z| - a_2 \cdot \arg(z) + ia_2 \ln|z| + ia_1 \cdot \arg(z) + 2i\pi \cdot \mathbb{Z} \\
&= a \ln|z| + ia \cdot \arg(z) + 2i\pi \cdot \mathbb{Z} \\
&= a \cdot \big(\ln|z| + i \cdot \arg(z) \big) + 2i\pi \cdot \mathbb{Z} \\
&= a \cdot \ln(z) + 2i\pi \cdot \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Ahora, dado que $\{0\} \subseteq 2i\pi \cdot \mathbb{Z}$, se tiene que

$$a \cdot \ln(z) \subseteq a \cdot \ln(z) + 2i\pi \cdot \mathbb{Z} = \ln(z^a).$$

□