## Escuela Politécnica Nacional

### Ecuaciones Diferenciales Ordinarias • Prueba del Primer Bimestre

Martes 13 de noviembre de 2018 (90 minutos) — Departamento de Formación Básica

1. Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= 2\sqrt{-x}, \\ x(t_0) &= a. \end{cases}$$

   a) Determine los valores de $a$ para los cuales se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad local.

   b) Obtenga la única solución que pasa por el punto $(0, a)$, donde los valores de $a$ son los obtenidos en el literal anterior.

2. Dada la ecuación diferencial:

$$(t^2 + ty)y' + (3ty + y^2) = 0,$$

   a) Pruebe que la ecuación tiene solución.

   b) Demuestre que la ecuación no es exacta.

   c) Encuentre un factor integrante de modo que la ecuación original sea equivalente a una ecuación exacta.

   d) Encuentre la solución de la ecuación diferencial exacta obtenida en el literal anterior.

3. Dada la ecuación

$$(x^2 + 2xy + 2y^2)dx + (x^2 + 4xy + 5y^2)dy = 0,$$

   a) Demuestre que posee al menos una solución.

   b) Encuentre la solución general de la ecuación.

   c) Demuestre que existe un $a$ tal que la función

$$\begin{aligned} \phi\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax, \end{aligned}$$

   donde $I$ es un intervalo adecuado, es una solución de la ecuación de modo que $\phi(0) = 0$.

4. Considere la ecuación

$$x' + kx = 1,$$

   donde $k$ es una constante.

   a) ¿Para que valores de $k$ todas las soluciones de esta ecuación tenderán a 2 cuando $t$ tienda a infinito?

   b) ¿Existe algún valor de $k$ para el cual exista una solución no constante $x$ tal que $x(t)$ tienda a $-3$ cuando $t$ tienda a infinito?

1. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, considere el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= 9t^2 \sqrt[3]{x^2(t)}, \\ x(a) &= b. \end{cases}$$

   *a*) Determine todos los valores de $a$ y $b$ de modo que el problema posee solución única.

   *b*) ¿Tiene solución este problema en el punto $(0,0)$? Explique claramente su respuesta.

   *c*) Si la respuesta a la pregunta anterior fuera afirmativa, encuentre esa solución.

2. *a*) Escriba con precisión la definición de **solución singular** de una ecuación diferencial de primer orden.

   *b*) Determine la solución general de la ecuación

$$x(t) = tx'(t) - \frac{1}{x'(t)}$$

   y todas las soluciones singulares de esta ecuación en el caso de que existieran.

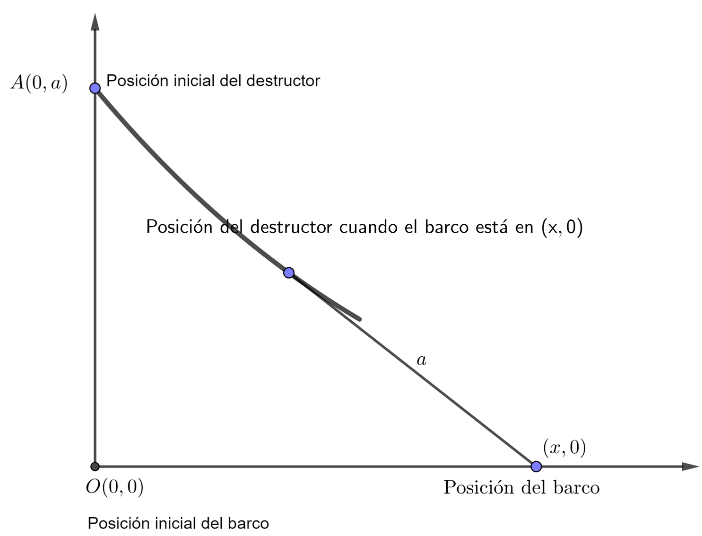
3. En un tanque de 100 litros de capacidad, se mezclan 1 kilogramo de sal y 30 litros de agua. Se añade agua al tanque con velocidad de $3b$ litros por segundo, donde $b > 0$ y se bota la mezcla con un flujo de $2b$ litros por segundo. Asuma que la mezcla en el tanque se mantiene homogénea.

   *a*) Si se sabe que, después de 40 segundos desde que se empezó a agregar agua y expulsar la mezcla, la mitad del tanque está lleno, determine el tiempo que tardará el tanque en llenarse y los flujos de entrada y salida en ese momento.

   *b*) Demuestre la cantidad y la concentración de sal en el tanque en cualquier instante.

   *c*) ¿Llegará un momento en el cual quede únicamente agua pura en el tanque? Si fuera así, determine ese momento.

4. En un problema de persecusión, el **blanco** se mueve a lo largo de una curva dada y otro objeto, el **perseguidor**, persigue al primero; esto es, en todo instante el perseguidor se mueve en la dirección del blanco:



Suponga que el blanco es un *barco* que se mueve a lo largo de una recta y que el *destructor* que se mueve de manera que la distancia entre este y el barco es constante, digamos que es $a > 0$.

*a*) Si $(a, 0)$ representa la posición del barco en un momento dado y $y(x)$ es la ordenada de la posición del destructor en ese mismo momento, deduzca que $y$ satisface el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{\sqrt{a^2 - y^2(x)}} \\ y(0) = a. \end{cases}$$

*b*) Demuestre que el problema anterior tiene solución única.

*c*) Encuentre la solución del problema, Para integrar la ecuación recurra al siguiente cambio de variable:

$$y = a \cos z$$

y recuerde que

$$\int \sec z \, dz = \ln(\sec z + \tan z).$$

---

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS • PRUEBA DEL SEGUNDO BIMESTRE**

Martes 22 de enero de 2019 (110 minutos) Departamento de Formación Básica

1. *a*) Escriba el teorema de reducción de orden.

   *b*) Dado $I = \,]0, +\infty[$, considere la ecuación diferencial

   $$t^2x''(t) + tx'(t) + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x(t) = 0.$$

   Conociendo que una solución de esta ecuación es $x_1(t) = t^{-1/2}\cos(t)$ para cada $t \in I$, utilice el teorema de reducción de orden para obtener una solución $x_2$ de la ecuación diferencial dada y que sea linealmente independiente a $x_1$.

2. Dada la ecuación diferencial

   $$at^2x''(t) + btx'(t) + cx(t) = 0 \tag{1}$$

   para $t > 0$.

   *a*) Resolver (1) para $a = 2$, $b = -6$ y $c = 8$.

   *b*) Encuentre una solución particular de

   $$2t^2x''(t) - 6tx'(t) + 8x(t) = t^2.$$

3. Dada la ecuación diferencial:

   $$x'' + 2x' + 5x = 8te^t.$$

   *a*) Encuentre la solución homogénea de dicha ecuación.

   *b*) Utilice el método de coeficientes indeterminados para hallar una solución particular de la ecuación.

   *c*) Encuentre su solución general y la solución para cuando $x(0) = 1$ y $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)e^{\pi/4}$.

4. Considere la ecuación diferencial

   $$(t^2 + 1)x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 6(t^2 + 1)^2. \tag{2}$$

   *a*) Muestre que posee solución única definida en $\mathbb{R}$.

   *b*) Determinar el Wronskiano $W(t)$ de cualquier par de soluciones de

   $$(t^2 + 1)x''(t) - 2tx'(t) + 2x(t) = 0, \tag{3}$$

   para hacerlo utilice la fórmula de Abel junto con la condición $W(0) = 1$.

   *c*) Sean

   $$\begin{aligned} x_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^2 - 1. \end{aligned}$$

   Muestre que $x_1$ y $x_2$ son soluciones de la ecuación diferencial (3) y obtenga su solución general.

   *d*) Utilice el método de variación de parámetros para determinar una solución particular de (2).

## ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
### ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS • EXAMEN DEL SEGUNDO BIMESTRE

Viernes 08 de febrero de 2019 (120 minutos) — Departamento de Formación Básica

1. *a*) El movimiento de un cuerpo de masa $m$ sujeto a un resorte de constante elástica $k$ y con fuerza de amortiguamiento $\beta$ veces a la velocidad está descrito por la ecuación diferencial:

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = 0, \tag{1}$$

donde $2\lambda = \dfrac{\beta}{m}$, $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ y $x(t)$ es la elongación del resorte para todo tiempo $t$.

1) Muestre que para $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ la solución de (1) está dada por:

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right) + C_2 e^{-\lambda t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,t\right) \tag{2}$$

para cada $t \geq 0$ con $C_1$ y $C_2$ son constantes.

2) Muestre que la ecuación (2) puede escribirse como una onda sinusoidal tomando

$$C_1 = A\operatorname{sen}(\phi) \qquad \text{y} \qquad C_2 = A\cos(\phi)$$

y llamando $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$. Esboce dicho resultado.

3) Describa el comportamiento descrito por la expresión encontrada en el literal a2) (tipo de oscilaciones, amplitud de las oscilaciones, comportamiento cuando $t \to +\infty$, frecuencia de esas oscilaciones). ¿Qué significa (físicamente) que $\lambda^2 - \omega^2 < 0$? ¿Qué representa el parámetro $\lambda$ en la amplitud de las oscilaciones encontradas en el literal b)? ¿De qué dependerá físicamente que las amplitudes de estas oscilaciones decrezcan más rápida o más lentamente?

*b*) Considere que sobre el oscilador no existe la acción de una fuerza de amortiguamiento si no la acción de una fuerza externa sinusoidal de frecuencia $\omega = 2$. El movimiento del oscilador para $\dfrac{k}{m} = 4$ está descrito por la ecuación:

$$x''(t) + 4x(t) = \operatorname{sen}(2t)$$

Encuentre una expresión para la elongación del resorte $x(t)$ para cualquier tiempo y describa el comportamiento de dichas oscilaciones. Esboce el resultado.

2. Dada la ecuación:

$$y'''(x) + 6y''(x) + 12y'(x) + 8y(x) = 8e^{-2x}. \tag{3}$$

*a*) Utilizando el teorema de Abel, determinar el Wronskiano $W(x)$ de cualquier par de soluciones de la correspondiente ecuación no homogénea, para esto, considere que $W(0) = 2$.

*b*) Determinar la solución general de la correspondiente ecuación homogénea de (3).

*c*) Utilizando el método de coeficientes indeterminados, determinar una solución particular de (3).

*d*) Utilizando el método de variación de parámetros, determinar una solución particular de (3).

3. *a*) Utilizando la definición de transformada de Laplace, mostrar que:

$$\mathscr{L}\{\operatorname{senh}(t)\}(s) = \frac{1}{s^2-1}$$

para cada $s > 1$.

*Sugerencia:* Recuerde que $\operatorname{senh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$.

*b*) Resuelva el problema de valor inicial, utilizando la transformada de Laplace:

$$x''(t) - 4x(t) = \operatorname{senh}(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

1. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) &= y^2(t), \\ y(0) &= n. \end{cases}$$

   *a*) Determine todos los valores de $n$ tales que el problema de valor inicial posea solución única.
   *Observación:* Recuerde que para estos valores de $n$ la aplicación del teorema de existencia y unicidad local asegura la existencia de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que la solución única está definida.

   *b*) ¿Qué se puede decir de la solución que pasa por $(0,1)$?, si existe determínela.

   *c*) ¿Qué se puede decir de la solución que pasa por $(0,0)$?, si existe determínela.

2. Un tanque está lleno con 40 galones de agua pura. Una solución de agua salada, con 1 libra de sal por galón entra al tanque a 2 gal/min y la mezcla bien agitada sale a la misma tasa

   *a*) Encuentre la cantidad de sal que se encuentra en la solución que está dentro del tanque a cualquier tiempo.

   *b*) ¿Cuándo el agua que sale del tanque tendrá 1/2 lb de sal por galón?

3. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial:

$$x'''(t) - x'(t) = t - 1$$

   Para esto, determine primero la solución homogénea y luego determine una solución particular:

   *a*) Utilizando el método de coeficientes indeterminados.

   *b*) Utilizando el método de variación de los parámetros.

   *c*) Muestre que la solución general que se obtiene a partir de ambas métodos es en realidad la misma.

4. Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) &= 2e^t - e^{-2t}, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0. \end{cases}$$

   *a*) Halle la solución de la ecuación homogénea.

   *b*) Halle la solución particular por el método de coeficientes indeterminados.

   *c*) Halle la solución general utilizando la transformada y transformada inversa de Laplace.