CLUB DE MATEMÁTICA EPN

EDO • FORMULARIO

LAPLACE

Julio 2019 Mat. Andrés Merino

1. DEFINICIONES

1. ***Transformada de Laplace:***

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

2. ***Función Gamma:***

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

3. ***Función Beta:***

$$\beta(x,y) = \int_0^{1} u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du.$$

4. ***Función de Heaviside o función de salto unitario:***

$$u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > a, \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$$

5. ***Convolución:***

$$f(t) * g(t) = \int_0^{t} f(u) g(t-u)\, du.$$

6. ***Delta de Dirac***

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = a, \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}.$$

2. PRINCIPALES TRANSFORMADAS

1. $\mathcal{L}\left[\cos(at)\right](s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}, \qquad s > 0,$

2. $\mathcal{L}\left[\operatorname{sen}(at)\right](s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}, \qquad s > 0,$

3. $\mathcal{L}\left[\cosh(at)\right](s) = \dfrac{s}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|,$

4. $\mathcal{L}\left[\operatorname{senh}(at)\right](s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}, \qquad s > |a|,$

5. $\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) = \dfrac{1}{s-a}, \qquad s > a,$

6. $\mathcal{L}\left[t^{\alpha}\right](s) = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \qquad \alpha > -1 \text{ y } s > 0,$

7. $\mathcal{L}\left[t^{n}\right](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N} \text{ y } s > 0,$

8. $\mathcal{L}\left[\delta(t-a)\right](s) = e^{-as}, \qquad \text{para todo } s,$

9. $\mathcal{L}\left[u(t-a)\right](s) = \dfrac{e^{-as}}{s}, \qquad s > 0.$

3. Propiedades

3.1 Función Gamma

1. $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$

2. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$

3. $\Gamma(n+1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Función Beta

1. $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$

3.3 Función de Heaviside o función de salto unitario

1.

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si} \quad t < t_1, \\ f_2(t) & \text{si} \quad t_1 \le t < t_2, \\ f_3(t) & \text{si} \quad t_2 \le t < t_3, \\ \vdots & \quad \vdots \end{cases}$$

$$f(t) = f_1(t) + u(t-t_1)[f_2(t) - f_1(t)] + u(t-t_2)[f_3(t) - f_2(t)] + \cdots$$

3.4 Convolución

C1. $[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)],$

C2. $f(t) * g(t) = g(t) * f(t).$

3.5 Delta de Dirac

1. $u'(t-a) = \delta(t-a)$,

2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\delta^{(n)}(t-t_0)\,dt = \begin{cases} f^{(n)}(t_0) & \text{si } t_0 \in (a,b), \\ 0 & \text{si } t_0 \notin (a,b). \end{cases}$

3.6 Transformada de Laplace

1. ***Linealidad:*** La transformada de Laplace tiene inversa, y ambas son lineales.

2. ***Transformada de la derivada:***

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[f'(t)\right](s) &= s\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) - f(0), \\ \mathcal{L}\left[f''(t)\right](s) &= s^2\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) - sf(0) - f'(0), \\ \mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s) &= s^n\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} f^{(i-1)}(0). \end{aligned}$$

3. ***Transformada de la integral:***

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[f(t)\right](s),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\varphi(s)\right](t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t)\,dt.$$

4. ***Traslación en la base:***

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](s-a),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\varphi(s-a)\right](t) = e^{at}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t).$$

5. ***Derivada de la transformada:***

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)\right),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\varphi^{(n)}(s)\right](t) = (-1)^n\, t^n\,\mathcal{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t).$$

6. ***Traslación:***

$$\mathcal{L}\left[u(t-a)f(t-a)\right](s) = e^{-as}\,\mathcal{L}\left[f(t)\right](s),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-as}\varphi(s)\right](t) = u(t-a)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t-a).$$

7. ***Función periódica:*** (con periodo p)

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](s) = \frac{\displaystyle\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-ps}}.$$

8. ***Convolución:***

$$\mathcal{L}\left[f(t)*g(t)\right](s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right](s)\mathcal{L}\left[g(t)\right](s),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\varphi(s)\psi(s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t) * \mathcal{L}^{-1}\left[\psi(s)\right](t).$$