1. Estudie la paridad de las siguientes funciones.

   a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^5 + 7x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

   c)
$$\begin{aligned} f : [-1, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Solución. Recordemos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ con A simétrico, es par: si para todo $x \in A$,

$$f(-x) = f(x),$$

e impar: si para todo $x \in A$,

$$f(-x) = -f(x).$$

a) Como el dominio de la función es simétrico, si $x \in \mathbb{R}$ por la definición de f se tiene que

$$f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x).$$

Por tanto, como $f(-x) = f(x)$, entonces la función f es impar.

b) Como el dominio de la función es simétrico, para verificar si la función es par o impar, se debe evaluar la imagen bajo f de cada $x \in \mathbb{R}$, es decir, si $x \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f(-x) = -x^5 + 7x^2 + 3x + 5,$$

que no es igual ni a $f(x)$ ni a $-f(x)$, por tanto, la función f no ni par ni impar.

c) Para un x real, a pesar de que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, la función f no es ni par ni impar debido a que no está definida sobre un intervalo simétrico.

□

2. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & \text{si } x \leq 2, \\ 3x - 2 & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

analice su continuidad.

Solución. Notemos que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ahora, debemos verificar si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, dado que $f(2) = 5$, debemos comprobar si

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

para esto determinemos los límites laterales de la función f en 2, que verifican

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3 - 2x + 1 = 5 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3x - 2 = 4.$$

Dado que los límites laterales de la función f en 2 no son iguales, la función no es continua en 2, a pesar de ser continua en el resto de su dominio. Finalmente, f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. $\square$

3. Considere la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_1^x t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\, dt$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Determine $f(1)$, $f'(1)$ y $f''(1)$.

Solución. Para determinar las derivadas de f vamos a utilizar el teorema fundamental del cálculo, para esto, notemos que la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(z) = z^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}z\right)$ para cada $z \in \mathbb{R}$, es una función continua y por la definición de f, por la aplicación del teorema fundamental del cálculo tenemos que la derivada de f está dada por

$$f'(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Notemos ahora, que la función f' es derivable para cada $x \in \mathbb{R}$, cuya derivada está definida por

$$f''(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}x^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Luego $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ y $f''(1) = 2$. $\square$

4. Considere las funciones

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = (3x+2)^3 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow [-1,-1] \\ x &\longmapsto g(x) = \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

a) Muestre que la composición de f con g existe y determínela.

b) Calcule $(f \circ g)'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. *a*) Notemos que $\operatorname{rec} g = [-1,1] \subseteq \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. Entonces, por el teorema de composición de funciones, la composición de f con g existe y si $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\operatorname{sen}(x)) \\ &= (3\operatorname{sen}(x) + 2)^3. \end{aligned}$$

Luego, $(f \circ g)(x) = (3\operatorname{sen}(x) + 2)^3$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

b) Notemos que f y g son derivables en todos los reales, más aún, f lo es en $g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces, por el teorema de la regla de la cadena tenemos que si $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= 9(3\operatorname{sen}(x) + 3)^2 \cos(x). \end{aligned}$$

Luego, $(f \circ g)'(x) = 9(3\operatorname{sen}(x) + 2)^2 \cos(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

5. Suponga que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y considere la función $f\colon I \to \mathbb{R}$ tal que verifica la ecuación

$$x^2 f(x) + x f^2(x) = 1$$

para todo $x \in I$. Si f es una vez derivable, determine $f'(x)$ para todo $x \in I$.

Solución. Tomando $x \in I$ y derivando la ecuación $x^2 f(x) + x f^2(x) = 1$ respecto a x tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 f(x) + x f^2(x)) &= \frac{d}{dx}(1), \\ 2x f(x) + x^2 f'(x) + f^2(x) + 2x f(x) f'(x) &= 0. \end{aligned}$$

A partir de la ecuación anterior obtenemos

$$f'(x) = -\frac{2x f(x) + f^2(x)}{x^2 + 2x f(x)},$$

para cada $x \in I$ tal que $x^2 + 2x f(x) \neq 0$. □

6. Dados $n \in \mathbb{N}^*$ y la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = (ax+b)^{2n} \end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^*$. Determine $f^{(m)}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, con $m \in \mathbb{N}^*$.

Solución. Notemos que una función polinomial es derivable en $\mathbb{R}$, por lo cual, f es derivable y también lo son cada una de sus sucesivas derivadas. Calculemos la primera derivada de f, la cual está dada por

$$f'(x) = 2na(ax+b)^{2n-1},$$

que se puede escribir como:

$$f'(x) = \frac{(2n)!}{(2n-1)!} a(ax+b)^{2n-1}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. De manera similar se calculan las siguientes derivadas y se tiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2n)!}{(2n-2)!} a^2(ax+b)^{2n-2}, \\ f'''(x) &= \frac{(2n)!}{(2n-3)!} a^3(ax+b)^{2n-3} \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Se generaliza una expresión para la m-ésima derivada de f:

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(2n)!}{(2n-m)!} a^m (ax+b)^{2n-m}, & si \quad m \leq 2n, \\ 0, & si \quad m > 2n, \end{cases} \tag{1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostremos ahora, que la fórmula dada por (1) es verdadera, para esto utilicemos el Principio de Inducción Matemática.

a) Si derivamos f obtenemos

$$f'(x) = \frac{(2n)!}{(2n-1)!} a(ax+b)^{2n-1},$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, que es el mismo resultado que se obtiene si en (1) reemplazamos m por 1. Luego, la fórmula se verifica para $m = 1$.

b) Tomando $m = k$ con $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $k < 2n$, vamos a suponer que

$$f^{(k)}(x) = \frac{(2n)!}{(2n-k)!} a^k (ax+b)^{2n-k}, \tag{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ es verdad.

Ahora, vamos a probar que para $m = k + 1$, la expresión

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(2n)!}{(2n-k-1)!} a^{k+1} (ax+b)^{2n-k-1},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ es verdadera.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, derivando (2) respecto a x obtenemos que

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (2n-k) \frac{(2n)!}{(2n-k)!} a^k a (ax+b)^{2n-k-1} \\ &= \frac{(2n)!}{(2n-k-1)!} a^k a (ax+b)^{2n-k-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por lo mostrado en el literal (a) y (b), se concluye que la m-ésima derivada de f está dada por (1) para cada $m \in \mathbb{N}^*$. □

7. Dados $\alpha \in \mathbb{R}^*$ y la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = \cos(\alpha x). \end{aligned}$$

Determine $f^{(m)}(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$, con $m \in \mathbb{N}^*$.

Solución. Notemos que la composición de la función coseno con una función polinomial es derivable, por tanto, f es derivable y también lo son cada una de sus sucesivas derivadas. Se calcula la primera derivada

$$f'(x) = -\alpha \operatorname{sen}(\alpha x),$$

que se puede escribir como

$$f'(x) = \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha x\right)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. De manera similar se calculan las siguientes derivadas y se tiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= \alpha^2 \cos\left(\frac{2\pi}{2} + \alpha x\right), \\ f'''(x) &= \alpha^3 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha x\right) \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Se generaliza una expresión para la m-ésima derivada de f:

$$f^{(m)} = \alpha^m \cos\left(\frac{m\pi}{2} + \alpha x\right) \tag{3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Mostremos ahora, que la fórmula dada por (3) es verdadera, para esto utilicemos el Principio de Inducción Matemática.

a) Si derivamos f se obtiene

$$f'(x) = \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha x\right)$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, que es el mismo resultado que se obtiene si en (3) reemplazamos m por 1. Luego, la fórmula se verifica para $m = 1$.

b) Tomando $m = k$ con $k \in \mathbb{N}^*$, vamos a suponer que

$$f^{(k)} = \alpha^k \cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha x\right) \tag{4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ es verdad.

Ahora se probará que para $m = k+1$, la expresión

$$f^{(k+1)} = \alpha^{k+1} \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2} + \alpha x\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ es verdadera.
Derivando (4) respecto a x obtenemos

$$\begin{aligned} f^{(k+1)} &= -a^{k+1} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha x\right) \\ &= a^{k+1} \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2} + \alpha x\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por lo mostrado en el literal (a) y (b), se concluye que la m-ésima derivada de f está dada por (3) para cada $m \in \mathbb{N}^*$.

□

8. Considere la función

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 4x+y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Muestre que f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

b) Determine $\ker f$.

c) Calcule la matriz de representación de f respecto de la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$, tomando la base B tanto para el espacio de salida como para el espacio de llegada.

Solución. *a*) Para mostrar la linealidad de la función, tomemos $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+3(x_2+y_2) \\ 4(x_1+y_1)+(x_2+y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+3x_2 \\ 4x_1+x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+3y_2 \\ 4y_1+y_2 \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1+3\alpha x_2 \\ 4\alpha x_1+\alpha x_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha\begin{pmatrix} x_1+3x_2 \\ 4x_1+x_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego, f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

b) Por definición del núcleo de una aplicación lineal tenemos que

$$\begin{aligned}
\ker f &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + 3x_2 = 0, 4x_1 + x_2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 = 0, x_2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

c) Tomemos $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y determinemos sus coordenadas respecto de la base B, es decir, buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior nos lleva al sistema siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

cuya solución es

$$\alpha = x, \quad \text{y} \quad \beta = x + y.$$

Luego, el vector de coordenadas de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto de la base B es

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Determinemos ahora las coordenadas respecto de la base B de las imágenes respecto a f de los elementos de la base B:

$$\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_B = \left[f\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\left[f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \left[f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz de representación M de f respecto de la base B es

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

□

9. Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, determinar:

a) Su polinomio característico,

b) sus valores y vectores propios.

Solución. *a*) Determinar los valores propios asociados a la matriz A significa hallar los λ que satisfagan la ecuación o polinomio característico de la matriz A, es decir los valores de λ para los cuales:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

donde $I \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ es la matriz identidad. Para esto formamos primero la matriz $(A - \lambda I)$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

y luego calculamos el determinante de esta matriz:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 6 + 12\lambda - \lambda^3.$$

Por tanto, el polinomio característico de la matriz A está dado por:

$$6 + 12\lambda - \lambda^3 = 0.$$

b) Los valores de λ que satisfacen el polinomio característico, es decir lo valores propios de la matriz A son:

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = -2$$

c) Los vectores propios x asociados a cada uno de estos valores propios λ corresponden a los vectores que satisfacen:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

1) Determinemos el vector propio x asociado al valor propio $\lambda_1 = 4$, en primer lugar, tenemos que

$$(A - 4I) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

la matriz ampliada del correspondiente sistema es

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que luego de operar sobre filas y columnas, se obtiene el siguiente sistema lineal:

$$x_1 - 1/2x_3 = 0, \quad x_2 - 1/2x_3 = 0$$

por tanto, el vector propio x asociado al valor propio λ_1 está dado por:

$$x = \begin{pmatrix} -1/2x_3 \\ -1/2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

para todo $x_3 \neq 0$.

2) De forma similar, el vector propio x asociado al valor propio $\lambda_2 = -2$, está dado por:

$$x = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$x = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

para todo $x_2, x_3 \neq 0$.

$\square$

Los ejercicios para la clase CP son: 1a, 1c, 4, 6, y 7.