1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1.1 Notación

A lo largo del curso, y al menos que se indique lo contrario, se considerará la siguiente notación:

- $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z}$ representa el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{R}$ representa el conjunto de los números reales.
- $\mathbb{C}$ representa el conjunto de los números complejos.
- Si a, $b \in \mathbb{R}$, entonces:
  - $[a,b]$ representa al intervalo cerrado $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$,
  - $]a,b[$ representa al intervalo abierto $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$,
  - $]a,b]$ representa al intervalo $\{t \in \mathbb{R} : a < t \leq b\}$,
  - $[a,b[$ representa al intervalo $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t < b\}$.

  Además, I representa a un intervalo de $\mathbb{R}$.
- Dado $n \in \mathbb{N}^*$. Si x, $y \in \mathbb{R}^n$, entonces $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, representa al producto escalar euclideano en $\mathbb{R}^n$. La correspondiente norma euclideana está notada por $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$.
- Dados $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$, la derivada parcial respecto a la i-ésima componente se representará por $D_i f$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.
- Dados n, $m \in \mathbb{N}^*$. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R})$, o simplemente $\mathcal{C}(\Omega)$, es el conjunto de todas las funciones continúas definidas sobre Ω con valores reales $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$. De forma similar $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es el conjunto de todas las funciones continúas definidas sobre Ω con valores en $\mathbb{R}^m$.
- Dado $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ o simplemente $\mathcal{C}^k(\Omega)$, es el conjunto de todas las funciones de valores reales $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ que son k veces derivables. Además, $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es el conjunto de todas las funciones $\tilde{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, con cada componente k veces continuamente diferenciable. Funciones que son infinita veces derivables se denominan funciones regulares.

1.2 Introducción

Como primera aproximación a la idea de ecuación diferencial, se dirá que es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas. Una ecuación diferencial que involucra derivadas ordinarias se llama ecuación diferencial ordinaria y su orden será el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación. Por solución de una ecuación diferencial se entenderá una función diferenciable que satisface la ecuación para cierto intervalo.

Por ejemplo, se tiene la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$x' - x = 0, \tag{1}$$

que involucra la función x y su primera derivada con respecto a una variable independiente que podría ser t. Es equivalente escribir entonces

$$x'(t) - x(t) = 0.$$

Nótese, intuitivamente, que una solución de este ejemplo es una función que sea igual a su primera derivada. Se sabe que la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) = e^t \end{aligned}$$

es igual a su primera derivada y entonces una solución de (1) para todo $t \in \mathbb{R}$.

1.3 Aplicaciones

Para el análisis siguiente, consideremos que

t:	representa al tiempo, medido en años.
$x(t)$:	representa el número de individuos de una determinada población al tiempo t.
k:	representa la tasa de crecimiento de la población por unidad de tiempo.

Se asume que la tasa de crecimiento k es una constante y representa la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad.

Además, se sabe que la población en un tiempo $t + \Delta t$ es igual a la población en un tiempo t más el aumento de la población durante $\Delta t > 0$ unidades de tiempo, es decir

$$x(t + \Delta t) = x(t) + kx(t)\Delta t.$$

La expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = kx(t),$$

donde el lado izquierdo es la variación de la población con respecto al tiempo. Si $\Delta t \to 0$, entonces

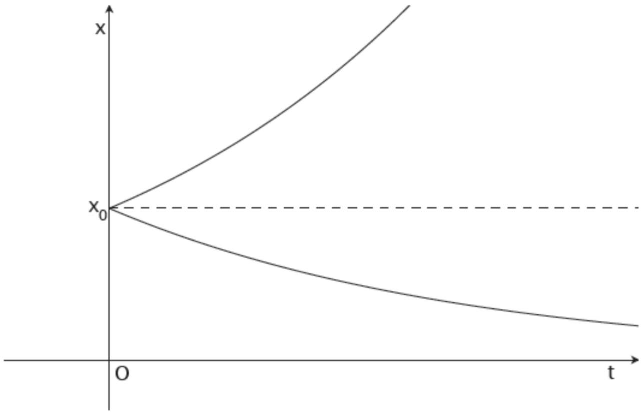
$$x'(t) = kx(t)$$

cuya solución, tomando una población inicial $x(0) = x_0$, con $x_0 > 0$, es

$$\begin{aligned} x\colon [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(t) = x_0 e^{kt}. \end{aligned}$$

Si $k = 0$, es decir no hay variación en la población, como es de esperar se tiene una población constante, $x(t) = x_0$ para todo $t \geq 0$.

Cuando $k > 0$, es decir la tasa de natalidad es mayor a la tasa de mortalidad, se tiene que la población crece exponencialmente y $x(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Por el contrario, cuando $k < 0$, la población decrece exponencialmente y $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.



1.4 Definiciones y conceptos básicos

DEFINICIÓN 1: Ecuación diferencial de primer orden

Dada $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, buscamos $I \subseteq \mathbb{R}$ y una función $x\colon I \to \mathbb{R}$ con $x \in \mathcal{C}^1(I)$ que verifica

1. $(t, x(t)) \in \Omega$,
2. $x'(t) = f(t, x(t))$.

para todo $t \in I$. A este problema se lo denomina ecuación diferencial ordinaria de primer orden y se lo denota por

$$x' = f(t, x).$$

Una ecuación diferencial también puede ser representada por

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

!

Para la ecuación diferencial

$$x' = x. \tag{2}$$

Tenemos que $\Omega = \mathbb{R}^2$ y la función

$$\begin{aligned} f\colon \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto v, \end{aligned}$$

con $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Mostraremos que para $I = \mathbb{R}$, para cada $c \in \mathbb{R}$ la función

$$\begin{aligned} x_c\colon\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto ce^t \end{aligned}$$

es la función buscada por el problema (2).

Se dice que la ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ es de primer orden.

DEFINICIÓN 2: Problema de valor inicial

Dados $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(t_0, x_0) \in \Omega$, queremos hallar una función $x\colon I \to \mathbb{R}$, con $x \in \mathcal{C}^1(I)$ tal que:

1. $(t, x(t)) \in \Omega$, *para cada* $t \in I$,
2. $x'(t) = f(t, x(t))$, *para cada* $t \in I$, *y*
3. $x(t_0) = x_0$.

A este problema se lo denomina un problema de valor inicial o problema de Cauchy y se lo denota por

$$\begin{cases} x' &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 3: Solución general de una ecuación diferencial ordinaria

Dada la ecuación diferencial ordinaria

$$x' = f(t, x),$$

para un determinado $I \subseteq \mathbb{R}$, y para $c \in \mathbb{R}$, decimos que la función $\phi_c\colon I \to \mathbb{R}$ que es tal que $\phi_c \in \mathcal{C}^1(I)$, es su solución general, si verifica que

$$\phi_c'(t) = f(t, \phi_c(t))$$

para cada $t \in I$.

DEFINICIÓN 4: Solución particular de una ecuación diferencial ordinaria

Dados $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

para un determinado $I \subseteq \mathbb{R}$, decimos que la función $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ que es tal que $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$, es su solución particular si verifica que

$$\begin{cases} \phi'(t) &= f(t, \phi(t)), \text{ para todo } t \in I, \text{ y} \\ \phi(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

1.5 Ecuación diferencial de primer orden lineal

DEFINICIÓN 5: Ecuación diferencial ordinaria lineal

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

se dice lineal en x si se puede escribir como

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \tag{3}$$

para cada $t \in I$, con $p, q\colon I \to \mathbb{R}$ tales que $p, q \in \mathcal{C}(I)$.

! Si en (3) se tiene que $q(t) = 0$ para cada $t \in I$, la ecuación se dice homogénea, caso contrario se la denomina no homogénea.

! La ecuación diferencial

$$x' = x + t^2,$$

es lineal.
Las ecuaciones diferenciales

$$x' = x^2 + t \qquad \text{y} \qquad (x')^2 = x + t,$$

no son lineales.
En general, la ecuación (3) se dice lineal ya que

$$f(t, x) = -p(t)x(t) + q(t)$$

es lineal en $x(t)$.

TEOREMA 1: Existencia de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria lineal

Dado $I \subseteq \mathbb{R}$. Sean $p, q\colon I \to \mathbb{R}$ con $p, q \in \mathcal{C}(I)$.

1. *Dado $c \in \mathbb{R}$, la solución general de la ecuación diferencial*

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t),$$

es la función $x_c\colon I \to R$ definida por

$$x_c(t) = \exp\left(-\int p(t)\,dt\right)\left(c + \int \exp\left(\int p(t)\,dt\right) q(t)\,dt\right) \tag{4}$$

para cada $t \in I$.

2. *Para el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' &= -p(t)x(t) + q(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

para todo $t_0 \in I$ y todo $x_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución $x\colon I \to \mathbb{R}$ definida por

$$x(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds\right)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(\int_{t_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right) q(s)\,ds\right)$$

para cada $t \in I$.

!

Para la determinación de la solución de la ecuación diferencial

$$x' = -p(t)x(t) + q(t),$$

se obtiene una función $\mu\colon I \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(t) = \exp\left(\int p(t)\,dt\right)$$

para cada $t \in I$, a esta función se la denomina un factor integrante.

2. Existencia y unidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias

Teorema 1: Existencia y unicidad local

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y el problema del valor inicial

$$\begin{cases} x' &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

si se supone que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y su derivada $D_2 f$ existe y es continua, entonces para cada (t_0, x_0) en el interior de Ω el problema posee solución única.

! Una consecuencia del teorema de existencia y unicidad local es que dos soluciones de

$$x' = f(t,x),$$

no pueden cruzarse una con otra, es decir, si y y z son dos soluciones definidas sobre cierto intervalo I cerrado y si existe algún $t^* \in I$ tal que $y(t^*) = z(t^*)$, entonces

$$y(t) = z(t)$$

para todo $t \in I$.

Teorema 2: Existencia local

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y el problema del valor inicial

$$\begin{cases} x' &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

si se supone que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, entonces para cada (t_0, x_0) en el interior de Ω el problema posee al menos una solución definida en alguna vecindad de t_0.

! Si la condición de que f sea diferenciable no se cumple, el problema podría no tener solución única.

! Es importante notar que los dos teoremas enunciados anteriormente son locales, es decir, sus resultados respecto a la existencia de la solución se verifican en un intervalo adecuado que contiene a t_0.

> **!** La existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial es importante no solo desde el punto de vista teórico, sino también en aplicaciones. Por ejemplo, al utilizar un método numérico o algún software para encontrar la solución, es importante conocer si existe o no la solución en primer lugar, y si existe, también es importante conocer si es única.

TEOREMA 3: Existencia y unicidad global

Dados a, $b \in \mathbb{R}$ y el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

si se supone que $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, con $\Omega = [a,b] \times \mathbb{R}$ y que $D_2 f$ existe, es continua y acotada en Ω, entonces para cada (t_0, x_0) en el interior de Ω el problema posee solución única definida para todo $t \in I = [a,b]$.

3. Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales

3.1 Ecuación diferencial ordinaria separable

DEFINICIÓN 1: Ecuación diferencial ordinaria separable

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$. Dadas $h, g\colon I \to \mathbb{R}$ tales que $h \in \mathcal{C}(I)$ con $h(t) \neq 0$ para cada $t \in I$ y que $g \in \mathcal{C}^1(I)$, a la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) = h(t)g(x(t))$$

se la denomina ecuación diferencial ordinaria separable.

Para determinar la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales, notemos que para un determinado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, se puede definir

$$\begin{aligned} f\colon \quad \Omega \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto h(u)g(v). \end{aligned}$$

Notemos que f verifica las condiciones del teorema de existencia y unidad local. Entonces, existirá $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que la solución del problema está definida. Consideremos ahora, los dos casos:

1. Si $g(x(t)) = 0$ para cada $t \in I$ obtenemos

   $$x'(t) = 0,$$

   entonces, integrando ambos lados respecto a t obtenemos

   $$x_c(t) = c,$$

   para cada $t \in I$ y c una constante.

2. Si $g(x(t)) \neq 0$ para cada $t \in I$, entonces

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = h(t),$$

e integrando respecto a t obtenemos

$$\int \frac{x'(t)}{g(x(t))}\, dt = \int h(t)\, dt + c, \tag{1}$$

con c una constante.

> **!** Si deseamos resolver el problema de valor inicial
>
> $$\begin{cases} x' & = h(t)g(x), \\ x(t_0) & = x_0. \end{cases}$$
>
> Solamente se debe substituir el valor inicial $x(t_0) = x_0$ en (1) y resolver para c.

3.2 Ecuación diferencial ordinaria exacta

Consideremos las ecuaciones

$$N(x,y)\frac{dy}{dx} + M(x,y) = 0 \tag{2}$$

y

$$M(x,y)\frac{dx}{dy} + N(x,y) = 0. \tag{3}$$

Notemos que en (2) la variable y depende de la variable x, mientras que en (3) los roles de las variables se intercambian, es decir, la variable x depende de la variable y.

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas, en forma diferencial, como

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{4}$$

Se asocia con (4) la forma diferencial

$$\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Definición 2: Diferencial total de un campo escalar

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y el campo escalar

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \varphi(x,y), \end{aligned}$$

diferenciable en Ω, la diferencial total de φ se define por

$$d\varphi(x,y) = D_1\varphi(x,y)dx + D_2\varphi(x,y)dy$$

para cada $(x,y) \in \Omega$.

Diremos que (4) es una ecuación exacta si ω es la diferencial exacta de una función φ, es decir, $d\varphi = \omega$, lo cual significa que

$$\begin{cases} D_1\varphi(x,y) = M(x,y) \\ D_2\varphi(x,y) = N(x,y) \end{cases}$$

y entonces

$$M(x,y)dy + N(x,y)dx = d\varphi(x,y) = D_1\varphi(x,y)dx + D_2\varphi(x,y)dy.$$

DEFINICIÓN 3: Ecuación diferencial ordinaria exacta

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $M, N\colon \Omega \to \mathbb{R}$, con $M, N \in \mathcal{C}(\Omega)$, a la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

se le denomina exacta si existe un campo escalar $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciable en Ω tal que

$$M(x,y) = D_1\varphi(x,y) \qquad y \qquad N(x,y) = D_2\varphi(x,y)$$

para cada $(x,y) \in \Omega$.

PROPOSICIÓN 4. Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $M, N\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $M, N \in \mathcal{C}(\Omega)$. Suponemos que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta y que φ es una función tal que

$$D_1\varphi = M \qquad \text{y} \qquad D_2\varphi = N.$$

Si y es una solución de (2) entonces

$$\varphi(x, y(x)) = c,$$

para algún $c \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si y es derivable con derivada continua y satisface que

$$\varphi(x, y(x)) = c,$$

para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces y satisface (2).

PROPOSICIÓN 5. Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ y $M, N\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $M, N \in \mathcal{C}(\Omega)$. Suponemos que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta y que φ es una función tal que

$$D_1\varphi = M \qquad \text{y} \qquad D_2\varphi = N.$$

Si x es una solución de (3) entonces

$$\varphi(x, y(x)) = c,$$

para algún $c \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, si x es derivable con derivada continua y satisface que

$$\varphi(x, y(x)) = c,$$

para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces x satisface (3).

!

Las soluciones de la ecuación exacta (4) están definidas por

$$\varphi(x, y) = c,$$

donde φ es una función tal que

$$D_1\varphi = M \qquad \text{y} \qquad D_2\varphi = N,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Entonces, diremos que

$$\varphi(x, y) = c,$$

con $c \in \mathbb{R}$ es la solución general de (4). La constante c depende solamente de las condiciones iniciales, por lo cual, la curva que pasa por el punto (t_0, x_0) está dada por

$$\varphi(x, y) = \varphi(t_0, x_0).$$

TEOREMA 6

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ convexo y $M, N \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $M, N \in \mathcal{C}(\Omega)$, con derivadas parciales D_2M y D_1N continuas sobre Ω.

1. *Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta, entonces $D_2M = D_1N$.*
2. *Si $D_2M = D_1N$, entonces $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta.*

!

Notemos que en el teorema anterior se trabaja con cualquier dominio Ω con la propiedad que para cualquier curva continúa cerrada α contenida en Ω, el conjunto encerrado por α está contenido en Ω. Un conjunto convexo verifica tal propiedad y en particular un rectángulo $R =]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[$ también es un dominio adecuado. Finalmente, el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no verifica tal propiedad.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES

3.3 Determinación de un factor integrante para obtener ecuaciones exactas

Existen casos para los cuales a pesar de que una ecuación diferencial ordinaria no es exacta, es posible convertirla en exacta a partir de la multiplicación por un factor integrante adecuado. Esto es, dada la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

es posible encontrar una función $\mu\colon R \to \Omega$ con $R \subseteq \Omega$ tal que

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0,$$

es una ecuación diferencial ordinaria exacta.

Para la discusión siguiente, supongamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es tal que se verifican las condiciones del teorema de existencia y unicidad local. Además, supongamos que $R \subseteq \Omega$ es un conjunto convexo.

TEOREMA 1

Dados $R \subseteq \Omega$, $M, N\colon R \to \mathbb{R}$ y la ecuación diferencial ordinaria

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1}$$

no exacta.

1. *Si $\dfrac{D_2M(x,y) - D_1N(x,y)}{N(x,y)}$ depende solamente de x para todo $(x,y) \in R$, entonces un factor integrante para convertir (1) en exacta es $\mu\colon R \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int \frac{D_2M(x,y) - D_1N(x,y)}{N(x,y)}\,dx\right)$$

para cada $(x,y) \in R$.

2. *Si $\dfrac{D_1N(x,y) - D_2M(x,y)}{M(x,y)}$ depende solamente de y para todo $(x,y) \in R$, entonces un factor integrante para convertir (1) en exacta es $\mu\colon R \to \mathbb{R}$ definido por*

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int \frac{D_1N(x,y) - D_2M(x,y)}{M(x,y)}\,dy\right)$$

para cada $(x,y) \in R$.

Teorema 2

Dados $R \subseteq \Omega$, $M, N\colon R \to \mathbb{R}$ y la ecuación diferencial ordinaria

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2}$$

no exacta. Si M y N son polinomios, entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que un factor integrante para convertir (2) en exacta es $\mu\colon R \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mu(x,y) = x^m y^n$$

para cada $(x,y) \in R$.

3.4 Ecuación diferencial ordinaria homogénea

Definición 1: Función homogénea

Dados $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{R}$, se dice que f es una función homogénea de grado n si para todo $(x,y) \in D$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(\lambda x, \lambda y) \in D$.

! Dados $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{R}$ y una función $f\colon D \to \mathbb{R}$ homogénea de grado n, está puede escribirse como

$$f(x,y) = \lambda^n f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

o

$$f(x,y) = \lambda^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right).$$

para todo $(x,y) \in D$.

Definición 2: Ecuación diferencial ordinaria homogénea

Dados $R \subseteq \Omega$, $M, N\colon R \to \mathbb{R}$ y la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

se dice que es una ecuación diferencial ordinaria homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado.

! Alternativamente, la ecuación diferencial

$$x' = f(t,x)$$

se dice que es una ecuación diferencial homogénea si f es una función homogénea.

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, las funciones $M, N\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $M, N \in \mathcal{C}(\Omega)$ y la ecuación diferencial homogénea

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

la cual puede ser escrita como

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{3}$$

Para establecer la existencia de soluciones de (3), notemos que se puede definir la función

$$\begin{aligned} f\colon \quad \Omega \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto -\frac{M(u,v)}{N(u,v)}. \end{aligned}$$

Supondremos que f es tal que verifica o bien el teorema de existencia y unicidad local o bien el teorema de existencia local, entonces existirá $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que su solución $y\colon I \to \mathbb{R}$ existe.
Para resolver la ecuación (3) definimos

$$\begin{aligned} z\colon \ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{y(x)}{x}, \end{aligned}$$

dado que $y \in \mathcal{C}^1(I)$, se tiene que $z \in \mathcal{C}^1(I)$ con derivada dada por

$$y'(x) = z(x) + xz'(x)$$

para cada $x \in I$, entonces (3) se reescribe como

$$xz'(x) + z(x) = -\frac{M(x, xz(x))}{N(x, xz(x))},$$

recordando que M y N son funciones homogéneas del mismo grado, obtenemos que

$$xz'(x) + z(x) = -\frac{M(1, z(x))}{N(1, z(x))}$$

o equivalentemente

$$xz' + z = -\frac{M(1,z)}{N(1,z)}, \tag{4}$$

una ecuación diferencial ordinaria separable, que deberá ser resuelta como tal.

! Una vez obtenida la solución de (4), está debe expresarse en términos de las variables originales x y y.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES

3.5 Ecuación de Bernoulli

DEFINICIÓN 1

Dados $I = [a, b]$, las funciones $p, q\colon I \to \mathbb{R}$ tales $p, q \in \mathcal{C}(I)$ y $k \in \mathbb{R}$, a la ecuación diferencial ordinaria

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)x^{k+1}(t)$$

se la denomina ecuación de Bernoulli.

> ! La ecuación de Bernoulli es una generalización de la ecuación lineal, en efecto, si tomamos $k = -1$ o $k = 1$ o si $g(t) = 0$ para cada $t \in I$, la ecuación es lineal, mientras que, si no se consideran algunos de estos tres casos, la ecuación es no lineal.

La ecuación de Bernoulli posee la solución trivial, es decir, toma el valor 0 en todo su dominio. Para obtener soluciones no triviales, supongamos que previamente hemos determinado que la ecuación posee una solución $x\colon I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces se demostrará que el cambio de variable $z\colon I \to \mathbb{R}$ definido por

$$z(t) = x^{-k}(t)$$

para cada $t \in I$, transforma a la ecuación de Bernoulli en una ecuación lineal, en donde se supone que tanto k como x son tales que z está bien definido.

En efecto, como x es solución de la ecuación, entonces $x \in \mathcal{C}^1(I)$ que junto con un apropiado I implican que $z \in \mathcal{C}^1(I)$, y, por tanto, con derivada

$$z'(t) = -kx^{-k-1}(t)x'(t)$$

para cada $t \in I$.

Ahora, ya que $x'(t) = -p(t)x(t) + q(t)x^{k+1}(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} z'(t) &= -kx^{-k-1}(t)(-p(t)x(t) + q(t)x^{k+1}(t)) \\ &= kp(t)x^{-k}(t) - kq(t) \end{aligned}$$

y como $z(t) = x^{-k}(t)$, se obtiene

$$z'(t) - kp(t)z(t) = -kq(t),$$

una ecuación diferencial ordinaria lineal en la variable z. Si z es la solución de esta ecuación, entonces $x = z^{-1/k}$ es la solución de la correspondiente ecuación de Bernoulli.

3.6 Soluciones singulares y ecuación de Clairaut

Una ecuación diferencial de primer orden puede ser representada por medio de una determinada función $F\colon A \to \mathbb{R}$ como $F(t,x,x') = 0$, donde $A \subseteq \mathbb{R}^3$.
Por ejemplo, dada la ecuación diferencial

$$x' = f(t,x), \tag{1}$$

se define a la función

$$\begin{aligned} F\colon \quad A \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v,w) &\longmapsto w - f(u,v), \end{aligned}$$

donde $A \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces la ecuación (1) se representa alternativamente como

$$F(t,x,x') = 0.$$

Definición 2: Envolvente de una familia de curvas

Dada una familia de curvas $g(t,x,c) = 0$ donde $c \in \mathbb{R}$, su envolvente satisface el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} g(t,x,c) &= 0 \\ D_3 g(t,x,c) &= 0. \end{cases}$$

Definición 3: Solución singular

Una solución $\tilde{x}$ de la ecuación diferencial

$$F(t,x,x') = 0 \tag{2}$$

es denominada una solución singular si es la envolvente de una familia de soluciones de (2).

Definición 4: Ecuación de Clairaut

Dados $I \subseteq \mathbb{R}$ y $g \in \mathcal{C}^1(I)$, a una ecuación diferencial de la forma

$$x = tx' + g(x') \tag{3}$$

se la denomina ecuación de Clairaut.

Para obtener la solución general de (3), si tomamos $x' = c$ para cada $c \in I$, encontramos que la solución general es la familia de rectas

$$\begin{aligned} x_c\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto ct + g(c) \end{aligned}$$

para cada $c \in I$.

Una particularidad de la ecuación de Clairaut es que puede tener solución singular. De acuerdo con lo enunciado anteriormente para determinar esta solución se define la función

$$\begin{aligned} F: \quad A \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v,w) &\longmapsto uw + g(w) - v \end{aligned}$$

donde $A \subseteq \mathbb{R}^3$, luego, la solución singular debe resolver el sistema

$$\begin{cases} F(u,v,w) & = 0 \\ D_3F(u,v,w) & = 0, \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} uw + g(w) - v & = 0 \\ u + g'(w) & = 0. \end{cases}$$

Notemos que en este caso $D_1F(u,v,w) = -1$ para cada $(u,v,w) \in A$. Si g' es invertible se asegura la existencia de una solución singular y si g' no es invertible, podría suceder que no existe solución única.

3.7 Método de Euler

Algunas ecuaciones no se pueden resolver analíticamente, sin embargo, en ciertas ocasiones obtener una solución aproximada es suficiente. Existen varios algoritmos que se utilizan para calcular estas aproximaciones. Se describe en especial el Método de Euler, que permite hallar valores aproximados de la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

con $t \in I \subseteq \mathbb{R}$.

> **!** Para utilizar este método, previamente debe realizarse un análisis de la existencia y unicidad de la solución de (4).

Como se sabe

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

Se puede decir que, para h suficientemente cercano a 0,

$$x'(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h},$$

que es equivalente a

$$x(t+h) \approx x(t) + hx'(t),$$

por (4) se tiene entonces

$$x(t+h) \approx x(t) + hf(t, x(t)).$$

Vamos a asumir que la aproximación anterior es aceptable y específicamente se va a aproximar

$x(t_0 + h)$ a partir de $x(t_0)$, se tiene

$$x(t_0 + h) \approx x(t_0) + hf(t_0, x(t_0)).$$

Si denotamos por $t_1 = t_0 + h$ y $x_1 \approx x(t_1)$, entonces

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0).$$

Repitiendo el proceso, en general, se puede tomar

$$\begin{aligned} t_n &= t_0 + nh \\ x_n &= x_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}), \end{aligned}$$

con $h \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}^*$, siempre y cuando $t_n \in I$.

! Para valores de h más cercanos a 0, la aproximación a la solución es más exacta.

! Normalmente se realiza este procedimiento es una computadora, por lo que el cálculo no se lo realiza indefinidamente sino que se lo hace en un intervalo $[t_0, t_0 + L]$ de longitud $L > 0$, para lo cual primero se determina el número $n \in \mathbb{N}^*$ de puntos que se desea calcular y después se determina $h = L/n$.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS NO LINEALES

3.8 Modelización con ecuaciones diferenciales de primer orden

3.8.1. Ecuación Logística

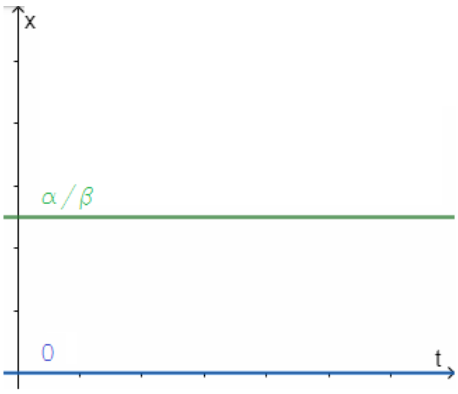
Se puede asumir α como un factor que depende de la tasa de natalidad y mortalidad, como se vio en el *Resumen 1*, mientras que $-\beta x(t)$ puede ser explicada por la observación de que mientras más grande sea x es más difícil para un individuo encontrar recursos como comida o espacio y por ende más difícil sobrevivir. Esta ecuación es llamada la *Ecuación Logística*.

Si x representa el número de individuos en una determinada población, se considera un modelo en el que se asume que la variación x' del número de individuos en una población es proporcional a x, pero a través de un factor $(\alpha - \beta x)$. Lo que nos lleva a la ecuación

$$x'(t) = x(t)(\alpha - \beta x(t)), \tag{1}$$

con $\alpha, \beta > 0$.

Debido a que en este modelo $x(t)$ representa una población, se buscan las soluciones tal que $x(t) \geq 0$ y $t \geq 0$. Resolviendo $x(\alpha - \beta x) = 0$ se pueden obtener las soluciones contantes de la ecuación y estas son $x = 0$ y $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$.



Estas soluciones juegan un papel importante en el análisis de las soluciones no constantes, ya que, por unicidad, estas soluciones no pueden cruzar las soluciones constantes. Así las dos líneas dividen las soluciones en dos clases: las que están sobre la línea de ecuación $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$ y las que están entre las líneas de ecuación $x = 0$ y $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Se resuelve entonces (1) para $x \neq 0$ y $x \neq \dfrac{\alpha}{\beta}$

$$\frac{x'}{x(\alpha - \beta x)} = 1,$$

integrando por fracciones parciales y con respecto a t, se tiene

$$\frac{1}{\alpha}\int \frac{x'}{x}dt + \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{x'}{\alpha - \beta x}dt = \int dt$$

lo cual nos lleva a la solución

$$\left|\frac{x}{\alpha - \beta x}\right| = ke^{\alpha t}$$

con $k > 0$.

Esta es una solución implícita, para hallar la solución explícita se analiza el valor absoluto, se tienen dos casos.

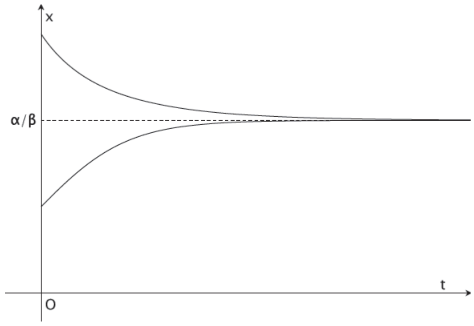
1. Si
$$\frac{x}{\alpha - \beta x} > 0,$$
como $x > 0$ entonces $(\alpha - \beta x) > 0$ y
$$0 < x(t) < \frac{\alpha}{\beta}$$
lo cual nos lleva a las soluciones que se encuentran entre las dos soluciones constantes
$$x(t) = \frac{\alpha k e^{\alpha t}}{1 + \beta k e^{\alpha t}}.$$

2. Si
$$\frac{x}{\alpha - \beta x} < 0,$$
como $x > 0$ entonces $(\alpha - \beta x) < 0$ y
$$x(t) > \frac{\alpha}{\beta}$$
lo cual nos lleva a las soluciones que están sobre la solución constante $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$
$$x(t) = \frac{-\alpha k e^{\alpha t}}{1 - \beta k e^{\alpha t}}.$$

Nótese que para ambas familias de soluciones se tiene que

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \frac{\alpha}{\beta},$$

en otras palabras, todas las soluciones no constantes se aproximan a la solución de equilibrio $x(t) = \dfrac{\alpha}{\beta}$ cuando $t \to +\infty$.



Se puede observar, que la región donde se encuentra la solución, es decir entre las soluciones constantes o sobre $x = \alpha/\beta$, depende de la población inicial $x_0 = x(t_0)$.

3.8.2. Tanque con fuga. Ley de Torricelli

En este modelo se tiene un tanque cilíndrico con un hueco en el fondo por el cual se fuga el agua. Se quiere encontrar la altura h del agua en el tanque en cualquier tiempo $t \geq 0$. Se sabe que la altura inicial es $h(0) = h_0$.

Por la ley de Torricelli, se sabe que, bajo la influencia de la gravedad, el flujo de agua que se fuga del tanque tiene una velocidad

$$v(t) = 0{,}6\sqrt{2gh(t)},$$

donde $h(t)$ es la altura en cualquier tiempo t y g la gravedad.

Primero se plantea el modelo, para lo cual se relaciona el decrecimiento del nivel de agua en el tanque con el flujo de salida. El volumen ΔV que se escapa por el hueco durante un tiempo corto $\Delta t > 0$ es

$$\Delta V = Av\Delta t,$$

donde A es el área del hueco. La variación de volumen en el tanque, que es igual al volumen que se escapa por el hueco, viene dada por

$$\Delta V = -B\Delta h,$$

donde B es la sección transversal del tanque y $\Delta h > 0$ es el decrecimiento del nivel de agua en cierto $\Delta t > 0$, el signo menos se debe a que el volumen del agua en el tanque decrece, entonces

$$-B\Delta h = Av\Delta t.$$

Tomando la velocidad de la ley de Torricelli se tiene

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{A}{B}0{,}6\sqrt{2gh(t)},$$

si la altura está en metros, entonces $g = 9{,}8 m/s^2$ y $0{,}6\sqrt{2g} \approx 2{,}66$ y haciendo que $\Delta t \to 0$ se obtiene la Ecuación Diferencial Ordinaria de este modelo

$$\frac{dh}{dt} = -2{,}66\frac{A}{B}\sqrt{h}.$$

Esta ecuación es separable

$$\frac{h'}{\sqrt{h}} = -2{,}66\frac{A}{B},$$

integrando ambos lados con respecto a t se tiene

$$2\sqrt{h} = c - 2{,}66\frac{A}{B}t,$$

dividiendo esta expresión para 2 y elevando al cuadrado se tiene

$$h(t) = \left(k - 1{,}33\frac{A}{B}t\right)^2.$$

Con la condición inicial $h(0) = h_0$ se tiene

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - 1{,}33\frac{A}{B}t\right)^2.$$

Esta expresión no tiene ninguna restricción para el tiempo, sin embargo, una vez que la altura h es 0 el tanque se vacía y no tiene sentido seguir calculado el nivel de agua, es por eso por lo que el tiempo final t_f será cuando

$$h(t_f) = \left(\sqrt{h_0} - 1{,}33\frac{A}{B}t_f\right)^2 = 0,$$

entonces

$$t_f = \frac{B}{1{,}33A}\sqrt{h_0}.$$

Finalmente, la altura viene definida por la función

$$\begin{aligned} h\colon [0, t_f] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \left(\sqrt{h_0} - 1{,}33\frac{A}{B}t\right)^2 \end{aligned}$$

> **!** Es importante tener coherencia en las unidades de medida, por ejemplo, que las secciones del tanque y del hueco estén en la misma unidad. De manera similar, si se utiliza una gravedad $g = 9{,}8m/s^2$ entonces la altura inicial tendrá que estar dada en metros. Finalmente, si utilizamos el SI de medida, el tiempo está dado en segundos.

> **!** Cuando se modelan fenómenos reales, es importante fijarse en los valores que pueden tomar la variable, tanto dependientes como independientes, ya que, aunque en la ecuación o solución no tengan ciertas restricciones, es probable que en la aplicación real si las tengan.

3.8.3. Trayectorias ortogonales

Un importante tipo de problema en geometría o física es encontrar una familia de curvas que interseca a otra familia en ángulo recto. Estas se llaman trayectorias o familias ortogonales. El ángulo de intersección entre dos curvas es el ángulo entre las tangentes a estas curvas en el punto de intersección. Trayectorias ortogonales pueden encontrarse usando ecuaciones diferenciales. En general, se considera

$$G(x, y, c) = 0$$

como una familia de curvas, donde con cada valor del parámetro c se describe una curva particular. Para obtener la correspondiente familia de curvas ortogonales $G(x, \tilde{y}, k) = 0$, notemos que sus pendientes deben verificar que $y'\tilde{y}' = -1$.

Dada una familia de curvas $G(x, y, c) = 0$, se realiza el siguiente procedimiento para obtener la correspondiente familia de curvas ortogonales $G(x, \tilde{y}, c) = 0$.

1. Obtener la ecuación diferencial, dada por $F(x, y, y') = 0$, que se corresponde con la familia de curvas original.

2. Determinar la ecuación diferencial de la familia ortogonal buscada, la ecuación está dada por $F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = 0$.

3. Resolver la ecuación diferencial obtenida en el paso anterior, cuya familia de curvas es la familia buscada.

!

Consideraremos cuatro aspectos importantes en la modelización de fenómenos físicos, geométricos, biológicos, etc.

- Definir las variables a ser utilizadas expresando a cada una, de ser posible, en las dimensiones físicas adecuadas.

- Obtener el modelo matemático que rige para el fenómeno que se estudia, en nuestro caso lo más probable es obtener un problema de valor inicial.

- Resolver el modelo obtenido en el paso anterior y obtener los resultados que el enunciado del problema formule.

- Contestar la o las preguntas que nos motivó al desarrollo anterior.

4. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

4.1 Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

DEFINICIÓN 1: Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

Si $f_1, f_2, \dots, f_n$ son funciones de $(t, x_1, x_2 \dots, x_n)$, $n+1$ variables, un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias está dado por:

$$\begin{cases} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \quad\vdots & \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{1}$$

Si utilizamos la notación

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y \qquad f(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{pmatrix}$$

y si $(t, X) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, entonces $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y el sistema de ecuaciones diferenciales (1) se puede representar como

$$X' = f(t, X)$$

! Si f_i con $i \in \{1, \dots, n\}$ no dependen de t, el sistema se dice autónomo, caso contrario se dice no autónomo. Si f_i con $i \in \{1, \dots, n\}$ son lineales en $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, el sistema se dice lineal, caso contrario se dice no lineal.

! Un sistema de ecuaciones diferenciales lineal y autónomo puede ser representado de forma matricial como

$$X'(t) = AX(t)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

DEFINICIÓN 2: Problema de valor inicial I

Dados $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y $(t_0, \alpha) \in \Omega$, el problema de valor inicial o problema de Cauchy para un sistema de ecuaciones diferenciales se escribe como

$$\begin{cases} X'(t) &= f(t, X(t)) \\ X(t_0) &= \alpha. \end{cases} \tag{2}$$

!

El problema de valor inicial dado por (2) puede ser escrito como

$$\begin{cases} x_i'(t) &= f_i(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_i(t_0) &= \alpha_i \end{cases}$$

con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

4.2 Resultado de existencia y unicidad para soluciones

TEOREMA 1: Teorema de existencia local

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua en Ω y sea $(t_0, \alpha) = (t_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un punto interior de Ω, entonces el problema de valor inicial (2) tiene al menos una solución definida en un intervalo apropiado que contiene a t_0.

PROPOSICIÓN 2. Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, f se dice localmente lipschitziana en el punto $(t_0, \alpha) \in \Omega$ con respecto a $X = (x_1, \dots, x_n)$ si existe una vecindad $U \subseteq \Omega$ de (t_0, α) y un número $L > 0$ tal que

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq L\|u - v\| \tag{3}$$

para todo $(t, u), (t, v) \in U$.

Si (3) es verdadera para todo para todo $(t, u), (t, v) \in \Omega$, la función f se dice globalmente lipschitziana en Ω con respecto a X.

!

- Si f es una función globalmente lipschitziana, entonces f es localmente lipschitziana.
- Si f es localmente lipschitziana, entonces f es continua.

PROPOSICIÓN 3. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1(I)$ tal que su derivada es acotada. Entonces f es una función globalmente lipschitziana en I.

TEOREMA 4: Unicidad de solución

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, (t_0, α) un punto en el interior de Ω y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Si f es continua y localmente lipschitziana en el punto (t_0, α) con respecto a X, entonces el problema de valor inicial (2) tiene solución única definida en un intervalo adecuado que contiene a t_0.

TEOREMA 5: Existencia global

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^n$, (t_0, α) un punto en el interior de Ω y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Si f es continua y globalmente lipschitziana en Ω respecto a X, entonces el problema de valor inicial (2) tiene solución definida en todo $[a, b]$.

4.3 Ecuaciones diferenciales de orden superior

Definición 3: Ecuación diferencial de orden superior

Una ecuación diferencial de orden n se denota por

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$$

donde $x^{(k)}(t) = \dfrac{d^k x}{dt^k}(t)$.

Definición 4: Problema de valor inicial II

Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $i = \{1, 2, \ldots, n\}$, el problema de valor inicial para una ecuación diferencial de orden n se escribe como

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) &= f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)) \\ x(t_0) &= \alpha_1 \\ x'(t_0) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) &= \alpha_n \end{cases} \tag{4}$$

!

El problema de valor inicial (4) puede ser representado como

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= x_n(t) \\ x_n'(t) &= f(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases}$$

un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden, donde

$$x_1(t) = x(t)$$
$$x_2(t) = x'(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$$

con $x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t))$.

Teorema 6: Existencia local

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, (t_0, α) un punto interior de Ω y $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Si f es continua en Ω, entonces el problema de valor inicial (4) tiene al menos una solución definida en un intervalo adecuado que contiene a t_0.

Teorema 7: Unicidad de la solución

Dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, (t_0, α) un punto interior de Ω y $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Si f es continua en Ω y local-

mente lipschitziana en (t_0, α) *con respecto a* X*, entonces el problema de valor inicial (4) tiene solución única definida en un intervalo adecuado que contiene a* t_0.

TEOREMA 8: Existencia global

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Si* f *es continua y globalmente lipschitziana en* Ω *con respecto a* X*, entonces el problema de valor inicial (4) tiene solución única definida en todo* $[a, b]$.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN

5.1 Introducción

DEFINICIÓN 1: Ecuación diferencial de segundo orden

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $a_0, a_1, a_2, g \colon I \to \mathbb{R}$, la ecuación

$$a_0(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = g(t) \tag{1}$$

representa a una ecuación diferencial de segundo orden.
Si se tiene que $g(t) = 0$ para cada $t \in I$, la ecuación (1) se dice homogénea, de lo contrario se dice no homogénea.

DEFINICIÓN 2: Puntos singulares

Los puntos t_0 en donde a_0 se anula, son conocidos como puntos singulares.

Si consideramos que $a_0(t) \neq 0$ para cada $t \in I$, la ecuación (1) se reescribe como:

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \tag{2}$$

donde $p(t) = \dfrac{a_1(t)}{a_0(t)}$, $q(t) = \dfrac{a_2(t)}{a_0(t)}$ y $f(t) = \dfrac{g(t)}{a_0(t)}$ para cada $t \in I$.

! Por simplicidad y por conveniencia trabajaremos con la ecuación (2) para referirnos a una ecuación diferencial de segundo orden.

5.2 Ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea

5.2.1. Existencia y unicidad

Iniciaremos el estudio de ecuaciones homogéneas enfocado en la existencia y unicidad de su solución. Los resultados se siguen directamente de los estudiado para sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $p, q \colon I \to \mathbb{R}$, estudiaremos a la ecuación:

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0. \tag{3}$$

DEFINICIÓN 3: Problema de valor inicial I

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $p, q\colon I \to \mathbb{R}$ y $t_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces a

$$\begin{cases} x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0, \\ x(t_0) = \alpha, \\ x'(t_0) = \beta. \end{cases} \tag{4}$$

lo denominaremos problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales de segundo orden.

DEFINICIÓN 4: Solución de una ecuación diferencial de segundo orden homogénea

Consideremos el problema de valor inicial (4) una solución de tal problema es una función $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable en I tal que

$$\begin{cases} \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t) = 0, \quad \text{para cada } t \in I, \\ \phi(t_0) = \alpha, \\ \phi'(t_0) = \beta. \end{cases}$$

TEOREMA 1: Existencia y unicidad I

Consideremos el problema de valor inicial (4). Si $p, q \in \mathcal{C}(I)$, entonces para cada $t_0 \in I$ y para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe una única solución que satisface este problema, más aún, está función está definida en I.

! Notemos que si en el teorema anterior $\alpha = \beta = 0$, entonces la solución será la función nula, este resultado se obtiene por la unicidad de la solución.

PROPOSICIÓN 2. Si x es cualquier solución de la ecuación (3) tal que $x(t_0) = x'(t_0) = 0$, entonces x es idénticamente nula para todo su dominio.

! En vista de la proposición anterior, los puntos en donde la solución alcanza un máximo o un mínimo no pueden estar en el eje t; entonces están por encima o por debajo de la línea de ecuación $t = 0$.

TEOREMA 3: Principio de superposición

Si x_1 y x_2 son soluciones de (3), entonces para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

también es solución de (3).

! La propiedad de que la combinación de soluciones es una solución es particular de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas.

5.2.2. Independencia lineal y el Wronskiano

Buscamos determinar la solución general de (3) para lograrlo introducimos con los conceptos de independencia lineal de soluciones y el wronskiano.

DEFINICIÓN 5: Solución general ecuación diferencial de segundo orden homogénea

La solución general de (4) se define como la familia de funciones

$$\begin{aligned} x\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \phi(t, c_1, c_2), \end{aligned} \tag{5}$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Está familia verifica que:

- *Para cada c_1 y c_2, x satisface (3) para cada $t \in I$.*
- *Si $\tilde{x}\colon I \to \mathbb{R}$ es una solución, entonces existen $\tilde{c}_1$ y $\tilde{c}_2$ contantes, tales que $\tilde{x}$ pertenece a la familia dada por (5).*

! De forma similar al caso de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, la solución general incluye a todas las soluciones de (3).

Para encontrar la solución general introducimos la noción de independencia lineal de funciones.

DEFINICIÓN 6: Independencia lineal entre funciones

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Decimos que f y g son linealmente independientes en I si para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_1 f(t) + c_2 g(t) = 0$$

para cada $t \in I$, se tiene que $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$.

! Funciones que no son linealmente independientes se dicen linealmente dependientes.

DEFINICIÓN 7: Wronskiano

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en I, el wronskiano de f y g se define por

$$W(f,g)(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$$

para cada $t \in I$.

! Otra notación que puede ser encontrada en la literatura es $W(f(t), g(t))$ o $W(t)$.

TEOREMA 4: Teorema de Abel

Si x_1 y x_2 son soluciones de (3) en un intervalo I en donde p y q son continuas, entonces el Wronskiano de x_1 y de x_2 está dado por

$$W(t) = c \exp\left(-\int p(t)\,dt\right)$$

para cada $t \in I$, con c una constante.

PROPOSICIÓN 5. El wronskiano de dos soluciones de (3) siempre es igual a 0 o nunca es igual a 0.

Recordemos que un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 0 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array}$$

posee solución única, la solución trivial, si o sólo si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0,$$

y si el determinante anterior es igual a 0, entonces el sistema posee soluciones infinitas. A partir de esto, tenemos que el siguiente teorema nos da un criterio conveniente para determinar si dos soluciones de (3) son linealmente dependientes.

TEOREMA 6

Dos soluciones x_1 y x_2 de (3) son linealmente dependientes si y sólo si $W(t) = 0$ para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 8: Conjunto fundamental de soluciones

Si x_1 y x_2 son dos soluciones linealmente independientes de (3), se dice que x_1 y x_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de (3).

TEOREMA 7: Solución general

Si x_1 y x_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de (3), entonces la solución general de (3) es

$$x = c_1x_1 + c_2x_2$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

5.2.3. Reducción de orden

Si suponemos que x_1 es una solución de (3) entonces conocemos que para cada $c \in \mathbb{R}$, $x = cx_1$ también es una solución de (3). Si reemplazamos c por una función v tal que se obtenga $x_2 = vx_1$, ¿x_2 es también una solución de (3)? La respuesta es afirmativa, el teorema siguiente nos indica como determinar a la función v.

TEOREMA 8: Reducción de orden

Si x_1 es una solución de (3) definida en I y $x_1(t) \neq 0$ para cada $t \in I$, entonces

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{\exp\left(-\int p(t)\,dt\right)}{(x_1(t))^2}\,dt$$

para cada $t \in I$, es otra solución de (3).

> *Más aún, x_1 y x_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de (3).*

5.3 Ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales homogéneas con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0, \tag{6}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Para obtener una solución de este tipo de ecuaciones diferenciales, recordamos que la función exponencial tiene la característica de que su derivada es un múltiplo de sí misma, entonces proponemos como solución a una función

$$\begin{aligned} x\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{rt} \end{aligned}$$

donde vamos a determinar si es que existe un valor adecuado de r tal que x sea solución de (6).

Derivando dos veces x y reemplazando en (6) obtenemos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, como $e^{rt} \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, dividiendo la ecuación anterior por e^{rt} se tiene

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{7}$$

luego, si x es solución de (6), entonces r es solución de (7). Similarmente, si r es solución de (7), regresando los pasos realizados anteriormente, x es solución de (6).

La ecuación (7) se denomina ecuación característica o ecuación auxiliar de (6). Hemos reducido así, el problema de encontrar la solución de (6) al problema de resolver la ecuación característica y entonces analizar la correspondiente solución.

Resolviendo (7) obtenemos

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como podemos observar vamos a considerar tres casos para ser estudiados: (1) $b^2 - 4ac > 0$, (2) $b^2 - 4ac = 0$ y (3) $b^2 - 4ac < 0$.

El caso $b^2 - 4ac > 0$ (dos raíces reales distintas). En este caso la ecuación característica posee dos raíces reales distintas dadas por

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las correspondientes soluciones de (6) están dadas por

$$\begin{aligned} x_1\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{r_1 t} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x_2\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{r_2 t} \end{aligned}.$$

El wronskiano de x_1 y de x_2 es

$$W(x_1, x_2)(t) = r_2e^{r_1t}e^{r_2t} - r_1e^{r_1t}e^{r_2t} = (r_1 - r_2)e^{r_1t}e^{r_2t} \neq 0$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, por lo cual x_1 y x_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de (6), dado que $r_1 \neq r_2$. Luego, la solución general de (6) es

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

El caso $b^2 - 4ac = 0$ **(dos raíces reales iguales).** En este caso la ecuación característica posee una raíz real repetida

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$$

Luego, una solución de (6) está dada por

$$\begin{aligned} x_1\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-\frac{b}{2a}t}. \end{aligned}$$

Para encontrar otra solución linealmente independiente, utilizamos el teorema de reducción de orden. Dado que $p(t) = \frac{b}{a}$ para cada $t \in \mathbb{R}$, se tiene que otra solución linealmente independiente $x_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$x_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}t}}{(e^{-\frac{b}{2a}t})^2}\, dt = te^{-\frac{b}{2a}t}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, en donde se ha tomado la constante de integración igual a 0. Como se puede verificar el wronskiano de x_1 y de x_2 es diferente de 0 para cada $t \in \mathbb{R}$, por lo cual x_1 y x_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de (6). Luego, la solución general de (6) es

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 e^{-\frac{b}{2a}t} + c_2 t e^{-\frac{b}{2a}t} \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

El caso $b^2 - 4ac < 0$ **(dos raíces complejas conjugadas).** En este caso la ecuación característica posee dos raíces reales distintas dadas por

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

o equivalentemente

$$r_1 = \alpha + \beta i \qquad \text{y} \qquad r_2 = \alpha - \beta i$$

donde $\alpha = -\frac{b}{2a}$ y $\beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Luego, debemos estudiar la expresión $e^{(\alpha + \beta i)t}$, a partir de la cual vamos a obtener un par de soluciones reales. Para hacerlo, notemos que, por la expansión de Taylor, obtenemos que

$$\begin{aligned} e^{\beta i} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta i)^n}{n!} \\ &= 1 + i\beta + \frac{i^2 \beta^2}{2!} + \frac{i^3 \beta^3}{3!} + \frac{i^4 \beta^4}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

$$= 1 + i\beta - \frac{\beta^2}{2!} - \frac{i\beta^3}{3!} + \frac{\beta^4}{4!} + \dots.$$

Reagrupando la parte real e imaginaria de la serie anterior, obtenemos

$$e^{\beta i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\beta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta).$$

Luego, se ha obtenido una expresión que es consistente con la ley de exponenciales

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} e^{\beta i} = e^{\alpha}(\cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta)).$$

Ahora, notemos que hemos obtenido una solución a valores complejos

$$\begin{aligned} z\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto u(t) + iv(t) \end{aligned}$$

donde $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están dadas por

$$u(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \qquad \text{y} \qquad v(t) = e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Derivando dos veces z y reemplazando en (6) se obtiene

$$(u''(t) + iv''(t)) + p(t)(u'(t) + iv'(t)) + q(t)(u(t) + iv(t)) = 0.$$

Agrupando términos que involucren a $u(t)$ y a $v(t)$ se tiene

$$(u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t)) + i(v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t)) = 0,$$

lo que implica que tanto la parte real como imaginaria de la expresión anterior debe ser igual a 0. Por tanto, las correspondientes soluciones reales de (6) son:

$$\begin{aligned} x_1\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x_2\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}(\beta t) \end{aligned}.$$

Se puede verificar que x_1 y x_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de (6). Luego, la solución general de (6) es

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t) + c_2\,\mathrm{sen}(\beta t)) \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

5.4 Ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales homogéneas con coeficientes no constantes: la ecuación de Euler

DEFINICIÓN 9: Ecuación de Euler

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, a la ecuación:

$$at^2x''(t) + btx'(t) + cx(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{8}$$

se la denomina la ecuación de Euler homogénea.

Una particularidad de este tipo de ecuaciones es que a partir de un cambio de variable adecuado es posible obtener una ecuación diferencial, equivalente, con coeficientes constantes. Luego, una vez que se ha resuelto la ecuación equivalente se procede a obtener la solución de la ecuación original. En efecto, para obtener la correspondiente ecuación con coeficientes constantes se considera el cambio de variable

$$\begin{aligned} s\colon\ ]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto ln(t) \end{aligned}$$

una función biyectiva, lo que nos permite obtener su inversa:

$$\begin{aligned} t\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow\ ]0,+\infty[\\ s &\longmapsto e^s. \end{aligned}$$

Notando que s es derivable al menos dos veces con derivadas

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2s}{dt^2}(t) = -\frac{1}{t^2}$$

para cada $t \in]0,+\infty[$; utilizando la regla de la cadena obtenemos expresiones equivalentes para las dos primeras derivadas de x:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx}{ds}(s)\frac{ds}{dt}(t), \\ x''(t) &= \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \frac{d^2x}{ds^2}(s)\left(\frac{ds}{dt}(t)\right)^2 + \frac{dx}{ds}(s)\frac{d^2s}{dt^2}(t), \end{aligned}$$

o de forma alternativa

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{t}\frac{dx}{ds}(s), \\ x''(t) &= \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}(s) - \frac{dx}{ds}(s)\right), \end{aligned}$$

de su reemplazo en (8) se obtiene la ecuación diferencial equivalente, la cual es una ecuación con coeficientes constantes, dada por

$$a\frac{d^2x}{ds^2}(s) + (b-a)\frac{dx}{ds}(s) + cx(s) = 0.$$

!

- El análisis realizado para cuando $t > 0$ puede ser realizado de forma similar para el caso cuando $t < 0$.

> !
> - Notemos que para cuando $t > 0$ o cuando $t < 0$ la aplicación del teorema de existencia y unicidad nos permite asegurar la existencia de una única solución que satisface la correspondiente ecuación de Euler.
> - Una solución que satisface las condiciones $x(0) = x'(0) = 0$ es la función nula.

5.5 Ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea

Dados $I \subseteq \mathbb{R}$ y $p, q, f\colon I \to \mathbb{R}$ consideramos la ecuación no homogénea

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t). \tag{9}$$

En primer lugar, se establece un resultado para la existencia y unicidad de soluciones, el cual es obtenido de forma inmediata de lo estudiado para los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

DEFINICIÓN 10: Problema de valor inicial II

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$, $p, q, f\colon I \to \mathbb{R}$ y $t_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces a

$$\begin{cases} x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t), \\ x(t_0) = \alpha, \\ x'(t_0) = \beta. \end{cases} \tag{10}$$

lo denominaremos problema de valor inicial para ecuaciones diferenciales de segundo orden.

DEFINICIÓN 11: Solución de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

Consideremos el problema de valor inicial (10) una solución de tal problema es una función $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ dos veces derivable en I tal que

$$\begin{cases} \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t) = f(t), \quad \text{para cada } t \in I, \\ \phi(t_0) = \alpha, \\ \phi'(t_0) = \beta. \end{cases}$$

TEOREMA 9: Existencia y unicidad II

Consideremos el problema de valor inicial (10). Si $p, q, f \in \mathcal{C}(I)$, entonces para cada $t_0 \in I$ y para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existe una única solución que satisface este problema, más aún, está función está definida en I.

> ! De forma similar para el caso de ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales homogéneas la solución general para el caso no homogéneo está definida como la familia de todas las soluciones de tal ecuación.

Para determinar la solución general de la ecuación no homogénea, se necesita conocer la solución general de la correspondiente ecuación homogénea y una solución particular. Para el caso homogéneo para una ecuación con coeficientes constantes o la ecuación de Euler podemos determinar su solución general. En la siguiente subsección aprenderemos a encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea.

PROPOSICIÓN 10. Si x_1 y x_2 son dos soluciones de (9), entonces $x_1 - x_2$ es una solución de la correspondiente ecuación homogénea

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0.$$

TEOREMA 11

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $p, q, f \in \mathcal{C}(I)$. Si $x_H = c_1x_1 + c_2x_2$, donde c_1 y c_2 son constantes, es la solución general de la ecuación homogénea

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$

y si x_P es cualquier solución de la ecuación no homogénea (9), entonces $x = c_1x_1 + c_2x_2 + x_P$, donde c_1 y c_2 son constantes, es la solución general de (9).

5.5.1. Método de variación de parámetros

De forma similar a lo realizado en la reducción de orden, en donde dada una solución x_1 de (3) se obtuvo una función v tal que vx_1 también es solución de (3) tal que con x_1 forman un conjunto fundamental de soluciones de (3), se utiliza la solución general de la ecuación homogénea para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea. Entonces, a partir de un conjunto fundamental de soluciones de (3) se buscan dos funciones v_1 y v_2 tales que $z = v_1x_1 + v_2x_2$ es una solución particular de (9). Suponiendo que v_1 y v_2 son al menos dos veces derivables, se tienen

$$z'(t) = v_1'(t)x_1(t) + v_1(t)x_1'(t) + v_2'(t)x_2(t) + v_2(t)x_2'(t)$$

y

$$z''(t) = v_1''(t)x_1(t) + 2v_1'(t)x_1'(t) + v_1(t)x_1''(t) + v_2''(t)x_2(t) + 2v_2'(t)x_2'(t) + v_2(t)x_2''(t)$$

para cada $t \in I$, reemplazando z, z' y z'' en la ecuación no homogénea, recordando que x_1 y x_2 son soluciones de la correspondiente ecuación homogénea, se obtiene

$$\begin{aligned} z''(t) + p(t)z'(t) + q(t)z(t) &= (x_1(t)v_1'(t) + x_2(t)v_2'(t))' + p(t)(x_1(t)v_1'(t) + x_2(t)v_2'(t)) \\ &\quad + (x_1'(t)v_1'(t) + x_2'(t)v_2'(t)). \end{aligned}$$

A partir de lo cual se obtiene el sistema de ecuaciones lineales, en las variables $v_1'(t)$ y $v_2'(t)$, dado por

$$\begin{array}{ccccc} x_1(t)v_1'(t) & + & x_2(t)v_2'(t) & = & 0 \\ x_1(t)v_1'(t) & + & x_2(t)v_2'(t) & = & f(t). \end{array}$$

Dado que x_1 y x_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, este sistema posee solución única, la cual la determinaremos utilizando el método de Cramer:

$$v_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ f(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}}{W(x_1, x_2)(t)} = -\frac{x_2(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}$$

y

$$v_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_1'(t) & f(t) \end{vmatrix}}{W(x_1, x_2)(t)} = \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}$$

para cada $t \in I$. Integrando lo anterior respecto a t obtenemos que

$$v_1(t) = -\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}\,dt \qquad \text{y} \qquad v_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}\,dt$$

para cada $t \in I$, en donde se han tomado las constantes de integración iguales a 0. Por lo tanto, la solución particular es tal que

$$x_P(t) = -\left(\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}\,dt\right) x_1(t) + \left(\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}\,dt\right) x_2(t)$$

para cada $t \in I$. Finalmente, la solución general de (9) es $x\colon I \to \mathbb{R}$ la cual está definida por

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) - \left(\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}\,dt\right) x_1(t) + \left(\int \frac{x_1(t)f(t)}{W(x_1, x_2)(t)}\,dt\right) x_2(t)$$

para cada $t \in I$, donde c_1 y c_2 son constantes.

> **!** Se recomienda no aprenderse como fórmulas los valores de $v_1(t)$ y de $v_2(t)$, sino escribir el sistema de ecuaciones lineales en las variables $v_1'(t)$ y $v_2'(t)$, y obtener su solución para luego integrarla.

5. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN NO HOMOGÉNEA

5.5.2. Método de los coeficientes indeterminados

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideramos la ecuación diferencial

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t). \tag{1}$$

El método de los coeficientes indeterminados consiste en encontrar **por inspección** una **solución particular** para (1) del mismo tipo que $f(t)$.

Esto es posible si $f(t)$ es un polinomio, tiene la forma: $e^{\lambda t}$, $\operatorname{sen}(\lambda t)$, $\cos(\lambda t)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$; o es una combinación lineal de estas. A continuación, un par de estos casos.

Un polinomio y una función exponencial. Sea $P(t)$ un polinomio de grado n en la variable t. Consideremos que f tiene la forma

$$f(t) = e^{\lambda t} P(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Para la ecuación diferencial

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = e^{\lambda t} P(t), \tag{2}$$

buscamos una solución particular, x_P, de la forma $x_P(t) = e^{\lambda t} Q(t)$, donde $Q(t)$ es un polinomio de grado n. Para esto determinamos x_P' y x_P'', las cuales para cada $t \in \mathbb{R}$ son:

$$x_P'(t) = e^{\lambda t} Q'(t) + \lambda e^{\lambda t} Q(t) \qquad \text{y} \qquad x_P''(t) = e^{\lambda t} Q''(t) + 2\lambda e^{\lambda t} Q(t) + \lambda^2 e^{\lambda t} Q(t),$$

que reemplazando en (2) se obtiene

$$aQ''(t) + (2a\lambda + b)Q'(t) + (a\lambda^2 + b\lambda + c)Q(t) = P(t). \tag{3}$$

Si λ no es una raíz de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, se tiene el **caso no resonante**.

Si λ es una raíz de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, se tiene el **caso resonante**.

DEFINICIÓN 1

Dado un polinomio $P(t)$ en la variable t, se define su grado como el máximo valor de los exponentes de t, y lo denotaremos por $\mathrm{d}(P)$.

Caso no resonante. Consideremos que:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$$

y que $Q(t)$ es un polinomio en la variable t, tal que

$$\mathrm{d}(Q) = \mathrm{d}(P).$$

EJERCICIO 1. Encontrar la solución particular de:

$$2x''(t) - x'(t) + 3x(t) = 2t. \tag{4}$$

Solución: En este caso se tiene que $P(t) = 2t$ y $\lambda = 0$, notemos que λ no es raíz de

$$2\lambda^2 - \lambda + 3 = 0.$$

Tomemos $Q(t) = At + B$, donde A, B son números reales que vamos a determinar, luego, $\mathrm{d}(P) = \mathrm{d}(Q)$, entonces se tiene que

$$x_P(t) = e^{\lambda t} Q(t) = At + B$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Determinamos sus dos primeras derivadas, las cuales para cada $t \in \mathbb{R}$ están dadas por

$$x_P'(t) = A \qquad \text{y} \qquad x_P''(t) = 0,$$

de su reemplazo en (4) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} - & A & + & 3B & = & 0, \\ & 3A & & & = & 2, \end{cases}$$

cuya solución es $A = \dfrac{2}{3}$ y $B = \dfrac{2}{9}$. Por lo tanto:

$$x_P(t) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{9}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. □

EJERCICIO 2. Encontrar la solución particular de:

$$x''(t) + x(t) = 3e^{2t}. \tag{5}$$

Solución: En este caso se tiene que $P(t) = 3$ y $\lambda = 2$, notemos que λ no es raíz de $\lambda^2 + 1 = 0$. Tomemos $Q(t) = A$, donde A es número real que vamos a determinar, notemos además que $\mathrm{d}(P) = \mathrm{d}(Q)$. Luego, se tiene que

$$x_P(t) = e^{\lambda t} Q(t) = Ae^{2t}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, derivando dos veces y reemplazando en (5) obtenemos que $A = \dfrac{3}{5}$. Por lo tanto:

$$x_P(t) = \frac{3}{5}e^{2t}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. □

Caso resonante. Consideremos que:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

por tanto, de su reemplazo en (3) se tiene que

$$a\underbrace{Q''(t)}_{d(Q)-2} + \underbrace{(2a\lambda + b)Q'(t)}_{d(Q)-1} = P(t)$$

por lo tanto:

$$\mathrm{d}(Q) = \mathrm{d}(P) + 2 \quad \text{o} \quad \mathrm{d}(Q) = \mathrm{d}(P) + 1.$$

Luego, la solución particular x_P tendrá la forma:

$$x_P(t) = e^{\lambda t}Q(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\mathrm{d}(Q) > \mathrm{d}(P)$.
Si, además, $2a\lambda + b = 0$, entonces

$$Q''(t) = P(t) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}(Q) = \mathrm{d}(P) + 2.$$

EJERCICIO 3. Encontrar una solución particular de:

$$2x''(t) + 3x'(t) = 1 + 4t. \tag{6}$$

Solución: En este caso se tiene que $P(t) = 1 + 4t$ y $\lambda = 0$, notemos que λ es raíz de

$$2\lambda^2 + 3\lambda = 0,$$

es decir, estamos en el **caso resonante**. Tomemos $Q(t) = At^2 + Bt + C$, donde A, B y C son números reales que vamos a determinar, notemos que $\mathrm{d}(Q) > \mathrm{d}(P)$. Luego, se tiene que

$$x_P(t) = e^{\lambda t}Q(t) = At^2 + Bt + C$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Determinamos sus dos primeras derivadas, de su reemplazo en (6) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4A + 3B = 1, \\ 6A = 4, \end{cases}$$

cuya solución es $A = \dfrac{2}{3}$ y $B = -\dfrac{5}{9}$. Por lo tanto:

$$x_P(t) = \frac{2}{3}t^2 - \frac{5}{9}t$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. □

Polinomios, senos y cosenos. Sean $P_1(t)$ y $P_2(t)$ dos polinomios y $\lambda \neq 0$. Supongamos que f posee la forma

$$f(t) = P_1(t)\operatorname{sen}(\lambda t) + P_2(t)\cos(\lambda t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Buscamos una solución particular para la ecuación diferencial (2) de la forma

$$x_P(t) = Q_1(t)\,\mathrm{sen}(\lambda t) + Q_2(t)\cos(\lambda t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, donde $Q_1(t)$ y $Q_2(t)$ son dos polinomios que vamos a determinar.

Si λ_i es una raíz de $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, se tiene el **caso resonante**, con $\mathrm{d}(Q_i) > \mathrm{d}(P)$ para $i \in \{1,2\}$.

Si $b \neq 0$ o $c \neq a\lambda^2$, se tiene el **caso no resonante**, con $\mathrm{d}(Q_i) = \mathrm{d}(P)$ para $i \in \{1,2\}$.

Caso no resonante. Ilustramos el caso no resonante con el siguiente ejercicio.

> **EJERCICIO 4.** Encontrar una solución particular de:
>
> $$x''(t) + x'(t) + x(t) = \mathrm{sen}(t). \tag{7}$$

Solución: En este caso se tiene que $P_1(t) = 1$, $P_2(t) = 0$ y $\lambda = 1$, notemos que λ no es raíz de $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, es decir, estamos en el **caso no resonante**. Se propone como solución particular a

$$x_P(t) = Q_1(t)\,\mathrm{sen}(t) + Q_2(t)\cos(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, con $\mathrm{d}(Q_1) = \mathrm{d}(Q_2) = \mathrm{d}(P) = 0$.

Es decir, donde $Q_1(t) = A$ y $Q_2(t) = B$, donde A y B son dos constantes que vamos a determinar, luego, se tiene que

$$x_P(t) = A\,\mathrm{sen}(t) + B\cos(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Determinamos sus dos primeras derivadas, de su reemplazo en (7) obtenemos que $A = 0$ y $B = -1$. Por lo tanto:

$$x_P(t) = -\cos(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. □

Caso resonante. De forma similar a lo realizado anteriormente, ilustramos el caso resonante con un ejemplo.

> **EJERCICIO 5.** Encontrar una solución particular de:
>
> $$x''(t) + x(t) = \mathrm{sen}(t). \tag{8}$$

Solución: En este caso se tiene que $P_1(t) = 1$, $P_2(t) = 0$ y $\lambda = 1$, notemos que $i\lambda = i$ es una raíz de $\lambda^2 + 1 = 0$, es decir, estamos en el **caso resonante**. Se propone como solución particular a

$$x_P(t) = Q_1(t)\,\mathrm{sen}(t) + Q_2(t)\cos(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, donde $\mathrm{d}(Q_i) > \mathrm{d}(P_i)$ con $i \in \{1,2\}$, es decir, donde $Q_1(t) = A_1 t + B_1$ y $Q_2(t) = A_2 t + B_2$, siendo A_1, A_2, B_1 y B_2 constantes que vamos a determinar, luego, se tiene que

$$x_P(t) = (A_1 t + B_1)\,\mathrm{sen}(t) + (A_2 t + B_2)\cos(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, determinamos sus dos primeras derivadas, de su reemplazo en (8) obtenemos que $A_1 = B_1 = B_2 = 0$ y $A_2 = -\dfrac{1}{2}$.
Por lo tanto:

$$x_P(t) = -\frac{1}{2}t\cos(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. $\square$

5. ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE SEGUNDO ORDEN NO HOMOGÉNEA

5.6 Modelización con ecuaciones diferenciales de segundo orden

5.6.1. Movimiento Armónico Simple

Consideremos un cuerpo P de masa m que se encuentra sujeto en uno de sus extremos a un resorte elástico y en el otro extremo se encuentra fijo al origen O (una pared, por ejemplo). Se saca al cuerpo de su posición de equilibrio y luego se lo suelta al tiempo $t = 0$. Asumiendo que no existe fricción y que tampoco actúa ninguna fuerza externa sobre el cuerpo, el cuerpo se moverá libremente sobre el eje horizontal "oscilando" alrededor de su posición de equilibrio bajo la acción de una fuerza (restauradora) elástica. Buscamos describir el movimiento de este cuerpo, es decir determinar una expresión que describa para todo tiempo la posición del cuerpo respecto al origen.

Solución:

Sean:

t: el tiempo, medido en unidades de tiempo.
x(t): la distancia cuerpo P a O al instante t, medida en unidades de longitud.

La ley de Hooke establece que una fuerza recuperadora F actúa sobre el cuerpo y que esta es proporcional, con constante de proporcionalidad negativa k, a la distancia x, es decir, $F = -kx$. Notemos que el signo menos se debe al hecho de que la fuerza del resorte intenta restaurarlo a su posición de equilibrio y que actúa en sentido contrario al movimiento de P.

Tomando en cuenta que $x''(t)$ representa a la aceleración, y después de analizar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, la segunda ley de Newton puede reescribirse como la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$mx''(t) + kx(t) = 0. \tag{1}$$

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{2}$$

donde $\omega^2 = k/m$ Notemos que las hipótesis del teorema de existencia y unidad para ecuación diferenciales de segundo orden se verifican, por lo cual está ecuación posee solución única. Además, a esta ecuación se la conoce como la ecuación del oscilador armónico libre o armónico simple. La solución está dada por:

$$\begin{aligned} x\colon\ [0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \end{aligned},$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Notemos que la solución de esta ecuación es una superposición de funciones seno y coseno y por tanto el cuerpo P oscila libremente y su movimiento es periódico, como se esperaba.

Consideremos ahora, que existe una fuerza externa $f(t)$ que actúa sobre el cuerpo P. En este caso la ecuación (2) se convierte en

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \tag{3}$$

la cual es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea. De igual forma, se puede asegurar la existencia y unicidad de la solución de (3). Si $f(t) = \operatorname{sen}(\omega_1 t)$, la soluciones de (3) dependerán de la relación entre ω y ω_1.

Finalmente, si suponemos que existe fricción que esta es proporcional a la velocidad $x'(t)$ del cuerpo P, en este caso la ecuación que rige a este movimiento es:

$$mx''(t) + \beta x'(t) + kx(t) = f(t), \tag{4}$$

$$x''(t) + \frac{\beta}{m} x'(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \tag{5}$$

donde β es una constante de proporcionalidad que debemos determinar, aunque se acostumbra a expresar esta ecuación como:

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \tag{6}$$

con $\frac{\beta}{m} = 2\lambda$. De forma similar se puede demostrar la existencia y unicidad de la solución de (6).

Notemos que las ecuaciones (2), (3) y (6) son ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes y que para su solución en primer lugar debemos determinar la solución general, x_H, de la correspondiente ecuación homogénea. Luego, para los casos en donde existe una fuerza externa no nula y/o fricción que actúa sobre el cuerpo debemos determinar una solución particular, x_P, que lo haremos utilizando el método de variación de parámetros o el método de los coeficientes indeterminados. Utilizando el principio de superposición la solución general será $x = x_H + x_P$, a partir de la cual obtendremos una expresión que describa, para todo tiempo, la posición del cuerpo respecto al origen.

5.6.2. Movimiento Armónico Amortiguado

Para una fuerza externa nula, la ecuación (6) se convierte en:

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = 0, \tag{7}$$

y cuya ecuación característica es:

$$r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$$

con raíces

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2} \qquad \text{y} \qquad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Recordando que tanto ω con λ son positivas, las raíces r_1 y r_2 pueden ser reales o complejas conjugadas dependiendo de que si $\lambda \geq \omega$ o $\lambda < \omega$. Por lo cual, consideramos los tres casos siguientes.

Caso sobre amortiguado $\lambda^2 - \omega^2 > 0$: Las raíces r_1 y r_2 son reales, distintas y negativas, la solución general de (7) es:

$$\begin{aligned} x\colon\ [0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Ahora, dado r_1 y r_2 son negativas, está solución tenderá a decaer sin oscilaciones.

Caso críticamente amortiguada $\lambda^2 - \omega^2 = 0$: Si $\lambda = \omega$, entonces $r_1 = r_2 = -\lambda$ y la solución general de (7) es:

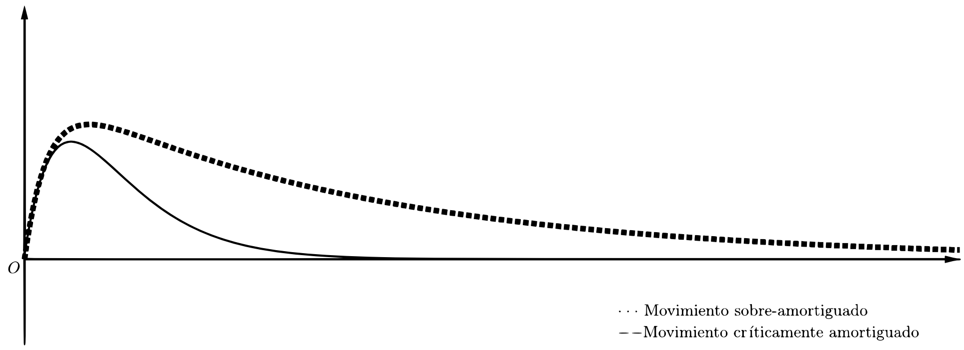
$$\begin{aligned} x\colon\ [0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 e^{-\lambda t} + c_2 t e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

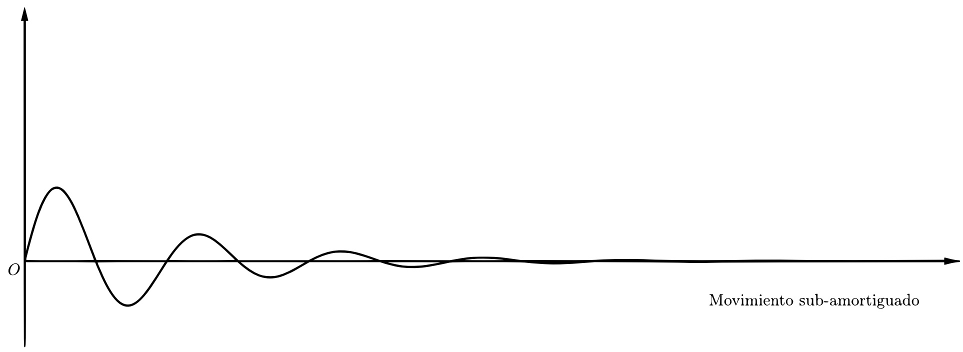
donde c_1 y c_2 son constantes. En este caso la solución decae rápidamente sin oscilaciones.

Caso sub-amortiguado $\lambda^2 - \omega^2 < 0$: Las raíces son números complejos conjugados, siendo $r_1 = -\lambda + i\theta$ y $r_2 = -\lambda - i\theta$, donde $\theta = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$. Luego, la solución general de (7) es:

$$\begin{aligned} x\colon\ [0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-\lambda t}(c_1 \cos(\theta t) + c_2 \operatorname{sen}(\theta t)) \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes. En este caso la solución decae con oscilaciones.





5.6.3. Movimiento Armónico Forzado

Sin consideramos un oscilador sin fricción y con una fuerza externa $f(t) = \operatorname{sen}(\omega_1)$, la ecuación (6) se convierte en:

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = \operatorname{sen}(\omega_1), \tag{8}$$

cuya solución homogénea está dada por:

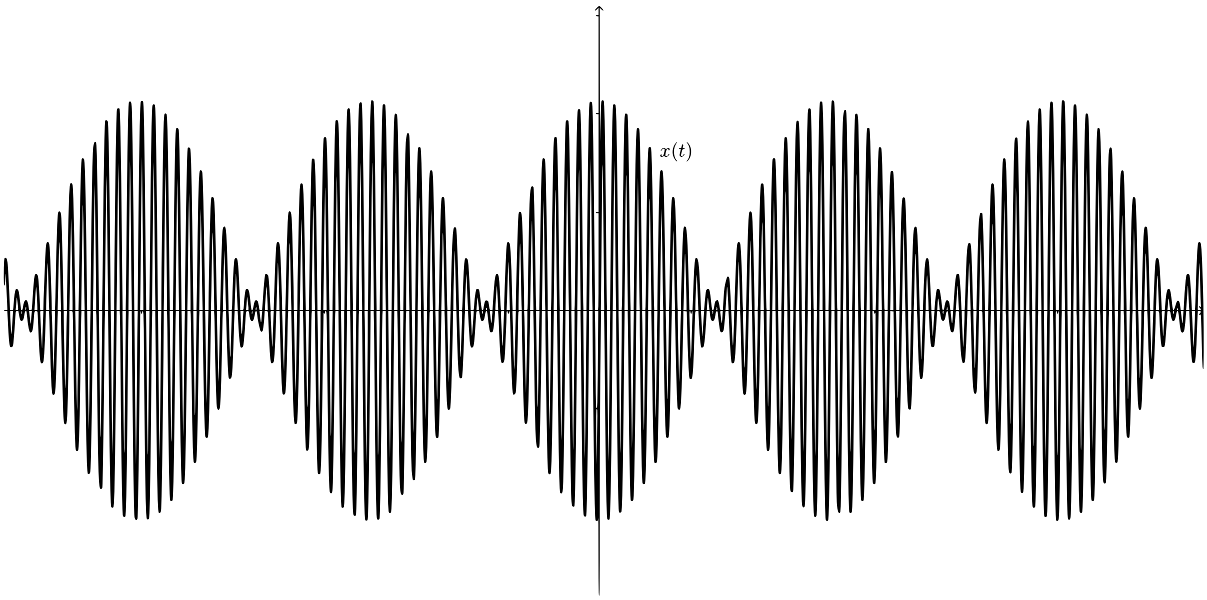
$$\begin{aligned} x_h\colon\ [0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 \operatorname{sen}(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \end{aligned},$$

donde c_1 y c_2 son constantes y que que corresponde a la ecuación del oscilador armónico simple (2) y además dependiendo de la relación entre ω y ω_1 podemos observar resonancia o no (como se muestra en las figuras). En ambos casos la solución particular se puede obtener aplicando el método de coeficientes indeterminados.

Caso no resonante: $\omega \neq \omega_1$. La solución particular está dada por:

$$\begin{aligned} x_p\colon\ [0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{\omega^2-\omega_1^2} \operatorname{sen}(\omega_1 t) \end{aligned},$$

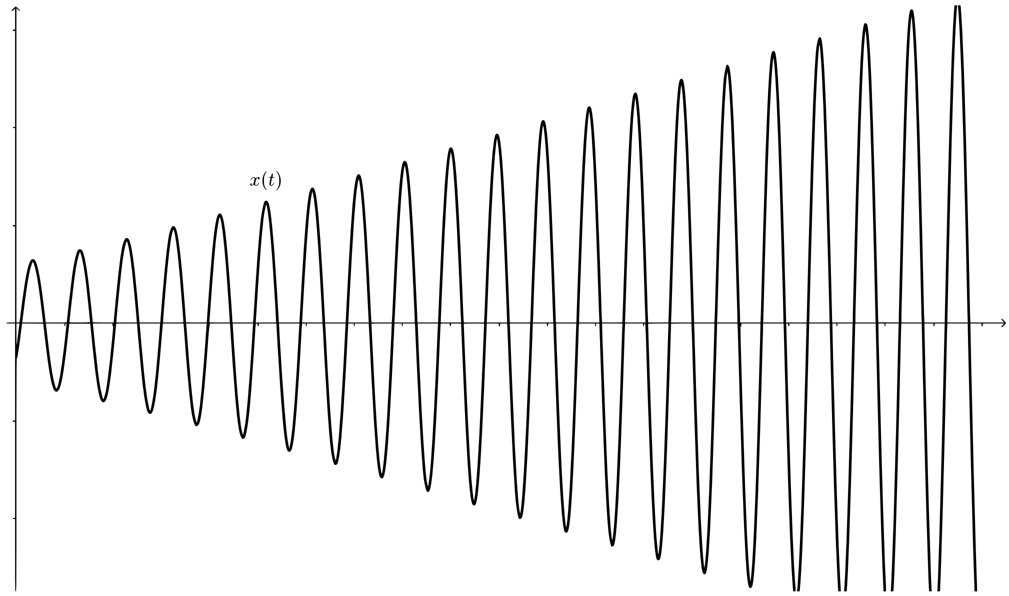
Para ω y ω_1 próximos y para amplitudes de x_h y x_p también cercanos, la solución general $x = x_h + x_p$ exhibe "beats" como en la figura.



Caso resonante: $\omega = \omega_1$. La solución particular está dada por:

$$\begin{aligned} x_p\colon\ [0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto -\frac{1}{2\omega} t \cos(\omega t) \end{aligned}.$$

Como se muestra en la figura, cuando $\omega = \omega_1$ las oscilaciones crecen en el tiempo.

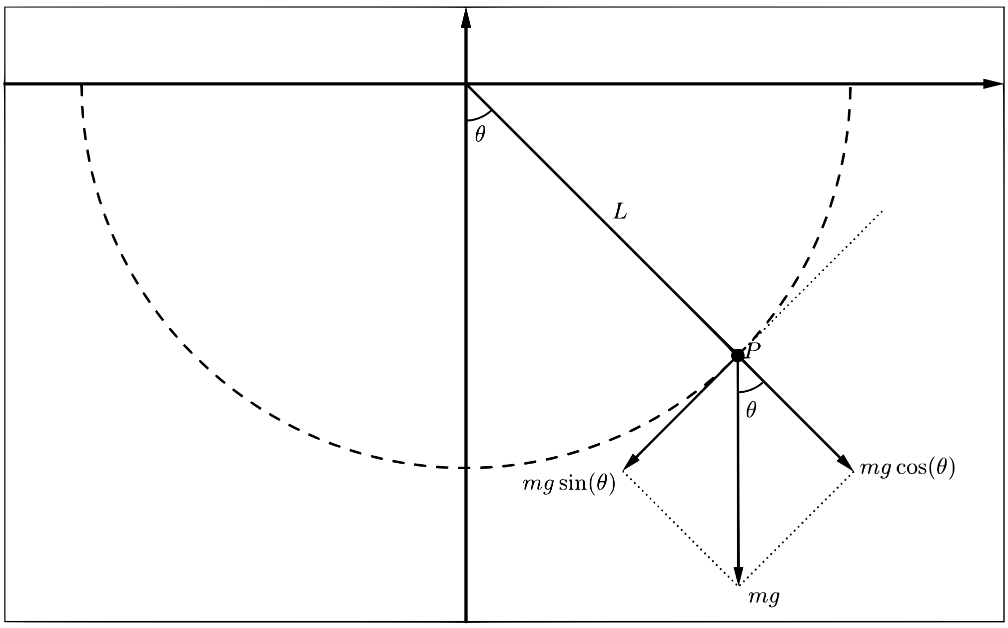


5.6.4. Péndulo Simple

Consideramos un cuerpo P de masa m suspendido de una cuerda de longitud L, fijada al techo. El cuerpo se desplaza de su posición de equilibrio y se lo suelta en el tiempo $t = 0$. El cuerpo se mueve bajo la acción de la gravedad y además suponemos que no existe fricción y que la masa de la cuerda es despreciable. El cuerpo sigue la trayectoria de un círculo de radio L en el plano vertical que pasa a través de la cuerda. Dicho movimiento queda determinado por el ángulo que forma la cuerda con la vertical y por tanto lo que buscamos es una expresión que describa dicho ángulo para todo tiempo.

Solución:

Sea θ el ángulo formado entre la cuerda con el eje vertical como se muestra en la figura siguiente:



Si consideramos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, donde la componente tangencial de la fuerza gravitatoria está dada por $-mg\cos(\theta)$ y la componente tangencial de la aceleración (angular)

$L\theta''$, la segunda ley de Newton implica la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$L\theta'' + g\,\mathrm{sen}(\theta) = 0.$$

Recordando que el desarrollo de Taylor de $\mathrm{sen}(\theta)$ es

$$\mathrm{sen}(\theta) = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots.$$

para pequeñas oscilaciones, podemos aproximar $\mathrm{sen}(\theta)$ por θ por tanto, podríamos reescribir nuestra ecuación diferencial por:

$$L\theta'' + g\theta = 0,$$
$$\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0,$$

la cual es la ecuación del oscilador armónico con $\omega^2 = \dfrac{g}{L}$.

La ecuación característica de esta ecuación es

$$\lambda^2 + g/L = 0,$$

cuyas raíces son $\lambda = \pm i\sqrt{\dfrac{g}{L}}$. De donde, se puede verificar, la solución general está dada por:

$$\begin{aligned} \theta\colon\ [0,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) + c_2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right) \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Notemos que θ es una función periódica con periodo $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{L}}$, que depende solamente del valor de L, más no de la posición de P.

5.6.5. Circuitos Eléctricos

Considere un circuito eléctrico RLC con resistencia R , inductancia L, capacitancia C y con una fuente de voltaje constante V. Estudiemos la relación entre la intensidad de corriente y el tiempo.

Solución: Sean:

t:	el tiempo, medido en unidades de tiempo.
$x(t)$:	la intensidad de corriente al instante t, medida en unidades de intensidad de corriente.

Aplicando la ley de Kirchov se obtiene que la ecuación diferencial que rige este fenómeno es

$$x''(t) + \frac{R}{L}x'(t) + \frac{1}{LC}x(t) = 0. \tag{9}$$

Notemos que la ecuación (9) es también la ecuación de un oscilador armónico amortiguado, con $k = \dfrac{R}{L} > 0$, $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} > 0$ y $f = 0$. La ecuación (9) también es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes donde $a = 1$, $b = k$ y $c = \omega^2$.

!

- Las constantes c_1 y c_2 serán determinadas a partir de las condiciones iniciales.
- El decaimiento de la solución se debe a la presencia del término $k = \dfrac{R}{L} > 0$. En términos

del circuito, la presencia de la resistencia R provoca que la energía se disipe, lo que induce a que la intensidad de corriente decaiga.

- Si la resistencia R no está presente, es decir $R = 0$, obtenemos un circuito LC, siendo en este caso $\gamma = 0$ y $\omega = 0$. Donde la solución general será

$$\begin{aligned} x\colon [0, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 \cos(\theta t) + c_2 \operatorname{sen}(\theta t) \end{aligned},$$

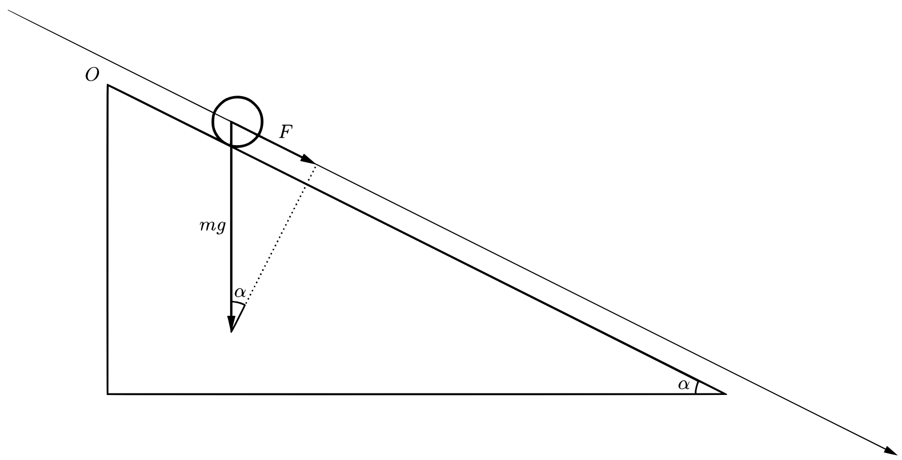
lo que significa que la intensidad de corriente es de forma sinusoidal que oscila sin decaer.

5.6.6. Plano Inclinado

Consideremos un cuerpo de masa m ubicado en el extremo superior de un plano inclinado, con ángulo de inclinación α, en donde se considera la existencia del rozamiento entre el cuerpo y el plano. Determinar una expresión que modele la relación entre el desplazamiento del cuerpo con respecto al tiempo.

Solución:

Consideremos la siguiente figura:



y sean:

t:	el tiempo, medido en unidades de tiempo.
$x(t)$:	el desplazamiento del cuerpo desde O, al instante t, medido en unidades de longitud.

La componente de la fuerza de la gravedad, mg, paralela al plano inclinado es $mg \operatorname{sen}(\alpha)$. Notemos que $x''(t)$ representa a la aceleración del cuerpo. De acuerdo con la segunda ley de Newton del movimiento, se tiene que

$$x''(t) = g \operatorname{sen}(\alpha).$$

Notemos que la solución de la correspondiente ecuación homogénea, x_H está dada por

$$\begin{aligned} x_H\colon [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 + c_2 t \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes, además, una solución particular, x_P, está dada por

$$\begin{aligned} x_P\colon\ [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{2}gt^2\operatorname{sen}(\alpha). \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} x\colon\ [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 + c_2 t + \frac{1}{2}gt^2\operatorname{sen}(\alpha) \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

A partir de las condiciones iniciales, verifique, las constantes son: $c_1 = x(0)$ y $c_2 = x'(0)$, luego, la solución buscada es

$$\begin{aligned} x\colon\ [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto x(0) + x_0' t + \frac{1}{2}gt^2\operatorname{sen}(\alpha). \end{aligned}$$

! Notemos que la expresión que relaciona al desplazamiento con el tiempo no depende del valor de la masa.

6. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

En esta sección extendemos los resultados obtenidos para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden para ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Para esto, notemos que la ecuación que trabajaremos está dada por:

$$p_0(t)x^{(n)}(t) + p_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + p_n(t)x(t) = f(t), \tag{1}$$

donde $I \subseteq \mathbb{R}$ y $p_0, p_1, \ldots, p_n, f\colon I \to \mathbb{R}$.

6.1 Existencia y unicidad

TEOREMA 1

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $p_0, p_1, \ldots, p_n, f\colon I \to \mathbb{R}$. Considere la ecuación diferencial (1). *Si $p_0, p_1, \ldots, p_n, f$ son continuas en I, con $p_0(t) \neq 0$ para cada $t \in I$, entonces para cualquier $t_0 \in I$, existe una única solución $x\colon I \to \mathbb{R}$ de* (1) *que satisface las condiciones iniciales*

$$x(t_0) = \alpha_1, x'(t_0) = \alpha_2, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = \alpha_n,$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

!

Notemos que si en (1) se tiene que $p_0(t) \neq 0$ para cada $t \in I$, entonces la ecuación se escribe como

$$x^{(n)}(t) + q_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + q_n(t)x(t) = g(t), \tag{2}$$

donde $q_i = \dfrac{p_1}{p_0}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $g = \dfrac{f}{p_0}$.
Además, si $g(t) = 0$ para cada $t \in I$, se obtiene la correspondiente ecuación homogénea y el teorema anterior asegura la existencia de su solución general.
La correspondiente ecuación homogénea de (2) es

$$x^{(n)}(t) + q_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + q_n(t)x(t) = 0. \tag{3}$$

6.1.1. Independencia lineal y Wronskiano

DEFINICIÓN 1

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f_1, \ldots, f_n\colon I \to \mathbb{R}$. Decimos que $f_1, \ldots, f_n$ son linealmente independientes en I si para todo grupo de n contantes $c_1, \ldots, c_n$ se tiene que

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_n f_n(t) = 0$$

para cada $t \in I$, implica que $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Si $f_1, \ldots, f_n$ no son linealmente independientes en I, decimos que son linealmente dependientes.

DEFINICIÓN 2

Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f_1, \ldots, f_n \colon I \to \mathbb{R}$. El Wronskiano de las funciones $f_1, \ldots, f_n$, está definido por

$$W(f_1, \ldots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \ldots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \ldots & f_n'(t) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

TEOREMA 2: Teorema de Abel

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son soluciones de (3), para algún intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, donde $q_1, \ldots, q_n$ son continuas en I, entonces

$$W(f_1, \ldots, f_n)(t) = c \exp\left(- \int q_1(t)\, dt \right).$$

A continuación, se presenta un resumen de los resultados generalizados para ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

1. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son soluciones de (3), entonces toda combinación lineal de estás soluciones también es solución de (3). Esto es, $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ es solución de (3), donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes.

2. El Wronskiano de soluciones de (3) es siempre cero o nunca es cero en el intervalo en donde las soluciones están definidas.

3. Si el Wronskiano de cualquier colección de funciones $f_1, \ldots, f_n$, es cero para algún punto del intervalo en donde está definido, entonces las funciones son linealmente independientes en ese intervalo. Además, si las funciones son linealmente dependientes en un determinado intervalo, entonces su Wronskiano es igual a cero para todo punto de dicho intervalo.

4. Si $x_1, \ldots, x_n$ son soluciones de (3), entonces son linealmente independientes si y sólo si su Wronskiano es diferente de cero.

5. Si $x_1, \ldots, x_n$ son soluciones de (3), cuyo Wronskiano es diferente de cero, entonces estás conforman un conjunto fundamental de soluciones, y, por tanto

   $$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

   donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes, es la solución general de (3).

6.2 Coeficientes constantes

Consideremos a la ecuación

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_nx(t) = 0, \tag{4}$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$. De forma similar a lo realizado para el caso de ecuaciones de diferenciales lineales de segundo orden, se propone como solución de (4) a $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $x(t) = e^{rt}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. De su derivación y reemplazo en la ecuación dada, obtenemos la ecuación característica o ecuación auxiliar de (4), dada por

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

TEOREMA 3

Sean $r_1, \ldots, r_m$ las raíces de la ecuación característica de (4) y sea m_i la multiplicidad de r_i, con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

- *Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la función $x_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $x_i(t) = t^k e^{r_i t}$ para cada $t \in \mathbb{R}$ con $k \in \{1, \ldots, m_i - 1\}$ es solución de (4).*
- *Las soluciones x_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$ son linealmente independientes.*

6.2.1. Ecuación no homogénea

De forma similar a lo realizado para ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, para determinar la solución general de (2) es necesario determinar la solución general de la correspondiente ecuación homogénea (3), y una solución particular de (2).

TEOREMA 4

Si $x_H = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ es la solución general de (3) y si x_P es cualquier solución particular de (2), entonces $x = x_H + x_P$ es la solución general de (2).

6.2.2. Método de variación de parámetros

Sean $x_1, \ldots, x_n$ soluciones independientes de (3), buscamos funciones $v_1, \ldots, v_n$ tales que $x_P = v_1 x_1 + \ldots + v_n x_n$ es una solución particular de (2). Para obtener estas funciones debemos resolver el sistema de n ecuaciones para $v_1', \ldots, v_n'$ y entonces integrar cada una:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
v_1' x_1 & + & v_2' x_2 & + & \ldots & + & v_n' x_n & = & 0, \\
v_1' x_1' & + & v_2' x_2' & + & \ldots & + & v_n' x_n' & = & 0, \\
v_1' x_1'' & + & v_2' x_2'' & + & \ldots & + & v_n' x_n'' & = & 0, \\
 & & & & \vdots & & & & \\
v_1' x_1^{(n-1)} & + & v_2' x_2^{(n-1)} & + & \ldots & + & v_n' x_n^{(n-1)} & = & g.
\end{array}\right.$$

6.2.3. Método de los coeficientes indeterminados

Recordemos que el método de los coeficientes indeterminados depende de proponer una solución particular adecuada, la cual depende de la forma de g en (2). Notemos que este método puede ser aplicado directamente a partir de la forma de g o luego de la aplicación y reescritura del problema en función del operador diferencial $\mathcal{D}$.

En el siguiente ejercicio ilustramos la aplicación de ambos métodos.

EJERCICIO 1. Resolver la ecuación

$$x'''(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) = e^t. \tag{5}$$

Solución: Obtengamos la solución general de la ecuación homogénea

$$x'''(t) - x''(t) + x'(t) - x(t) = 0.$$

Notemos que la ecuación característica de esta ecuación es

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0$$

cuyas raíces son $r_1 = 1$, $r_2 = -i$ y $r_3 = i$, luego,

$$\begin{aligned} x_1 \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^t \end{aligned}, \quad \begin{aligned} x_2 \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \operatorname{sen}(t) \end{aligned} \quad y \quad \begin{aligned} x_3 \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \cos(t) \end{aligned},$$

son soluciones de la ecuación homogénea y forman un conjunto fundamental de soluciones, por tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} x_H \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1 e^t + c_2 \operatorname{sen}(t) + c_3 \cos(t) \end{aligned}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes. Para determinar una solución particular de (5), la determinaremos por los dos métodos expuestos anteriormente.

Primer método. Método de variación de parámetros. Buscamos funciones v_1, v_2 y v_3 tales que $x_P = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3$ sea una solución particular de (5). Para determinar estás funciones debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} e^t v_1'(t) & + & \operatorname{sen}(t) v_2'(t) & + & \cos(t) v_n'(t) & = & 0, \\ e^t v_1'(t) & + & \cos(t) v_2'(t) & - & \operatorname{sen}(t) v_n'(t) & = & 0, \\ e^t v_1'(t) & - & \operatorname{sen}(t) v_2'(t) & - & \cos(t) v_n'(t) & = & e^t, \end{cases}$$

cuya solución es

$$v_1'(t) = \frac{1}{2}, \quad v_2'(t) = -\frac{1}{2} e^t (\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) \quad y \quad v_3'(t) = -\frac{1}{2} e^t (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Integrando las funciones anteriores, tenemos que

$$v_1(t) = \frac{1}{2} t, \quad v_2(t) = -\frac{1}{2} e^t \operatorname{sen}(t) \quad y \quad v_3'(t) = -\frac{1}{2} e^t \cos(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Luego, la solución particular está dada por

$$x_P = \frac{1}{2} e^t (t - 1)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, la solución general de (5) es

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1e^t + c_2\operatorname{sen}(t) + c_3\cos(t) + \frac{1}{2}e^t(t-1) \end{aligned}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes.

Segundo método. Método de los coeficientes indeterminados. A partir del lado derecho de (5) se propone como solución particular a $z_P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $z_P(t) = ae^t$ para cada $t \in \mathbb{R}$, donde a es una constante a ser determinada. Sin embargo, $z_P(t)$ es una solución de la correspondiente ecuación homogénea, razón por la cual, se redefine z_P por $z_P(t) = ate^t$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Derivando z_P tres veces, luego de la sustitución de z_P, z_P', z_P'' y z_P''' en (5), obtenemos la ecuación

$$2ae^t = e^t$$

a partir de lo cual, $a = \frac{1}{2}$. Luego, la solución particular está definida por

$$z_P(t) = \frac{1}{2}te^t$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, la solución general de (5) es

$$\begin{aligned} x\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto c_1e^t + c_2\operatorname{sen}(t) + c_3\cos(t) + \frac{1}{2}te^t \end{aligned}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes. $\square$

> **!** Observamos que en el ejemplo anterior se determinaron dos soluciones particulares diferentes, lo cual no es algo que debería sorprendernos, dado que hemos determinado la solución general de la ecuación, más no una solución particular, es decir, no se utilizaron condiciones iniciales específicas. Recordemos, el problema de valor inicial posee solución única.
>
> Además, si en la solución general obtenida con el primer método tomamos $c_1' = c_1 - \frac{1}{2}$, obtenemos la solución general resultante de utilizar el segundo método.

7. TRANSFORMADA DE LAPLACE

7.1 Definiciones fundamentales

DEFINICIÓN 1: Transformada de Laplace

Dada la función $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, si el límite

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-st} f(t)\, dt$$

existe, entonces la transformada de Laplace de f es

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f\}\colon\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt, \end{aligned}$$

donde $I \subseteq \mathbb{R}$, es tal que $\mathscr{L}\{f\}$ está bien definida.

! Para cada $s \in I$, de la definición anterior, la notación utilizada para referirnos a la imagen de s bajo $\mathscr{L}\{f(t)\}$, es común utilizar cualquiera de las siguientes notaciones: $\mathscr{L}\{f\}(s)$, $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$ o $F(s)$.

! La transformada de Laplace también puede ser definida en un dominio de números complejos, sin embargo, para el propósito de este curso solamente trabajaremos en los reales.

7.2 Existencia de la transformada de Laplace

DEFINICIÓN 2

Dados $I \subseteq \mathbb{R}$ y la función $f\colon I \to \mathbb{R}$.

- *Decimos que f tiene un salto discontinuo en $a \in I$ si los límites*

  $$\lim_{t\to a^+} f(t) \qquad y \qquad \lim_{t\to a^-} f(t)$$

  existen, pero no son iguales.

- *Decimos que f es continua por partes en I, si existe $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ numerable, tal que f es continua en $I \setminus \mathcal{I}$ y posee un salto discontinuo en cada punto de $\mathcal{I}$.*

DEFINICIÓN 3

Dados $I \subseteq \mathbb{R}$ y la función $f\colon I \to \mathbb{R}$, se dice que f es de orden exponencial si existen α, M y T números reales positivos tales que

$$|f(t)| \le M e^{\alpha t}$$

para cada $t > T$.

! A futuro cuando nos refiramos a una función de orden exponencial, supondremos, a menos que sea necesario explicitar, que las constantes α, M y T de la definición están dadas.

TEOREMA 1

Dada la función $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua por partes en $[0,+\infty[$ y de orden exponencial. Entonces la transformada de Laplace de f existe en $I =]\alpha,+\infty[$.

TEOREMA 2

Dada la función $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua por partes en $[0,+\infty[$ y de orden exponencial. Entonces

$$\lim_{s\to+\infty} \mathscr{L}\{f\}(s) = 0.$$

!

- Para que f sea de orden exponencial es suficiente que:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^{ct}},$$

  exista.
- Todo polinomio tiene transformada.
- Toda función acotada tiene transformada.
- La función $t \to t^{-1/2}$, no es de orden exponencial, sin embargo, posee transformada de Laplace.

PROPOSICIÓN 3. Si f y g son dos funciones continuas por partes, ambas de orden exponencial que difieren en un conjunto numerable, entonces

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s),$$

para cada $s \in I$, donde I es un intervalo adecuado en donde ambas transformadas existen.

7.3 Propiedades de la Transformada de Laplace

PROPOSICIÓN 4. La transformada de Laplace es un operador lineal.

TEOREMA 5

Si f es una función de orden exponencial. Entonces $F = \mathscr{L}\{f\}$ es derivable un infinito número de veces en cada $s \in I \subseteq \mathbb{R}$ donde $\mathscr{L}\{f(t)\}$ existe. Además,

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathscr{L}\{t^n f(t)\}(s) \quad n = 1,2,\ldots$$

donde $F^{(n)} = \dfrac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\{f\}$ *existe.*

TEOREMA 6

Supongamos que f *es una función derivable en* $[0, +\infty[$ *y de orden exponencial. Si* $\mathscr{L}\{f'\}$ *existe, entonces*

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0)$$

para cada $s \in I$*, en donde* $I \subseteq \mathbb{R}$ *es tal que* $\mathscr{L}\{f\}$ *existe.*

TEOREMA 7

(a) $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$.

(b) $\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$*, donde* $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) $\mathscr{L}\{e^{\alpha t}\} = \dfrac{1}{s-\alpha}$*, donde* $\alpha > 0$.

(d) $\mathscr{L}\{\operatorname{sen}(\alpha t)\} = \dfrac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$.

(e) $\mathscr{L}\{\cos(\alpha t)\} = \dfrac{s}{s^2+\alpha^2}$.

(f) $\mathscr{L}\{\operatorname{senh}(\alpha t)\} = \dfrac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$.

(g) $\mathscr{L}\{\cosh(\alpha t)\} = \dfrac{s}{s^2-\alpha^2}$.

PROPOSICIÓN 8. Dada $a \in \mathbb{R}$, se define a la "función"delta del Dirac $\delta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\delta(t-a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = a, \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$$

Entonces $\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-sa}$.

TEOREMA 9

Dada $a \in \mathbb{R}$*, supongamos que* f *es una función continua por partes en* $[0, +\infty[$ *y de orden exponencial. Entonces*

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$$

para cada $s > a$.

TEOREMA 10

Supongamos que f *es una función continua por partes en* $[a, +\infty[$ *y de orden exponencial. Entonces*

$$\mathscr{L}\left\{\int_a^t f(\tau)\,d\tau\right\}(s) = \frac{\mathscr{L}\{f\}}{s} - \frac{1}{s}\int_a^t f(\tau)d\tau$$

para cada $s \in I$, en donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $\mathscr{L}\{f\}$ existe.

7. TRANSFORMADA DE LAPLACE

7.4 Propiedades de la Transformada de Laplace

TEOREMA 1

Supongamos que $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son funciones continuas en $[0, +\infty[$ y de orden exponencial, y que $f^{(n)}$ es una función continua por partes en $[0, +\infty[$. Entonces

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \mathscr{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

para cada $s \in I$, en donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $\mathscr{L}\{f\}$ existe.

DEFINICIÓN 1

Dada $a \in \mathbb{R}$, se define la función escalón unitaria por

$$\begin{aligned} U\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \{0,1\} \\ t &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases} \end{aligned}$$

TEOREMA 2

Dada $a > 0$, supongamos que f es una función continua por partes en $[0, +\infty[$ y de orden exponencial. Entonces

$$\mathscr{L}\{f(t-a)U(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$$

para cada $s \in I$, en donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $\mathscr{L}\{f\}$ existe.

7.5 Transformada de Laplace Inversa

PROPOSICIÓN 3. Sean f y g dos funciones continuas por partes en $[0, +\infty[$ y de orden exponencial. Si $\mathscr{L}\{f\} = \mathscr{L}\{g\}$ para un determinado intervalo, entonces $f(t) = g(t)$ para cada $t \in [0, +\infty[$, excepto en un conjunto numerable $\mathcal{I} \subseteq I$.

Si f y g son continuas en $[0, +\infty[$ entonces el resultado se cumple para cada $t \in [0, +\infty[$.

DEFINICIÓN 2: Transformada de Laplace inversa

Sea F una función dada. Si existe una función f tal que $\mathscr{L}\{f\}$ existe y $F = \mathscr{L}\{f\}$, entonces decimos que F posee Transformada de Laplace inversa dada por f. En este caso escribimos

$f = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$.

!

- La idea de la inversa de la transformada de Laplace no es nueva, notemos en efecto que $\mathscr{L}\{f\} = F$ si y sólo si $f = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$, asumiendo que la inversa exista.
- Una notación alternativa para referirnos a la inversa de la transformada de Laplace es $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$ para cada t en donde la misma está definida.
- La existencia de la transformada de Laplace inversa no asegura su unicidad, sin embargo, para una función f continua por partes en $[0, +\infty[$ y de orden exponencial, entonces $\mathscr{L}\{f\}$ está determinada de forma única, salvo por un conjunto numerable.

TEOREMA 4

La transformada de Laplace inversa es un operador lineal.

TEOREMA 5

Sean P y Q dos polinomios de grado n y m, respectivamente, donde $n < m$. Si Q tiene m raíces no repetidas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P}{Q}\right\}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}$$

para cada t en donde la expresión anterior está bien definida.

TEOREMA 6

(a) $1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$.

(b) $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}$, *donde* $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) $e^{\alpha t} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\}$, *donde* $\alpha > 0$.

(d) $\operatorname{sen}(\alpha t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\right\}$.

(e) $\cos(\alpha t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\alpha^2}\right\}$.

(f) $\operatorname{senh}(\alpha t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}\right\}$.

(g) $\cosh(\alpha t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-\alpha^2}\right\}$.

7.5.1. Convolución

DEFINICIÓN 3

Sean f y g dos funciones continuas por partes en $[0,+\infty[$, la convolución de f con g denotada por $f*g$, es

$$\begin{aligned} f*g\colon\ [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \int_0^t f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta \end{aligned}.$$

- Notemos que $(f*g)(t)=f(t)*g(t)$ para cada $t\in[0,+\infty[$.
- Para una función g, en general, se tiene que $1*g\neq g$.

TEOREMA 7: Propiedades de la convolución

Sean f, g y h funciones continuas por partes en $[0,+\infty[$, entonces:

- $f*g=g*f$.
- $c(f*g)=(cf)*g=f*(cg)$.
- $f*(g*h)=(f*g)*h$.
- $f*(g+h)=f*g+f*h$.

TEOREMA 8

Sean f y g dos funciones continuas por partes y de orden exponencial. Si $F=\mathscr{L}\{f\}$ y si $G=\mathscr{L}\{g\}$, se tienen que

$$\mathscr{L}\{f*g\}=F\cdot G$$

y que

$$\mathscr{L}^{-1}\{F\cdot G\}=f*g.$$