3. Calcule la potencia del siguiente numero complejo:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}.$$

Solución. Sabiendo que $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n\left(\cos(n\theta)+i\,\mathrm{sen}(n\theta)\right)$, expresmos el número complejo en su forma polar. En efecto,

$$r=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$\theta=\arctan(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cos(\frac{\pi}{4})+i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})\right)$$

y así

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{10}&=\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{10}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{10\pi}{4}\right)\right)\\&=\left(\frac{1}{32}\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)\\&=\frac{i}{32}\end{aligned}$$

□

4. Reducir la siguiente fracción:

$$\frac{(1-i)^{10}}{(1+i)^3}$$

Solución. Expresando los números complejos en forma polar, tenemos

$$\frac{(1+i)^{10}}{(1+i)^3}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{10}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}.$$

Aplicando el teorema de De Moivre,

$$\frac{(1+i)^{10}}{(1+i)^3}=\frac{(\sqrt{2})^{10}e^{-i10\frac{\pi}{4}}}{(\sqrt{2})^3e^{i3\frac{\pi}{4}}}.$$

Utilizando propiedades de la función exponencial

$$\frac{(1+i)^{10}}{(1+i)^3}=\left(\sqrt{2}\right)^7e^{\frac{-13i\pi}{4}}.$$

Haciendo uso del teorema de Euler, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{(1+i)^{10}}{(1+i)^3} &= 2^{\frac{7}{2}}\left(\cos\left(\frac{-13i\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{-13i\pi}{4}\right)\right)\\
&= 2^{\frac{7}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \frac{2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}(1-i)\\
&= 8-8i
\end{aligned}$$

□

5. Dada la función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \text{sen}(z), \end{array}$$

determinar la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$, con $z = x + yi$ y $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. Por la indentidad del seno de la suma, tenemos que

$$\text{sen}(z) = \text{sen}(x+iy) = \text{sen}(x)\cos(iy) + \cos(x)\,\text{sen}(iy).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \quad \text{y} \quad \text{sen}(iy) = \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i},$$

o, usando funciones trigonométricas hiperbólicas,

$$\cos(iy) = \cosh(y) \quad \text{y} \quad \text{sen}(iy) = i\sinh(y).$$

De este modo se tiene que

$$f(z) = \text{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y),$$

con lo que

$$\Re(f(z)) = \text{sen}(x)\cosh(y) \quad \text{y} \quad \Im(f(z)) = \cos(x)\sinh(y),$$

como se deseaba. □

7. Sean f y g funciones continuas a trozos en intervalo $[a,b]$ y suponga que f_1 se identifica con f y g_1 se identifica con g. Pruebe que

$$\int_a^b f_1(x)g_1(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Solución. Comenzamos notando que las funciones fg y f_1g_1 están definidas en el intervalo $[a,b]$. Analicemos entonces

$$\int_a^b f_1(x)g_1(x) - f(x)g(x)\,dx.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1(x)g_1(x) - f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b f_1(x)g_1(x) - f_1(x)g(x) + f_1(x)g(x) - f(x)g(x)\,dx,\\
&= \int_a^b f_1(x)[g_1(x)-g(x)] + [f_1(x)-f(x)]g(x)\,dx,\\
&= \int_a^b f_1(x)[g_1(x)-g(x)]\,dx + \int_a^b [f_1(x)-f(x)]g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Ahora notemos que si g_1 se identifica con g, la función $g_1 - g$ es nula salvo en un número finito de puntos, esto significa que $f_1(g_1 - g)$ es nula salvo en un número finito de puntos, lo que anula la primera integral. Con un razonamiento similar se sigue que se anula la segunda integral, de dónde

$$\int_a^b f_1(x)g_1(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

□

8. Sea f una función diferenciable en el intervalo $[-a, a]$. Muestre que f' es impar cuando f es par e impar cuando f es par.

Solución. *a*) Supongamos que f es par. Es decir que para todo $x \in [-a, a]$ se tiene $f(x) = f(-x)$. Ya que f es diferenciable en $[-a, a]$, tenemos que para todo $x \in [-a, a]$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Entonces tenemos que

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h},$$

usando la paridad de f tenemos

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x-h) - f(x)}{h}, \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+(-h)) - f(x)}{-(-h)}, \end{aligned}$$

usando el cambio de variable $t = -h$ obtenemos

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x)}{-t}, \\ &= -\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}, \\ &= -f'(x). \end{aligned}$$

b) Supongamos que f es impar. Es decir que para todo $x \in [-a, a]$ se tiene $f(-x) = -f(x)$.

Sea $c \in [-a, a]$. Ya que f es diferenciable en c tenemos

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Usando la paridad de f conseguimos

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c} \frac{-f(x) + f(c)}{-x + c}, \\ &= \lim_{x\to c} \frac{f(-x) - f(-c)}{-x - (-c)}, \end{aligned}$$

de dónde, si usamos el cambio de variable $y = -x$ se tiene

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{y\to -c} \frac{f(y) - f(-c)}{y - (-c)}, \\ &= f'(-c). \end{aligned}$$

□

9. Demuestre que toda función real f, definida en un intervalo de la forma $[-a, a]$ para $a \in \mathbb{R}$, puede ser expresada como la suma de una función par y una impar (A cada uno de estos sumandos se los conoce como la *parte par* y la *parte impar* de f). [*Pista:* $2f(x) = f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)$.]

Solución. Definimos las funciones

$$f_E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \; f_O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Tenemos que

$$f_E(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_E(x),$$

por otra parte

$$f_O(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_O(x).$$

De donde f se expresa como

$$f = f_E + f_O.$$

□

Ejercicios clase CP: 3, 4c, 5b, 5c, 5d, 6b, 10b.

3. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función creciente y acotada. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se define

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{y} \qquad t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

   a) Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n \le \int_0^1 f(x)\,dx \le t_n \qquad \text{y} \qquad 0 \le \int_0^1 f(x)\,dx - s_n \le \frac{f(1)-f(0)}{n}.$$

   b) Demuestre que las sucesiones (s_n) y (t_n) ambas convergen y que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Solución. a) Fijemos $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ y sea $x \in [k/n,(k+1)/1]$. Así

$$\frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n},$$

y, como f es creciente, se tiene que

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{k+1}{n}\right), \quad \text{si } \frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n}.$$

Integrando la desigualdad anterior en el intervalo $[k/n,(k+1)/n]$ se tiene que

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx \le \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

para todo $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Sumando término a término la anterior desigualdad para $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ se tiene que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Pero tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

con lo cual se tiene que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

en donde, cambiando el índice k de la última sumatoria por $k-1$, se tiene que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_0^1 f(x)\,dx \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

es decir,

$$s_n \le \int_0^1 f(x)\,dx \le t_n$$

como se deseaba.

Para probar la segunda desigualdad, de la primera desigualdad restamos s_n a cada término, con lo cual

$$0 \leq \int_0^1 f(x)\, dx - s_n \leq t_n - s_n.$$

Con esto, dado que

$$t_n - s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1) - \frac{1}{n}f(0) = \frac{f(1)-f(0)}{n},$$

se tiene

$$0 \leq \int_0^1 f(x)\, dx - s_n \leq \frac{f(1)-f(0)}{n}.$$

b) De la desigualdad anterior, por el teorema del sándwich, tenemos que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\, dx - s_n \leq \frac{f(1)-f(0)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(1)-f(0)}{n} = 0,$$

con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Además, tenemos que

$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)-f(0)}{n} \to \int_0^1 f(x)\, dx,$$

como se quería.

$\square$

4. Estudie la convergencia de cada una de las siguientes series. Si la serie es convergente, calcule su suma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+1/n)^n(1+n))}{\log(n^n)\log((n+1)^{n+1})}$, donde log es la función logaritmo natural.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, donde $0 < a < 1$.

Solución. c) Para cada $n \geq 1$ sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k.$$

Entonces, para todo $n \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} ka^k \\ &= a\sum_{k=1}^{n+1} ka^{k-1} \\ &= a\sum_{k=0}^{n} (k+1)a^k \\ &= a\sum_{k=0}^{n} ka^k + a\sum_{k=0}^{n} a^k \end{aligned}$$

$$= a\sum_{k=1}^{n} ka^k + a\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$
$$= aS_n + \frac{a}{1-a} - \frac{a^{n+2}}{1-a},$$

en donde hemos utilizado la fórmula de la suma de los $n+1$ primeros términos de una serie geométrica. Con esto, tenemos la relación de recurrencia

$$S_{n+1} = aS_n + \frac{a}{1-a} - \frac{a^{n+2}}{1-a}, \quad n \geq 1.$$

Usando reiteradamente esta relación de recurrencia, se tiene

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a\left(aS_{n-1} + \frac{a}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}\right) - \frac{a^{n+2}}{1-a} \\ &= a^2 S_{n-1} + \frac{a+a^2}{1-a} - \frac{2a^{n+1}}{1-a} \\ &= a^2\left(aS_{n-2} + \frac{a}{1-a} - \frac{a^n}{1-a}\right) + \frac{a+a^2}{1-a} - \frac{2a^{n+1}}{1-a} \\ &= a^3 S_{n-2} + \frac{a+a^2+a^3}{1-a} - \frac{3a^{n+2}}{1-a}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq 3$. Tomando en cuenta que $S_1 = a$, esto sugiere que

$$S_{n+1} = a^{n+1} + \frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^{n} a^k - \frac{na^{n+2}}{1-a}, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

Demostraremos (1) por inducción sobre n. Para $n = 1$ se tiene

$$S_2 = a + 2a^2 = a^{1+1} - \frac{a}{1-a} + \frac{a^{1+2}}{1-a},$$

lo que prueba el caso base. Ahora, supongamos que (1) es válida para n. Entonces, de la relación de recurrencia tenemos que

$$S_{n+2} = aS_{n+1} + \frac{a}{1-a} - \frac{a^{n+3}}{1-a},$$

en donde, usando la hipótesis de inducción, se obtiene

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= a\left(a^{n+1} + \frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^{n} a^k - \frac{na^{n+2}}{1-a}\right) + \frac{a}{1-a} - \frac{a^{n+3}}{1-a} \\ &= a^{n+2} + \frac{1}{1-a}\sum_{k=1}^{n+1} a^k - \frac{(n+1)a^{n+3}}{1-a}, \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.
Con esto, junto con la fórmula de la suma geométrica, podemos escribir

$$S_n = \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{a^n}{1-a} - na^n\frac{a}{1-a}, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Como $0 < a < 1$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} na^n = 0,$$

lo que implica que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

□

5. Determine si las series que se presentan a continuación son convergentes o divergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n}-1)^n$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$.

Solución. b) Para cada $n \geq 1$ sea

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{3^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{3^n n!/n^n} \\ &= \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 3\frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= 3\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. Con esto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 3\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 3e^{-1},$$

y como $e < 3$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

por lo que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

diverge.

c) Escribimos

$$a_n = (n^{1/n}-1)^n, \quad n \geq 1.$$

Tenemos que

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{1/n} - 1, \quad n \geq 1,$$

y dado que

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1,$$

se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (n^{1/n}-1) = 0 < 1.$$

Así, por el criterio de la raíz, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n}-1)^n$$

converge.

d) Escribimos

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad b_n = e^{-n^2}, \quad n \geq 1.$$

La serie de término general a_n diverge. Por otro lado, si escribimos $b_n = f(n)$ para cada $n \geq 1$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = e^{-x^2}$, tenemos que, para todo $x \geq 1$

$$e^{-x^2} \leq e^{-x},$$

y además

$$\int_1^\infty e^{-x}\, dx = e^{-1},$$

lo que implica, por el criterio de comparación, que la integral de Riemann impropia

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\, dx$$

converge. Así, por el criterio integral, se tiene que la serie de término general b_n converge. Tenemos entonces que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2} \right)$$

diverge, pues el término general de la misma es la suma del término general de una serie divergente y del término general de serie una convergente.

$\square$

6. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos.

   a) Si $\sum a_n$ converge, demuestre que la serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$
   converge.

   b) Si $\sum a_n$ diverge, demuestre que la serie
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$
   también diverge.

Solución. b) Consideremos dos posibilidades. Si

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \neq 0,$$

y por ende la serie $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge. En caso contrario, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que

$$a_n < 1.$$

Así, para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{a_n}{1+1} = \frac{1}{2} a_n.$$

Como la serie $\sum a_n$ diverge, también diverge la serie $\sum \frac{1}{2} a_n$, de modo que, por el criterio de comparación, la serie $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ diverge.

$\square$

10. Verifique los siguientes desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto $x_0 = 0$, para los valores de x indicados.

a) $\operatorname{sen}^3(x) = \dfrac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

b) $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, para $|x| < 1$; y

c) $\dfrac{x}{1+x-2x^2} = \dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$, para $|x| < 1/2$.

Para ello, puede asumir conocidos los desarrollos en serie de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $\log(1-x)$ y $1/(1-x)$ si $|x| < 1$.

Solución. b) Notemos que, para $|x| < 1$

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\left[\log(1+x)-\log(1-x)\right].$$

Hacemos uso de los desarrollos en serie de Taylor siguientes

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \qquad \text{y} \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n,$$

para $|x| < 1$, de modo que

$$\log(1+x)-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}x^n.$$

Por otro lado, tenemos que $(-1)^{n+1}+1 = 0$ si n es par y $(-1)^{n+1}+1 = 2$ si n es impar, con lo cual

$$\log(1+x)-\log(1-x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},$$

y se obtiene la fórmula deseada.

$\square$

Ejercicios clase CP: 1, 2, 10//4, 7 y 9.

1. Dadas dos funciones f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ periódicas de periodo $p > 0$. Demostrar que el producto de estas funciones o cualquier combinación lineal de ellas, es también una función periódica de periodo p.

   Solución. Sean f y g dos funciones periódicas de periodo p. Para demostrar que el producto $H(x) = f(x)g(x)$ es también periódica (con periodo p) debemos probar que:

   $$H(x) = H(x+p)$$

   para todo $x \in I$. Para esto, calculemos $H(x+p)$:

   $$H(x+p) = f(x+p)g(x+p)$$

   y como las funciones f y g son periódicas: $f(x+p) = f(x)$ y $g(x+p) = g(x)$ tenemos que:

   $$H(x+p) = f(x+p)g(x+p) = f(x)g(x) = H(x)$$

   Por otro lado, si denotamos por $F(x)$ a la combinación lineal de las funciones f y g, es decir:

   $$F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x),$$

   con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, para probar que esta es periódica con periodo p, debemos mostrar que:

   $$F(x) = F(x+p).$$

   para todo $x \in I$. Calculemos $F(x+p)$:

   $$F(x+p) = c_1 f(x+p) + c_2 g(x+p) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = F(x)$$

   □

2. Si la función $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periódica de periodo $p > 0$, mostrar que para todo número entero n se cumple que:

   $$f(x) = f(nx+p).$$

   para todo $x \in I$. f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en R periódicas de periodo $p > 0$.

   Solución. Como la función f es periódica, tenemos que:

   $$f(x) = f(x+p).$$

   para todo $x \in I$. Pero además:

   $$\begin{gathered} f(x+2p) = f((x+p)+p) = f(x+p) = f(x), \\ f(x+3p) = f((x+2p)+p) = f(x+2p) = f(x), \\ \vdots \\ f(x+np) = f((x+(n-1)p)+p) = f(x+(n-1)p) = f(x), \end{gathered}$$

   para todo $x \in I$. □

3. Las funciones $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \operatorname{sen}(m\pi x/L)$ y $g(x)\cos(m\pi x/L)$ constituyen una familia de funciones mutuamente ortogonales sobre el intervalo $I = [-L, L]$. Verificar (por integración directa) que las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n; \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = 0 \qquad \text{para todo } m, n;$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

4. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función par continua a trozos con desarrollo en serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)].$$

Asuma que

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0, \quad 0 < \pi < x.$$

Demuestre que

$$a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

y encuentre una expresión para a_{2k+1}, con $k = 0, 2, \ldots$.

Solución. Puesto que f es par, por las fórmulas de Euler-Fourier tenemos que $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Por ende, el desarrollo en serie de Fourier para f puede escribirse como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx).$$

Ahora, por las fórmulas de Euler-Fourier y la paridad de f tenemos que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx.$$

Definamos $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ mediante $g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$. Si en la integral anterior realizamos el cambio de variable $u = x - \frac{\pi}{2}$, tenemos:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{\pi}{2}+u\right)\cos\left(k\left(\frac{\pi}{2}+u\right)\right)\,du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(u)\left[\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(ku) - \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(ku)\right]\,du, \end{aligned}$$

de modo que,

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(u)[\cos(k\pi)\cos(2ku) - \operatorname{sen}(k\pi)\operatorname{sen}(2ku)]\,du \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-1)^k g(u)\cos(2ku)\,du. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$g(-x) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -g(x),$$

por lo que g es impar. Con esto, puesto que el coseno es par, se tiene que

$$a_{2k} = 0.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(u)\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\cos((2k+1)u) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\operatorname{sen}((2k+1)u)\right]\,du \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-1)^k g(u)\operatorname{sen}((2k+1)u)\,du \\
&= (-1)^{k+1}\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}((2k+1)x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

5. Sea $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos con desarrollo en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)], \quad -\pi < x < \pi.$$

Demuestre que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Esta igualdad se conoce como la *identidad de Parseval*.

6. Sea $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos. Demuestre que las sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$, que aparecen en el desarrollo en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(kx) + b_k\operatorname{sen}(kx)], \quad -\pi < x < \pi,$$

ambas convergen hacia 0.

7. En este ejercicio probaremos la convergencia y hallaremos la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

a) Encuentre la expansión en serie de Fourier de la función

$$\begin{aligned} f : [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}.$$

b) Redefina la función f de tal manera que sea períodica con período 2.

c) Utilice el teorema de convergencia de series de Fourier para calcular el valor al que converge la serie para $x = 0$.

d) Concluya el valor de la suma $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Solución.

a) Aplicando las fórmulas para los coeficientes de Fourier tenemos que la función definida por $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0,2]$ tiene la expansión

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi x)}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n}.$$

b) Definimos la función $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\hat{f}(x) = f(x) = x^2 \text{ si } x \in [2(k-1), 2k[, \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

c) Por el teorema de convergencia de las series de Fourier tenemos que la serie Fourier hallada en *a*) converge a

$$\frac{\lim_{x\to 0^-} \hat{f}(x) + \lim_{x\to 0^+} \hat{f}(x)}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$

para $x = 0$. Es decir,

$$2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi 0)}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi 0)}{n} = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

d) Así, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

8. Sea $p \in \mathbb{N}$, pruebe que las funciones

$$1, \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \ldots$$

son ortogonales en el intervalo $[-p, p]$.

9. Sea f una función continua por tramos, periódica de período $2p$ con $p \in \mathbb{N}$. Muestre que

$$\int_a^{a+2p} f(x)\, dx = \int_b^{b+2p} f(x)\, dx.$$

Solución. Probaremos primero que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_a^{a+2p} f(x) dx = \int_0^{2p} f(x) dx.$$

Sea $a \in \mathbb{R}$, como $2p > 0$, pues es el período de la función, tenemos que existe un entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n < \frac{a}{2p} < n+1$$

de donde

$$2pn < a < (n+1)2p = 2pn + 2p$$

y por lo tanto

$$2pn + 2p < a + 2p,$$

es decir

$$a < 2pn + 2p < a + 2p.$$

Así, podemos descomponer la integral como

$$\int_a^{a+2p} f(x) dx = \int_a^{(n+1)2p} f(x) dx + \int_{(n+1)2p}^{a+2p} f(x) dx.$$

Usando el cambio de variable $y = x - 2pn$ en la primera integral y $y = x - (n+1)2p$ en la segunda

$$\int_a^{(n+1)2p} f(x) dx + \int_{(n+1)2p}^{a+2p} f(x) dx = \int_{a-2pn}^{2p} f(y + 2pn) dy + \int_0^{a-2pn} f(y + (n+1)p) dy,$$

del ejercicio 2 tenemos

$$\int_{a-2pn}^{2p} f(y+2pn)dy + \int_0^{a-2pn} f(y+(n+1)p)dy = \int_{a-2pn}^{2p} f(y)dy + \int_0^{a-2pn} f(y)dy,$$

y ya que $0 < a - 2pn < 2p$

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_{a-2pn}^{2p} f(y)dy + \int_0^{a-2pn} f(y)dy = \int_0^{2p} f(y)dy = \int_0^{2p} f(x)dx.$$

Se sigue de inmediato que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_0^{2p} f(x)dx = \int_b^{b+2p} f(x)dx.$$

□

10. Descomponer en serie de Fourier en términos de cosenos la función $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \le h \\ 0 & \text{si } h < x < \pi, \end{cases}$$

donde $0 < h < \pi$.

Solución. Tenemos que

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{h} 1\,dx = \frac{2h}{\pi},$$

y, para $n \ge 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{h} \cos(nx)\,dx = \frac{2\,\mathrm{sen}(nh)}{\pi n}.$$

Así

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2h}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{sen}(nh)}{\pi n} \cos(nx),$$

con lo cual

$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(nh)}{nh} \cos(nx)\right).$$

□

11. Descomponer en una serie de Fourier en términos de senos la función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$, para $x \in [0, \pi]$.

12. Descomponer en una serie de Fourier la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para todo $x \in [0, 2\pi]$.

Ejercicios clase CP: 1.a, 1.b, 1.c, 1. d, 7. // 8., 10., 11.

1. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ 0, & \text{si} \quad x > 2, \end{cases}$$

determine:

a) La representación en integrales de Fourier.
b) La representación en integrales de Fourier seno.
c) La representación en integrales de Fourier coseno.
d) Estimar la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{2\operatorname{sen}(2w)}{w} - \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right) \cos(wx)dw$$

Solución. a) La representación en integrales de Fourier de la función está dada por:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos(wx) + B(w)\operatorname{sen}(wx)]dw$$

de donde:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)dv$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(wv)dv$$

por tanto, la función $A(w)$ se determina por:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(v)\cos(wv)dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 v\cos(wv)dv$$

de donde la integral es igual a:

$$\int_0^2 x\cos(wx)dx = \frac{\cos(wx)}{w^2}\bigg|_0^2 + x\frac{\operatorname{sen}(wx)}{w}\bigg|_0^2 = \frac{2\operatorname{sen}(2w)}{w} - \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \tag{1}$$

Finalmente,

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\operatorname{sen}(2w)}{w} - \frac{\cos(2w) - 1}{w^2}\right].$$

Por otro lado $B(w)$ se determina por:

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(v)\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 v\operatorname{sen}(wv)dv$$

de donde la integral es igual a:

$$\int_0^2 x\operatorname{sen}(wx)dx = \frac{\operatorname{sen}(wx)}{w^2}\bigg|_0^2 - \frac{x\cos(wx)}{w}\bigg|_0^2 = \frac{\operatorname{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w} \tag{2}$$

Finalmente,

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w}\right].$$

Por tanto, la representación en integrales de Fourier de $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} - \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)\cos(wx) + \left(\frac{\mathrm{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w}\right)\mathrm{sen}(wx)\right]dw.$$

b) Determinar la representación en integrales de Fourier seno de $f(x)$ significa (en este caso) obtener la representación en integrales de Fourier de la extensión impar de $f(x)$ dada por:

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad -2 < x < 2, \\ 0, & \text{si} \quad |x| > 2, \end{cases}$$

Como $F(v)$ es impar y $\cos(wv)$ es par en el intervalo $]-2,2[$, entonces:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)\cos(wv)dv = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} F(v)\cos(wv)dv = 0.$$

Por otro lado,

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)\,\mathrm{sen}(wv)dv = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} F(v)\,\mathrm{sen}(wv)dv.$$

como $F(v)$ y $\mathrm{sen}(wv)$ son impares,

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} F(v)\,\mathrm{sen}(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{2} F(v)\,\mathrm{sen}(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{2} v\,\mathrm{sen}(wv)dv.$$

En donde podemos utilizar el resultado obtenido en el literal anterior para la integral (2) es decir:

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 v\,\mathrm{sen}(wv)dv = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\mathrm{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w}\right)$$

Finalmente,

$$F(x) = \int_0^{\infty} B(w)\,\mathrm{sen}(wx)dw$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\mathrm{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w}\right)\mathrm{sen}(wx)dw$$

c) Determinar la representación en integrales de Fourier coseno de $f(x)$ significa (en este caso) obtener la representación en integrales de Fourier de la extensión par de $f(x)$ dada por:

$$G(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ -x, & \text{si} \quad -2 < x < 0, \\ 0, & \text{si} \quad |x| > 2, \end{cases}$$

Como $G(v)$ es par y $\mathrm{sen}(wv)$ es impar en el intervalo $]-2,2[$, entonces:

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(v)\,\mathrm{sen}(wv)dv = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} G(v)\,\mathrm{sen}(wv)dv = 0.$$

Además como $G(v)$ y $\cos(wv)$ son pares

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(v)\cos(wv)dv = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} G(v)\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{2} G(v)\cos(wv)dv.$$

de donde,

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 G(v)\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^2 v\cos(wv)dv.$$

En donde podemos utilizar el resultado obtenido en el literal anterior para la integral (1) es decir:

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 v\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} - \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)$$

Finalmente,

$$G(x) = \int_0^\infty A(w)\cos(wx)dw$$

$$G(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} - \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)\cos(wx)dw$$

d) La integral impropia

$$\int_0^\infty \left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} - \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)\cos(wx)dw$$

puede estimarse a partir de la representación en integrales de Fourier de $G(x)$ obtenida en el último literal. Considerando que en el intervalo $]-\infty,\infty[$ por el teorema de la existencia de la integral de Fourier, la función va a converger a x en $[0,2]$, a $\frac{G(2^+)+G(2^-)}{2}$ en $x=2$ y a 0 para $x>2$ entonces,

$$\int_0^\infty \left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} - \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)\cos(wx)dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & \text{si} \quad 0<x<2, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si} \quad x=2, \\ 0, & \text{si} \quad x>2, \end{cases}$$

□

2. Encontar la representación en integral de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Solución. Desarrollemos la representación en integral de Fourier de dicha función,

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos(wx)+B(w)\,\mathrm{sen}(wx)]dw;\, A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wv)dv,\, B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\,\mathrm{sen}(wv)dv$$

Calculamos el coeficiente $A(w)$,

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-v}\cos(wv)dv = \frac{1}{w\pi}\left[e^{-v}\,\mathrm{sen}(wv)\big|_o^\infty + \int_0^\infty e^{-v}\,\mathrm{sen}(wv)dv\right] = \frac{1}{w\pi}\int_0^\infty e^{-v}\,\mathrm{sen}(wv)dv$$

$$A(w) = \frac{-1}{w^2\pi}\left[e^{-v}\cos(wv)\big|_o^\infty + \int_0^\infty e^{-v}\cos(wv)dv\right] = \frac{-1}{w^2\pi}\left[-1+\int_0^\infty e^{-v}\cos(wv)dv\right] = \frac{1-\pi A(w)}{w^2\pi}$$

de donde obtenemos:

$$A(w) = \frac{1}{\pi(1+w^2)}$$

De la misma forma, calculamos el coeficiente $B(w)$,

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-v}\,\mathrm{sen}(wv)dv = \frac{-1}{w\pi}\left[e^{-v}\cos(wv)\big|_o^\infty + \int_0^\infty e^{-v}\cos(wv)dv\right] = \frac{1}{w\pi}\left[1-\int_0^\infty e^{-v}\cos(wv)dv\right]$$

$$B(w) = \frac{1}{w\pi}\left[1-\frac{1}{w}\left(e^{-v}\,\mathrm{sen}(wv)\big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-v}\,\mathrm{sen}(wv)dv\right)\right] = \frac{1}{w\pi}\left[1-\frac{1}{w}\int_0^\infty e^{-v}\,\mathrm{sen}(wv)dv\right] = \frac{1-\frac{\pi}{w}B(w)}{w\pi}$$

de donde obtenemos: $\quad B(w) = \dfrac{w}{\pi(1+w^2)}$

Reemplazando los coeficientes $A(w)$ y $B(w)$ en la integral de Fourier tenemos,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\cos(wx)}{1+w^2} + \frac{w\,\mathrm{sen}(wx)}{1+w^2}\right) dw = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

Como sabemos, debe cumplirse que $f(0) = 1/2$, para ello es fácil ver que,

$$f(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+w^2} dw = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(w)|_0^\infty = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Del resultado final que hemos obtenido, pueden obtenerse resultados como los siguientes. Evaluemos $f(3)$ y $f(-5)$, obtenemos

$$f(3) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\cos(3w)}{1+w^2} + \frac{w\,\mathrm{sen}(3w)}{1+w^2}\right) dw \implies \int_0^\infty \frac{\cos(3x)+x\,\mathrm{sen}(3x)}{1+x^2}dx = \pi e^{-3}$$

$$f(-5) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\cos(5w)}{1+w^2} + \frac{w\,\mathrm{sen}(-5w)}{1+w^2}\right) dw \implies \int_0^\infty \frac{\cos(5x)-x\,\mathrm{sen}(5x)}{1+x^2}dx = 0$$

□

3. Encontar la representación en integral de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x>0, \\ e^{x} & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Solución. Desarrollemos la representación en integral de Fourier de dicha función,

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos(wx) + B(w)\,\mathrm{sen}(wx)]dw$$

Al ser la función par solo necesitamos calcular $A(w)$,

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-v}\cos(wv)dv \implies A(w) = \frac{2}{\pi(1+w^2)}$$

Entonces la integral de Fourier viene a ser,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{1+w^2}dw = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x>0 \\ e^{x} & \text{si} \quad x<0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

De este resultado podemos concluir que,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(5x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi e^{-5}}{2}; \qquad \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi e^{-1}}{2}; \qquad \cdots \quad \text{etc.}$$

□

4. Encontar la representación en integral de Fourier para la función

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x|\le 1, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

5. Encontrar la representación como integral de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0, \\ e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

6. Demostrar que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(w)}{w}\cos(wx)\,dw = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

7. Demostrar que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(w\pi)}{1-w^2}\operatorname{sen}(wx)\,dw = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) & \text{si } x < \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

8. Represente mediante una integral de Fourier del tipo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty A(w)\cos(wx)\,dw$$

la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 2-x & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

9. Demuestre la siguiente identidad:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(\pi w)\operatorname{sen}(wx)}{1-w^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

10. *a*) Utilizando las representación en serie de Fourier de coseno y seno de la función $f(x) = e^{-kx}$, con $x > 0$ y $k > 0$, demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{k^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2k}e^{-kx} \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty \frac{w\operatorname{sen}(wx)}{k^2+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-kx}, \qquad x > 0, k > 0.$$

Estas integrales se conocen como *integrales de Laplace*.

b) Usando el inciso anterior, encuentre la representación de la función $f(x) = 1/(1+x^2)$, definida para $x > 0$, en serie de Fourier de coseno.

Solución.

a) Para la representación de integral de Fourier de coseno, calculamos la integral de Fourier de la expansión par de la función f, la cual notamos f_1, lo que significa que

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f_1(v)\operatorname{sen}(wv)dv = 0,$$

pues f_1 es par.

Así mismo tenemos que

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f_1(v)\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\cos(wv)dv.$$

Para calcular la integral de la derecha tenemos

$$\int_0^\infty e^{-kv}\cos(wv)\,dv = \frac{1}{w}\operatorname{sen}(wv)e^{-kv}\Big|_0^\infty + \frac{k}{w}\int_0^\infty \operatorname{sen}(wv)e^{-kv}\,dv$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \frac{k}{w}\int_0^\infty \operatorname{sen}(wv)e^{-kv}\,dv \\
&= \frac{k}{w}\left[-\frac{e^{-kv}}{w}\cos(wv)\Big|_0^\infty - \frac{k}{w}\int_0^\infty e^{-kv}\cos(wv)\,dv\right] \\
&= \frac{k}{w}\left[\frac{1}{w} - \frac{k}{w}\int_0^\infty e^{-kv}\cos(wv)\,dv\right] \\
&= \frac{k}{w^2} - \frac{k^2}{w^2}\int_0^\infty e^{-kv}\cos(wv)\,dv
\end{aligned}
$$

de donde

$$\left(1 + \frac{k^2}{w^2}\right)\int_0^\infty e^{-kv}\cos(wv)\,dv = \frac{k}{w^2}$$

es decir

$$\int_0^\infty e^{-kv}\cos(wv)\,dv = \frac{k}{w^2+k^2}.$$

Con esto tenemos que la representación de f en integral de Fourier de coseno es

$$e^{-kx} = f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi}\left(\frac{k}{w^2+k^2}\right)\cos(wx)\,dw$$

por lo tanto

$$\frac{\pi}{2k}e^{-kx} = \int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{w^2+k^2}\,dw.$$

Para la representación de integral de Fourier de seno, calculamos la integral de Fourier de la expansión impar de la función f, la cual notamos f_2, de manera similar a antes concluimos

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f_2(v)\cos(wv)dv = 0$$

y así mismo

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f_2(v)\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-kv}\operatorname{sen}(wv)dv.$$

Para calcular la integral de la derecha tenemos

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-kv}\operatorname{sen}(wv)\,dv &= -\frac{1}{w}\cos(wv)e^{-kv}\Big|_0^\infty - \frac{k}{w}\int_0^\infty \cos(wv)e^{-kv}\,dv \\
&= \frac{1}{w} - \frac{k}{w}\int_0^\infty \cos(wv)e^{-kv}\,dv \\
&= \frac{1}{w} - \frac{k}{w}\left[\frac{e^{-kv}}{w}\operatorname{sen}(wv)\Big|_0^\infty + \frac{k}{w}\int_0^\infty e^{-kv}\operatorname{sen}(wv)\,dv\right] \\
&= \frac{1}{w} - \frac{k}{w}\left[0 + \frac{k}{w}\int_0^\infty e^{-kv}\operatorname{sen}(wv)\,dv\right] \\
&= \frac{1}{w} - \frac{k^2}{w^2}\int_0^\infty e^{-kv}\operatorname{sen}(wv)\,dv
\end{aligned}
$$

de donde

$$\left(1 + \frac{k^2}{w^2}\right)\int_0^\infty e^{-kv}\operatorname{sen}(wv)\,dv = \frac{1}{w}$$

es decir

$$\int_0^\infty e^{-kv}\operatorname{sen}(wv)\,dv = \frac{w}{w^2+k^2}.$$

Con esto tenemos que la representación de f en integral de Fourier de seno es

$$e^{-kx} = f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi}\left(\frac{w}{w^2+k^2}\right)\operatorname{sen}(wx)\,dw$$

por lo tanto

$$\frac{\pi}{2}e^{-kx} = \int_0^\infty \frac{w\,\mathrm{sen}(wx)}{w^2+k^2}\,dw.$$

b) Para hallar la representación en integral de Fourier de coseno de $f(x) = 1/(1+x^2)$, razonando de la misma manera que antes sabemos que basta calcular $A(w)$ como

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(wv)}{1+v^2}\,dv.$$

De la primera parte del literal anterior, con $k = 1$, sabemos que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2}e^{-x},$$

es decir,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(vw)}{1+v^2}\,dv = \frac{\pi}{2}e^{-w}.$$

Por lo tanto tenemos que la representación de f en integral de Fourier de coseno es

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-w}\cos(wx)\,dw.$$

$\square$

11. El objetivo de este ejercicio es calcular el valor de la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{t^3\,\mathrm{sen}(t)}{t^4+4}\,dt.$$

Para ello, realice lo siguiente:

a) Considere la función $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida para cada $x > 0$ por

$$f(x) = e^{-x}\cos(x).$$

Demuestre que la extensión impar de f es absolutamente integrable, continua por tramos en cada intervalo acotado y que admite derivadas laterales en cada punto.

b) Del inciso anterior concluya que f puede ser representada por una integral de Fourier de senos. Calcule esta representación.

c) Usando el inciso anterior, calcule el valor de la integral I.

Solución. *a*) f es claramente continua y derivable, además se tiene que, para $x > 0$,

$$f'(x) = -e^{-x}(\cos(x) + \mathrm{sen}(x)),$$

de donde

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1.$$

Así, la extensión impar de f es continua por tramos en cada intervalo acotado y admite derivadas laterales en cada punto. Para ver que esta es absolutamente integrable, basta analizar su integrabilidad en $]0, +\infty[$:

$$|f(x)| = |e^{-x}\cos(x)| \le e^{-x},$$

y dado que la función $x \mapsto e^{-x}$ es Riemann impropiamente integrable en $]0, +\infty[$, se tiene lo deseado.

b) Por el teorema de existencia de la integral de Fourier, se concluye que la extensión impar de f admite una representación como integral de Fourier. Por imparidad, se sique que f admite una representación como integral de Fourier de senos.

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
B(w) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-v}\cos(v)\,\mathrm{sen}(wv)\;dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-v}[\mathrm{sen}((1+w)v) - \mathrm{sen}((1-w)v)]\;dv \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+w}{(1+w)^2+1} - \frac{1-w}{(1-w)^2+1}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{w^3}{w^4+4}.
\end{aligned}$$

De este modo, la representación de f como integral de Fourier de senos es

$$e^{-x}\cos(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w^3\,\mathrm{sen}(wx)}{w^4+1}\;dw, \qquad x>0.$$

c) De lo anterior, tomando $x=1$, se tiene que

$$e^{-1}\cos(1) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w^3\,\mathrm{sen}(w)}{w^4+1}\;dw,$$

de donde

$$I = \int_0^\infty \frac{t^3\,\mathrm{sen}(t)}{t^4+4}\;dt = \frac{\pi\cos(1)}{2e}.$$

□

12. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función par con representación en integral de Fourier de coseno

$$f(x) = \int_0^\infty A(w)cos(wx)\;dw, \qquad \text{donde} \qquad A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(wv)\;dv.$$

a) Demuestre que, para todo $a>0$ y para todo $x>0$, se verifica la *identidad de cambio de escala:*

$$f(ax) = \frac{1}{a}\int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right)\cos(wx)\;dw.$$

b) Demuestre que para todo $x>0$ se verifica

$$xf(x) = -\int_0^\infty A'(w)\,\mathrm{sen}(wx)\;dw,$$

donde A' es la primera derivada de la función A.

c) Demuestre que para todo $x>0$ se verifica

$$x^2f(x) = -\int_0^\infty A''(w)\cos(wx)\;dw,$$

donde A'' es la segunda derivada de la función A.

d) Proponga fórmulas similares para la transformada de Fourier de senos de una función impar f y demuéstrelas.

Solución. *a*) Se tiene que, para $x>0$,

$$f(ax) = \int_0^\infty A(u)\cos(u(ax))\;du,$$

en donde, haciendo el cambio de variable $w=au$ se obtiene, ya que $a>0$, que

$$f(ax) = \frac{1}{a}\int_0^\infty A\left(\frac{w}{a}\right)\cos(wx)\;dw,$$

como se deseaba.

b) Como f es par, la función $x \mapsto xf(x)$ es impar, por ende tiene representación en serie de Fourier de senos

$$xf(x) = \int_0^\infty \tilde{B}(w)\operatorname{sen}(wx)\,dw \qquad \text{donde} \qquad \tilde{B}(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty vf(v)\operatorname{sen}(wv)\,dv.$$

Por ende, nuestro trabajo consiste en demostrar que $A' = -\tilde{B}$. En efecto, para $w > 0$ se tiene que

$$A'(w) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{dw}\int_0^\infty f(v)\cos(wv)\,dv;$$

asumiendo que es posible intercambiar la derivada con la integral[1] se tiene que

$$A'(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d}{dw}(f(v)\cos(wv))\,dv = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty -vf(v)\operatorname{sen}(wv)\,dv = -\tilde{B}(w),$$

como se deseaba.

c) En este caso, la función $x \mapsto x^2 f(x)$ es par, por ende tiene un desarrollo en serie de Fourier de cosenos

$$x^2 f(x) = \int_0^\infty \tilde{A}(w)\cos(wx)\,dw \qquad \text{donde} \qquad \tilde{A}(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty v^2 f(v)\cos(wv)\,dv.$$

Tenemos entonces que

$$A''(w) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dw}\int_0^\infty vf(v)\operatorname{sen}(wv)\,dv = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty v^2 f(v)\cos(wv)\,dv = \tilde{A}(w),$$

de donde se sigue el resultado.

d) Si f es impar con representación en integral de integral de Fourier de senos

$$f(x) = \int_0^\infty B(w)\operatorname{sen}(wx)\,dx \qquad \text{donde} \qquad B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\operatorname{sen}(wv)\,dv,$$

se tienen, para $a > 0$ y $x > 0$ las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} f(ax) &= \frac{1}{a}\int_0^\infty B\left(\frac{w}{a}\right)\operatorname{sen}(wx)\,dw \\ xf(x) &= \int_0^\infty B'(w)\cos(wx)\,dw \\ x^2 f(x) &= -\int_0^\infty B''(w)\operatorname{sen}(wx)\,dw. \end{aligned}$$

Las demostraciones son análogas al caso anterior (realizarlas).

□

13. Considere las funciones $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ y $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

a) Represente a f mediante una integral de Fourier de cosenos.

b) Sin calcular ninguna integral, y utilizando la representación de f como integral de Fourier de cosenos, encuentre la representación de g como integral de Fourier de cosenos.

c) Compruebe el resultado anterior calculando mediante definición la representación de g como integral de Fourier de cosenos.

[1] Esto es un asunto delicado, por ende no lo justificaremos

Solución. *a*) Para f tenemos que

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(v)\cos(wv)\,dv = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(wv)\,dv = \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(w)}{w},$$

de modo que

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(w)}{w}\cos(wx)\,dw.$$

b) Notemos que, para $w > 0$ tenemos

$$A'(w) = -\frac{2}{\pi}\frac{w\cos(w) - \operatorname{sen}(w)}{w^2} \qquad \text{y} \qquad A''(w) = -\frac{2}{\pi}\frac{(w^2-2)\operatorname{sen}(w) + 2w\cos(w)}{w^3},$$

de modo que por el ejercicio anterior se tiene que

$$g(x) = x^2 f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(w^2-2)\operatorname{sen}(w) + 2w\cos(w)}{w^3}\cos(wx)\,dw.$$

c) Para este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{2}{\pi} g(v)\cos(wv)\,dv \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 v^2\cos(wv)\,dv \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(w^2-2)\operatorname{sen}(w) + 2w\cos(w)}{w^3}, \end{aligned}$$

de modo que

$$g(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(w^2-2)\operatorname{sen}(w) + 2w\cos(w)}{w^3}\cos(wx)\,dw.,$$

lo que comprueba el resultado obtenido anteriormente.

□

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función absolutamente integrable, derivable con continuidad, con representación como integral de Fourier

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos(wx) + B(w)\operatorname{sen}(wx)]\,dw, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Si f' también admite una representación como integral de Fourier, demuestre que

$$f'(x) = \int_0^\infty w[B(w)\cos(wx) - A(w)\operatorname{sen}(wx)]\,dw.$$

b) Asuma que f es dos veces derivable con continuidad y que f'' admite una representación como integral de Fourier. Demuestre que

$$f''(x) = -\int_0^\infty w^2[A(w)\cos(wx) + B(w)\operatorname{sen}(wx)]\,dw$$

Solución. Como f es absolutamente integrable, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Escribamos

$$f'(x) = \int_0^\infty \tilde{A}(w)\cos(wx) + \tilde{B}(w)\operatorname{sen}(wx)]\,dw,$$

de modo que
$$\tilde{A}(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(v)\cos(wv)\ dv.$$
Integrando por partes se tiene que
$$\tilde{A}(w) = \lim_{v\to\infty}\cos(wv)f(v) - \lim_{v\to-\infty}\cos(wv)f(v) + \int_{-\infty}^{\infty} wf(v)\operatorname{sen}(wv)\ dv.$$
Entonces, por el teorema del sándwich, como $0 \leq |\cos(wv)f(v)| \leq |f(v)|$, se concluye que
$$\tilde{A}(w) = w\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(wv)\ dv = wB(w).$$
De manera similar se tiene que
$$\tilde{B}(w) = -wA(w),$$
lo que implica que
$$f'(x) = \int_{0}^{\infty} w[B(w)\cos(wx) - A(w)\operatorname{sen}(wx)]\ dw.$$

La segunda parte es una aplicación inmediata de la primera. □

Ejercicios clase CP: 1, 9, 10, 12,13

1. Determinar la transformada de Fourier de la función $f\colon [-1,1] \to R$ con $f(x) = x$.
   Respuesta: $\mathcal{F}(f) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\operatorname{sen} w - w\cos w}{w^2}\right]$

   Solución. A partir de la definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx$$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} xe^{-iwx}dx$$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} x(\cos(wx) - i\operatorname{sen}(wx))dx$$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} x\cos(wx)dx - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} x\operatorname{sen}(wx)dx$$

   Como $f(x) = x$ es una función impar en su dominio:

$$\mathcal{F}(f) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} x\operatorname{sen}(wx)dx$$

$$\mathcal{F}(f) = -i\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} x\operatorname{sen}(wx)dx$$

$$\mathcal{F}(f) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\operatorname{sen} w - w\cos w}{w^2}\right]$$

   □

2. Determinar la transformada de Fourier seno de $f(x) = e^{-|x|}$. Respuesta: $\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{1+w^2}$.

3. Determine la transformada de Fourier seno inversa de:

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{1+w^2}$$

   y a partir de ella evaluar la integral impropia:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\operatorname{sen}(mx)}{1+x^2}dx, \quad m > 0$$

   Respuesta: $\int_0^{\infty}\frac{x\operatorname{sen}(mx)}{1+x^2}dw = \frac{\pi}{2}e^{-m}$

4. Demostrar que la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ es auto recíproca, Es decir, que la transformada de Fourier de $e^{\frac{-x^2}{2}}$ está dada por $e^{\frac{-w^2}{2}}$, y viceversa.

5. Determinar la transformada de Fourier de:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(1+i)t}, & \text{si} \quad t > 0, \\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

   Respuesta: $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1+i(w+1)}\right]$.

6. Demostrar que:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i(w+1)}\right)=\begin{cases} e^{-(1+i)t}, & \text{si} \quad t>0,\\ 0, & \text{si} \quad t<0,\\ 1/2, & \text{si} \quad t=0,\end{cases}$$

7. Determinar la transformada de Fourier de la función:

$$f(t)=\begin{cases} 1, & \text{si} \quad |t|<a,\\ 0, & \text{si} \quad |t|>a.\end{cases}$$

Respuesta: $\mathcal{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\,\mathrm{sen}(wa)}{w}$

8. Determine

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1+iw}{6-w^2+5iw}\Big)$$

Hint: Separe en fracciones parciales.

9. Determinar la transformada de Fourier de la función:

$$f(t)=\begin{cases} -1, & \text{si} \quad -1<t<0,\\ 1, & \text{si} \quad 0<t<1,\\ 0, & \text{si} \quad |t|>1.\end{cases}$$

Respuesta: $\mathcal{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2}{iw}+\frac{2\,\mathrm{sen}\,w}{w}\right]$.

Solución. A partir de la definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f(t))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}dt,$$

$$\mathcal{F}(f(t))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1}f(t)e^{-iwt}dt+\int_{-1}^{0}f(t)e^{-iwt}dt+\int_{0}^{1}f(t)e^{-iwt}dt+\int_{1}^{\infty}f(t)e^{-iwt}dt\right],$$

$$\mathcal{F}(f(t))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1}(0)e^{-iwt}dt+\int_{-1}^{0}(-1)e^{-iwt}dt+\int_{0}^{1}(1)e^{-iwt}dt+\int_{1}^{\infty}(0)e^{-iwt}dt\right],$$

$$\mathcal{F}(f(t))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{-1}^{0}e^{-iwt}dt+\int_{0}^{1}e^{-iwt}dt\right],$$

$$\mathcal{F}(f(t))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{e^{-iwt}}{(-iw)}\Big|_{-1}^{0}+\frac{e^{-iwt}}{(-iw)}\Big|_{0}^{1}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2}{iw}+\frac{2\,\mathrm{sen}\,w}{w}\right].$$

□

10. Determinar la transformada de Fourier del pulso triangular:

$$f(t)=\begin{cases} 2t, & \text{si} \quad 0\le t\le 1,\\ 3-t, & \text{si} \quad 1\le t\le 3,\\ 0, & \text{en otros casos.}\end{cases}$$

Respuesta: $\mathcal{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2-3e^{-iw}+e^{-3iw}}{(iw)^2}\right]$.

a) A partir de la definición de transformada de Fourier.

b) A partir de la transformada de Fourier de la segunda derivada de $f(t)$. Para esto, halle la primera derivada de $f(t)$ y exprese el resultado através de la función escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t > 0, \\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Derive nuevamente $f(t)$ y exprese dicho resultado através de la función impulso $\delta(t)$, teniendo en cuenta que:

$$u'(t) = \delta(t).$$

(La función impulso se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad t = 0, \\ 0, & \text{si} \quad t \neq 0.) \end{cases}$$

Finalmente, halle la transformada de Fourier de $f''(t)$. Utilice las relaciones:

$$\mathcal{F}(f'') = (iw)^2 \mathcal{F}(f),$$

y

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-aiw}$$

para determinar $\mathcal{F}$. **Observación:** Una función del tipo impulso rectangular, puede expresarse através de una combinación de funciones escalón unitario. Considere por ejemplo, la función:

$$g(t) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad 2 \leq t \leq 3, \\ 0, & \text{en} \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Esta puede expresarse como:

$$g(t) = 2u(t-2) - 2u(t-3),$$

donde

$$u(t-a) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t > a, \\ 0, & \text{si} \quad t < a. \end{cases}$$

En este caso, $u'(t-a) = \delta(t-a)$.

Solución. *a*) A partir de la definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt,$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} f(t) e^{-iwt} dt + \int_{0}^{1} f(t) e^{-iwt} dt + \int_{1}^{3} f(t) e^{-iwt} dt + \int_{3}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt \right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} (0) e^{-iwt} dt + \int_{0}^{1} (2t) e^{-iwt} dt + \int_{1}^{3} (3-t) e^{-iwt} dt + \int_{3}^{\infty} (0) e^{-iwt} dt \right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{0}^{1} (2t) e^{-iwt} dt + \int_{1}^{3} (3-t) e^{-iwt} dt \right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}}{(iw)^2} \right].$$

b) La primera derivada de $f(t)$ está dada por:

$$f'(t) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ -1, & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 3, \\ 0, & \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

La cual puede escribirse como una combinaciòn lineal de funciones escalón como:

$$f'(t) = 2[u(t) - u(t-1)] + (-1)[u(t-1) - u(t-3)],$$

donde simplificando, tenemos:

$$f'(t) = 2u(t) - 3u(t-1) + u(t-3).$$

Derivando la expresión anterior tenemos que:

$$f''(t) = 2u'(t) - 3u'(t-1) + u'(t-3).$$

y como, $u'(t-a) = \delta(t-a)$, entonces:

$$f''(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t-1) + \delta(t-3).$$

Aplicando la tranformada de Fourier a la última ecuación tenemos:

$$\mathcal{F}(f''(t)) = 2\mathcal{F}(\delta(t)) - 3\mathcal{F}(\delta(t-1)) + \mathcal{F}(\delta(t-3)).$$

$$\mathcal{F}(f''(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}\right].$$

y como $\mathcal{F}(f'') = (iw)^2\mathcal{F}(f)$, tenemos:

$$(iw)^2\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}\right].$$

y finalmente,

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}}{(iw)^2}\right].$$

□

11. Determine la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 5, & \text{si} \quad 3 \leq t \leq 11, \\ 0, & \quad \text{en otro caso}. \end{cases}$$

Respuesta: $\mathcal{F}(f) = \frac{5}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-3iw} - e^{-11iw}}{iw}\right]$.

12. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x) = e^{ix^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ se conoce como *función de Fresnel*. Asumiendo su existencia, encuentre la transformada de Fourier de la función de Fresnel.

Respuesta: $\mathcal{F}(f)(w) = \dfrac{1+i}{2}e^{-w^2/4}$.

Solución. Por definición de transformada de Fourier tenemos que

$$\mathcal{F}(f)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2}e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-w/2)^2}e^{-iw^2/4}\,dx,$$

de donde

$$\mathcal{F}(f)(w) = \frac{e^{-iw^2/4}}{\sqrt{2\pi}}I, \quad \text{con} \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-w/2)^2}\,dx.$$

En la integral I realizamos el cambio de variable $u = x - w/2$, de modo que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu^2}\,du.$$

Para calcular I realizamos lo siguiente: Sean $\alpha > 0$ y

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(i-\alpha)x^2}\, dx.$$

Tenemos que

$$J^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i-\alpha)(x^2+y^2)}\, dxdy,$$

en donde, usando coordenadas polares se obtiene

$$J^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} re^{(1-\alpha)r^2}\, d\theta dr = \frac{\pi i}{1+\alpha i}.$$

Haciendo $\alpha \to 0$ se tiene que

$$I^2 = \pi i.$$

Además observamos que

$$\Re(I) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(u^2)\, du > 0,$$

por ende, dado que las raíces cuadradas de I^2 son $\sqrt{\pi}e^{\pi i/4}$ y $\sqrt{\pi}e^{5\pi i/4}$, nos quedamos con aquella cuya parte real es positiva, es decir,

$$I = \sqrt{\pi}e^{\pi i/4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i).$$

De este modo, se tiene que

$$\mathcal{F}(f)(w) = \frac{1+i}{2}e^{-w^2/4}.$$

□

13. Evalúe, para cada $x \in \mathbb{R}$ la integral

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y}\, dy$$

Respuesta: $g(x) = \begin{cases} \frac{\pi \operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ \pi & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Solución. Escribimos, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x},$$

de modo que $g = f * f$. Aplicando la transformada de Fourier, tenemos que

$$\mathcal{F}(g) = \mathcal{F}(f * f) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(f) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)^2.$$

Luego, sabemos que

$$\mathcal{F}(f)(w) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{si } |w| < a, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

de modo que

$$\mathcal{F}(f)^2(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}(f)(w).$$

Con esto, se tiene que

$$\mathcal{F}(g) = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}(f)(w) = \pi\mathcal{F}(f),$$

y por ende, dada la linealidad de la transformación inversa de Fourier, se tiene que

$$g(x) = \pi f(x) = \pi \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Esto implica que, para $x \neq 0$ se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y}\, dy = \pi \frac{\pi \operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Por continuidad, dado que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

podemos entonces concluir que

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y}\, dy = \begin{cases} \frac{\pi \operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ \pi & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

□

14. Dadas dos variables aleatorias continuas independientes X e Y, con funciones de densidad f_X y f_Y, se sabe que la función de densidad f_{X+Y} de la variable aleatoria $X+Y$ está dada por

$$f_{X+Y}(x) = (f_X * f_Y)(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. La función de densidad de una variable aleatoria que sigue una distribución normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ está dada por

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Sean X, Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Demuestre que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Ejercicios clase CP: 1, 4, 5

1. Dados $a, b > 0$, se define la función pulso rectangular de altura b por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -a, \\ b & \text{si } -a < x < a, \\ 0 & \text{si } a < x. \end{cases}$$

Halle su transformada de Fourier a partir de la definición y a partir de la transformada de f'.
Respuesta: $\hat{f}(w) = \dfrac{2b\,\text{sen}(wa)}{w\sqrt{2\pi}}$

Solución. Calcularemos primero la transformada de la función de pulso rectangular unitario $f_1(x)$, esto es cuando $b = 1$, es decir $f_1(x) = f(x)|_{b=1}$. De la definición de transformada de Fourier tenemos

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-iwx}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-iwx}\, dx \\ &= -\frac{1}{iw\sqrt{2\pi}} \left(e^{-iwa} - e^{iwa} \right) \\ &= -\frac{1}{iw\sqrt{2\pi}} \left(\overline{e^{iwa}} - e^{iwa} \right) \\ &= \frac{1}{iw\sqrt{2\pi}} 2i\,\text{sen}(wa) \\ &= \frac{2\,\text{sen}(wa)}{w\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Notemos ahora que cualquier función pulso rectangular de altura b es de la forma bf_1. Luego, utilizando la linealidad de la transformada de Fourier, tenemos:

$$\mathcal{F}[bf_1(x)] = b\mathcal{F}[f_1(x)] = b\frac{2\,\text{sen}(wa)}{w\sqrt{2\pi}} = \frac{2b\,\text{sen}(wa)}{w\sqrt{2\pi}}.$$

Por otro lado, $f(x)$ puede ser expresado a través de la función escalón unitario como:

$$f(x) = b[u(x+a) - u(x-a)]$$

Cuya derivada está dada por:

$$f'(x) = b[\delta(x+a) - \delta(x-a)]$$

Aplicando la transformada de Fourier sobre la última expresión tenemos:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = b[\mathcal{F}(\delta(x+a)) - \mathcal{F}(\delta(x-a))]$$

de donde:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = -\frac{b}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-iwa} - e^{iwa} \right)$$

$$\mathcal{F}(f'(x)) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\, 2i\,\text{sen}(wa))$$

además como $\mathcal{F}(f'(x)) = iw\mathcal{F}(f(x))$, tenemos que:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{2b}{w\sqrt{2\pi}}\,\text{sen}(wa))$$

$\square$

2. Halle la transformada de Fourier de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}.$$

Respuesta: $\hat{f}(w) = \dfrac{e^{2a} - e^{2aiw}}{\sqrt{2\pi}(1-wi)e^{a(1+wi)}}$.

3. Halle la transformada de Fourier de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-ax} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Respuesta: $\hat{f}(w) = \dfrac{a - iw}{\sqrt{2\pi}(a^2+w^2)}$

4. Usando la definición de transformada de Fourier, pruebe las siguientes propiedades. Recuerde que las siguientes notaciones son equivalentes: $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}(f(t))(w) = \mathcal{F}(f)(w) = \hat{f}(w)$

   a) $\mathcal{F}(f(t-t_0)) = \mathcal{F}(f)e^{-iwt_0}$
   b) $\mathcal{F}(f(t)e^{iw_0t}) = \hat{f}(w-w_0)$
   c) $\mathcal{F}(f(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\frac{w}{\alpha}\right)$
   d) $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f(-w)$

Solución. Haciendo uso de la definición de transformada de Fourier, para cada uno de los casos tenemos que:

a)

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-iwt}dt \qquad \text{Sea: } t' = t - t_0$$

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-iw(t+t_0)}dt' = e^{-iwt_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-iwt'}dt' = \mathcal{F}(f)e^{-iwt_0}$$

b)

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{iw_0t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iw_0t}e^{-iwt}dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(w-w_0)t}dt = \hat{f}(w-w_0)$$

c)

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)e^{-iwt}dt \qquad \text{Sea: } t' = \alpha t$$

$$\mathcal{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-iwt'/\alpha}\frac{1}{\alpha}\,dt' = \frac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\frac{w}{\alpha}\right)$$

d)

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(w)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{iwt}dw$$

Sea $t' = -t$ obtenemos,

$$f(-t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{-iwt'}dw$$

Intercambiando t' and w obtenemos:

$$f(-w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t') e^{-iwt'} dt' = \mathcal{F}(\hat{f}) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}(f)\}$$

□

5. Pruebe que $\mathcal{F}(e^{|t|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+w^2}$ y utilice las propiedades de la transformada de Fourier para determinar: $\mathcal{F}(e^{|at|})$. Respuesta: $\mathcal{F}(e^{|at|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2|a|}{a^2+w^2}$

   Solución. Como $\mathcal{F}(f(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}(f\left(\frac{w}{\alpha}\right))$ y además $\mathcal{F}(e^{|t|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+w^2}$

$$\mathcal{F}(e^{|at|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|a|} \frac{2}{a^2 + (\frac{w^2}{a^2})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2|a|}{a^2 + w^2}$$

□

6. Determinar $\mathcal{F}(e^{|3t|})$. Solución: $\mathcal{F}(e^{|3t|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{6}{w^2+9}$
7. Determinar $\mathcal{F}(e^{-at}u(at))$. Solución: $\mathcal{F}(e^{-at}u(at)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{|a|(a+wi)}$

Ejercicios clase CP: 2a, 4c, 5b

1. Teorema Fundamental: Si u_1 y u_2, dos funciones de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, son soluciones de una EDP lineal y homogénea en Ω, entonces la combinación lineal de ellas u, con:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ también es solución (de esa EDP en Ω). Pruebe el teorema fundamental (por sustitución de $u(x)$) para una EDP de segundo orden y para $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

2. Verifique para cada uno de los siguientes casos (y para un valor de $c \in \mathbb{R}$ adecuado) que la función $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con:

   a) $u(x,t) = x^2 + t^2$,
   b) $u(x,t) = \cos(4t)\operatorname{sen}(2x)$,
   c) $u(x,t) = \operatorname{sen}(kct)\cos(kx)$,
   d) $u(x,t) = \operatorname{sen}(at)\operatorname{sen}(bx)$,

   satisface la ecuación de la onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Solución. *a)* Determinando las derivadas parciales de u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2t, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

y sustituyendo en la EDP:

$$2 = 2c^2$$

tenemos que la función u es solución de la ecuación si $c^2 = 1$.

□

3. Verifique que $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con $u(x,t) = v(x+ct) + w(x+ct)$ donde v y w son funciones al menos dos veces diferenciales y $c \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación de la onda en una dimensión.

4. Verifique para cada uno de los siguientes casos (y para un valor de $c \in \mathbb{R}$ adecuado) que la función $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con:

   a) $u(x,t) = e^{-t}\operatorname{sen}(x)$,
   b) $u(x,t) = e^{-w^2c^2t}\cos(wx)$,
   c) $u(x,t) = e^{-9t}\operatorname{sen}(wx)$,

   satisface la ecuación del calor unidimensional:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Solución. c) Determinando las derivadas parciales de u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -9e^{-9t}\operatorname{sen}(wx), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = we^{-9t}\cos(wx), \qquad \frac{\partial^u}{\partial x^2} = -w^2e^{-9t}\operatorname{sen}(wx)$$

y sustituyendo en la EDP:

$$-9e^{-9t}\operatorname{sen}(wx) = c^2(-w^2e^{-9t}\operatorname{sen}(wx))$$

tenemos que la función u es solución de la ecuación si $c^2w^2 = 9$.

□

5. Verifique para cada uno de los siguientes casos que la función $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con:

   a) $u(x,y) = x^2 - y^2$.
   b) $u(x,y) = e^x \cos y$.
   c) $u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$.
   d) $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

   satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Solución. b) Determinando las derivadas parciales de u:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos(y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x\cos(y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\operatorname{sen}(y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x\cos(y),$$

como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

la función u satisface la ecuación diferencial parcial.

□

6. Verifique que la función $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con $u(x,y) = a\log_{10}(x^2 + y^2) + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Determine a y b tales que satisfagan las condiciones de frontera: $u = 110$ en el circulo $x^2 + y^2 = 1$ y $u = 0$ en el circulo $x^2 + y^2 = 100$.
   Respuesta: $a = -55$, $b = 110$.

Ejercicios clase CP: 1,6,9

1. El siguiente problema de valor en la frontera describe las vibraciones transversales $u(x,t)$ de una cuerda elástica de longitud $L=\pi$ fija en ambos extremos, la cual ha sido desplazada levantándola en su centro y luego soltada al tiempo $t=0$.

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} & t>0, \quad 0<x<\pi \\ u(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0 & t \geq 0, \\ u(x,0)=f(x) \quad u_t(x,0)=0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2. \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Utilice el método de separación de variables para encontrar una expresión que describa las vibraciones transversales $u(x,t)$ en todo punto $x \in [0,\pi]$ de la cuerda y para todo tiempo t.
Respuesta: $u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) \operatorname{sen}((2k-1)x)\cos(3(2k-1)t)$

Solución. Buscamos una solución de la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1}$$

la cual al derivar

$$u_{tt} = X(x)T''(t)$$

$$u_{xx} = X''(x)T(t)$$

y reemplazar u_{tt} y u_{xx} en nuestra EDP: $u_{tt} = 9u_{xx}$, tenemos:

$$X(x)T''(t) = 9X''(x)T(t)$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

El lhs de la ecuación depende solamente de t y el rhs solamente de x, esto es posible si ambos son igual a una constante k (arbitraria), es decir:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k.$$

de donde podemos obtener las EDO's:

$$X''(x) - kX(x) = 0 \tag{2}$$

$$T''(t) - 9kT(t) = 0. \tag{3}$$

Como k es una constante arbitraria, esta puede ser positiva, negativa o incluso cero, y dependiendo de esto las soluciones de las (2) y (3). Los valores para $k>0$ o $k=0$ corresponden a la solución trivial $u(x,t)=0$.

Para $k < 0$ y tomando $k = -\gamma^2$ tenemos la ecuación:

$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0 \tag{4}$$

con las condiciones de frontera:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \qquad X(0) = 0$$

$$u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0, \qquad X(\pi) = 0$$

Para resolverla, buscamos una solución de la forma:

$$X(x) = e^{mx}, \tag{5}$$

que derivando y reemplazando $X'(x)$ y $X''(x)$ en (4) tenemos:

$$m^2 e^{mx} + \gamma^2 e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + \gamma^2) = 0$$

de donde:

$$m = \pm i\gamma.$$

Reemplazando m en (5),

$$X(x) = e^{\pm i\gamma x}. \tag{6}$$

Se puede verificar que la solución general de (4) está dada por:

$$X(x) = A\cos(\gamma x) + B\,\text{sen}(\gamma x). \tag{7}$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$.

$$X(0) = A\cos(\gamma 0) + B\,\text{sen}(\gamma 0) = 0, \qquad A = 0. \tag{8}$$

$$X(\pi) = B\,\text{sen}(\gamma\pi) = 0. \tag{9}$$

El $\text{sen}(\gamma\pi)$ es 0 si el argumento $\gamma\pi$ es igual a $n\pi$ para todo $n = 1, 2, 3, ...$ es decir:

$$\gamma\pi = n\pi$$

y por tanto,

$$\gamma_n = n \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Como $X(x) = B\,\text{sen}(\gamma x)$ y existen un infinito número de valores de γ, existen también un infinito número de soluciones para la ecuación (4) (denotadas por el subíndice n), es decir:

$$X_n(x) = B_n\,\text{sen}(\gamma_n x)$$

reemplazando $\gamma_n = n$ y tomando $B_n = 1$, tenemos:

$$X_n(x) = \text{sen}(nx). \tag{10}$$

Como habíamos considerado $k = -\gamma^2$, la ecuación (3) se convierte en:

$$T''(t) + 9n^2 T(t) = 0. \tag{11}$$

cuya resolucón es similar a la ecuación (4). Se puede verificar que la solución a (11) está dada por:

$$T_n(t) = A_n\cos(3nt) + B_n\cos(3nt) \tag{12}$$

para $n = 1, 2, 3, ...$ Reemplazando las ecuaciones (10) y (12) en (1), tenemos:

$$u_n(x,t) = \text{sen}(nx)\,[A_n\cos(3nt) + B_n\cos(3nt)] \tag{13}$$

Por el teorema fundamental de superposición, la solución general está dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx)\left[A_n\cos(3nt) + B_n\cos(3nt)\right] \tag{14}$$

donde, para determinar las constantes A_n y B_n utilizamos las condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = 0$, y se puede demostrar que estas están dadas por:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\operatorname{sen}(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} u_t(x,0)\operatorname{sen}(nx)dx = 0$$

por tanto:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi n^2}\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})\operatorname{sen}(nx)\cos(3nt)$$

o

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)\operatorname{sen}((2k-1)x)\cos(3(2k-1)t)$$

□

2. Resuelva el problema de la onda unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 5 \\ u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

con $f(x) = 4\operatorname{sen}(\pi x) - \operatorname{sen}(2\pi x) - 3\operatorname{sen}(5\pi x)$.
Respuesta: $u(x,t) = 4\cos(2\pi t)\operatorname{sen}(\pi x) - \cos(4\pi t)\operatorname{sen}(2\pi x) - 3\cos(10\pi t)\operatorname{sen}(5\pi x)$.

3. Resuelva el problema de la onda unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 5 \\ u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0 \quad u_t(x,0) = 4 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{80}{2(2n-1)^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{2(2n-1)\pi t}{5}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{5}$.

4. Encuentre la solución a la vibración de una cuerda de longitud L y fija en sus extremos si la velocidad de sus puntos en $t = 0$ es cero y en ese mismo instante tiene la forma de un triángulo con vértice en (h,a). Se debe resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Respuesta: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L^2h}{a(L-a)n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi a}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi ct}{L}$.

5. Resuelva la ecuación de la onda sujeta a las condiciones

$$u(0,t) = 0; \qquad u(L,t) = 0;$$
$$u(x,0) = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen}(x).$$

Respuesta: $u(x,t) = \frac{2L\operatorname{sen}L}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{L^2-\pi^2n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{L}$.

6. Hallar la función $u(x,t)$, con $x \in [0,L]$ y $t>0$, que resuelve la ecuación de la onda unidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y satisface las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = x(L-x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \frac{4L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n^3} \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

Solución. Usando el método de separación de variables tenemos que la solución para este problema de valores de frontera está dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(A_n \operatorname{sen}\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \right) \right]$$

donde

$$A_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^L 0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \qquad \text{y} \qquad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Calculando B_n tenemos

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L} \cdot L \int_0^L x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{2}{L} \cdot \int_0^L x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\
&= 2 \left(-\frac{xL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) - \frac{2}{L} \cdot \int_0^L x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\
&= 2 \left(-\frac{L^2}{n\pi} \cos(n\pi) + 0 \right) - \frac{2}{L} \cdot \int_0^L x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\
&= \frac{2L^2}{n\pi} (-1)^{n+1} - \frac{2}{L} \left(-\frac{x^2 L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L + \frac{2L}{n\pi} \int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right), \\
&= \frac{2L^2}{n\pi} (-1)^{n+1} - \frac{2}{L} \left[-\frac{L^3}{n\pi} (-1)^n + \frac{2L}{n\pi} \left(\frac{xL}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L - \frac{L}{n\pi} \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) \right], \\
&= \frac{2L^2}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{2L^2}{n\pi} (-1)^n + \frac{4}{n\pi} \left(\frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L \right), \\
&= \frac{4L^2}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1].
\end{aligned}$$

De donde la función buscada es

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{4L^2}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1] \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \right) \right] \\
&= \frac{4L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n^3} \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
\end{aligned}$$

□

7. Hallar la función $u(x,t)$, con $x \in [0,L]$ y $t>0$, que resuelve la ecuación de la onda unidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y satisface las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \widetilde{A_j} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{2}\right), \\ u_t(x,0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \widetilde{B_j} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{2}\right). \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{2}{nc\pi} \widetilde{B_n} \operatorname{sen}\left(\frac{nc\pi t}{2}\right) + \widetilde{A_n} \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones, donde $\Omega = [0, L] \times [0, +\infty[$, siendo $L > 0$. Considere el siguiente problema de valor en la frontera, asociado a la ecuación de la onda unidimensional:

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \Omega, \\ u(0,t) = a & t \geq 0, \\ u(L,t) = b & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,L], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in [0,L]. \end{cases}$$

a) Demuestre que toda solución u del problema (P) puede escribirse en la forma

$$u(x,t) = w(x,t) + a + \frac{b-a}{L} x, \quad (x,t) \in \Omega,$$

donde $w : \Omega \to \mathbb{R}$ es solución del problema

$$\text{(Ph)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & (x,t) \in \Omega, \\ w(0,t) = w(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ w(x,0) = f(x) - a - \dfrac{b-a}{L} x & x \in [0,L], \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in [0,L]. \end{cases}$$

b) Sea $\Omega = [0, \pi] \times [0, +\infty[$. Use el inciso anterior para resolver el siguiente problema de valor en la frontera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \Omega, \\ u(0,t) = -3 & t \geq 0, \\ u(L,t) = 8 & t \geq 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(17x) & x \in [0,\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \operatorname{sen}(17x)\cos(17t) - 3 + \dfrac{11}{\pi} x + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(3 + 8(-1)^k)}{k\pi} \operatorname{sen}(kx)\cos(kt)$

9. El objetivo de este ejercicio es el de resolver la ecuación de la onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$

con condiciones de Neumann homogéneas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

y con condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L,$$

Donde $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ es una función conocida no nula. Nótese que a diferencia del problema usual, las condiciones de frontera se encuentran sobre la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ en lugar de sobre la función u.

Para esto, usaremos el método de separación de variables: Asumiremos que existen funciones $X : [0,L] \to \mathbb{R}$ y $T : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tales que, para todo (x,t) se cumple que

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

a) Demuestre que existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que las funciones X y T son soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias con restricciones:

$$\begin{cases} c^2 X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ X'(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \geq 0, \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Suponiendo que $\lambda = 0$, demuestre que X y T son funciones constantes.

c) Demuestre que no es posible que $\lambda > 0$.

d) Demuestre que si $\lambda < 0$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\lambda = -\frac{c^2 k^2 \pi^2}{L^2} \qquad X(x) = C \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \qquad \text{y} \qquad T(t) = D\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right)$$

para todo $x \in [0,L]$ y $t \geq 0$, donde C y D son constantes.

e) Demuestre que la solución u del problema de Neumann puede escribirse en la forma

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right),$$

donde para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\, dx.$$

f) Use los incisos anteriores para resolver el siguiente problema de Neumann asociado a la ecuación de la onda:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = \cos^3(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \dfrac{3}{4}\cos(x)\cos(2t) + \dfrac{1}{4}\cos(3x)\cos(6t)$.

Solución. *a*) Sustituyendo en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

la solución $u = XT$ se tiene que

$$XT'' = c^2 X'' T,$$

de donde, dividiendo para $u = XT$, se tiene que

$$\frac{T''}{T} = c^2\frac{X''}{X}.$$

El lado izquierdo de esta igualdad es una función que depende solamente de la variable t, mientras que el derecho depende solamente de la variable x, por ende ambos términos deben ser iguales a una constante $\lambda \in \mathbb{R}$, así

$$\frac{T''}{T} = c^2\frac{X''}{X} = \lambda.$$

Ahora, como T no puede ser idénticamente nula, se tiene que $0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t)$, de donde $X'(0) = 0$ y similarmente $X'(L) = 0$. De igual manera se tiene que $T'(0) = 0$. Con esto, se tienen las siguientes EDOs con restricciones:

$$\begin{cases} c^2X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ X'(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \geq 0, \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Supongamos que $\lambda = 0$. Entonces se tiene que $X'' = 0$ y que $T'' = 0$. De la primera ecuación se tiene que

$$X(x) = c_1 + c_2x,$$

de donde, $X'(x) = c_2$ y dado que $X'(0) = X'(L) = 0$, se sigue que $c_2 = 0$, por ende $X(x) = c_1$, es decir, X es una función constante. Con el mismo razonamiento se tiene que T es también una función constante.

c) Supongamos que $\lambda > 0$, entonces se tiene que $c^2X'' - \lambda X = 0$, de donde

$$X(x) = c_1e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + c_2e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x},$$

de donde

$$X'(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{c}\left(c_1e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} - c_2e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}\right).$$

Dado que $X'(0) = X'(L) = 0$ se tiene que

$$c_1 - c_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad c_1e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}L} - c_2e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}L} = 0,$$

lo que implica que $c_1 = c_2 = 0$. Por ende $X = 0$ y así $u = 0$, lo que no es posible ya que f es no nula.

d) Supongamos que $\lambda < 0$. Entonces, la solución general de la EDO $c^2X'' - \lambda X = 0$ es

$$X(x) = c_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right),$$

de donde

$$X'(x) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\left(-c_1\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + c_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right)\right),$$

y como $X'(0) = 0$, se tiene que

$$0 = X'(0) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{c}c_2,$$

con lo cual $c_2 = 0$. Así

$$X(x) = c_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) \qquad \text{y} \qquad X'(x) = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}c_1\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right).$$

Ahora, necesitamos que $c_1 \neq 0$ en orden de tener $u \neq 0$, por ende, de la condición

$$0 = X'(L) = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}c_1\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L\right),$$

se tiene que sen $\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L\right) = 0$, lo que sucede solamente si existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L = k\pi,$$

de donde tenemos que, escribiendo $C = c_1$,

$$\lambda = -\frac{c^2k^2\pi^2}{L^2} \qquad \text{y} \qquad X(x) = C\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Con este valor de λ, procedemos a resolver la EDO $T'' - \lambda T = 0$ con la condición inicial $T'(0) = 0$. La solución general de esta EDO es

$$T(t) = c_1\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) + c_2\,\text{sen}\left(\frac{ck\pi t}{L}\right),$$

de donde, por la condición $T'(0) = 0$, se tiene que $c_2 = 0$, así, escribiendo $D = c_1$, se tiene que

$$T(t) = D\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right).$$

e) Por los incisos b) y d) se tiene que la solución u se puede escribir en la forma

$$u(x,t) = A + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right).$$

Escribiendo $a_0 = 2A$ y $a_k = A_k$, se tiene que

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right).$$

Ahora, como $u(x,0) = f(x)$, se tiene que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

por ende, los coeficientes a_k son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de coseno de f en el intervalo $[0, L]$, y por ende

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx.$$

Para calcular los coeficientes de Fourier, considere la siguiente identidad trigonométrica: $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$. $\square$

10. Sean $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$ dos funciones. Considere el siguiente problema de valor en la frontera asociado a la ecuación de la onda:

$$(\text{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,L]\times[0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Demuestre que toda solución u de (P) puede escribirse en la forma

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \quad (x,t) \in [0,L]\times[0,+\infty[,$$

donde u_1 y u_2 son soluciones de los problemas

$$\text{(P1)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[, \\ u_1(0,t) = u_1(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u_1(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

y

$$\text{(P2)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[, \\ u_2(0,t) = u_2(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u_2(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

respectivamente.

b) Use el resultado precedente para resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(L-x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, L/3[\cup]2L/3, L], \\ 1 & \text{si } x \in [L/3, 2L/3]. \end{cases}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{2L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left[\frac{2L}{\pi(2k+1)^3} \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\cos((2k+1)\pi/3) - \cos(2(2k+1)\pi/3)}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \right]. \end{aligned}$$