HOJA DE EJERCICIOS NO. 1
FUNCIONES

Semestre 2019-A — Departamento de Formación Básica

Ejercicios CP: 1, 3, 6, 10.b, 11.a, 12.a, 12.c, 13, (4), (10)

1. Sea $a > 0$. Demostrar que todo intervalo de la forma $[-a, a]$ ó $]-a, a[$ es un conjunto simétrico. £Qué ocurre con los intervalos de la forma $[-a, a[$ o $]-a, a]$?

2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos simétricos. Demostrar que $A \cup B$ y $A \cap B$ son conjuntos simétricos. Demostrar que A^c es un conjunto simétrico.

3. De las siguientes funciones, indique cual son pares:

   a) $\begin{aligned} f: [0,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$

   b) $\begin{aligned} f:]-3,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sen} x^2 + x^4 \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} f:]-a,a[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos x \csc x \end{aligned}, \quad a > 0$

   d) $\begin{aligned} f: [-10,10] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^{|x|} + e^{-|x|}}{e^{-x^2}} \end{aligned}$

   e) $\begin{aligned} f:]-\pi + k\pi, \pi + k\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto [\operatorname{sen} x]^3 - \cos x^3 e^{|x|} \end{aligned}$

4. De las siguientes funciones analizar la paridad de cada una.

   a) $\begin{aligned} \sinh: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$

   b) $\begin{aligned} \cosh: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} \tanh: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned}$

5. Demostrar o refutar los siguientes enunciados:

   a) La suma de dos funciones pares es par.

   b) La resta de una función impar de una par es una función par.

   c) El cociente de dos funciones impares es par

6. Sea $a > 0$ y $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función. Demostrar que:

   a) Si f es una función par, continua en $[-a, a]$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

b) Si f es una función impar, continua en $[-a,a]$, entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

7. Si $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ con $a > 0$ es impar y si $b \in [-a,a]$. £Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$

   b) $\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = 0$

   c) $\int_{0}^{b} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-b}^{a} f(x)\,dx$

   d) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{-a}^{b} f(x)\,dx$

8. Si $n \in \mathbb{N}$ y $a > 0$. Sean $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,...,n\}$ funciones continuas:

   a) Si f_i es impar para todo $i \in \{1,2,...,n\}$ probar que:

   $$\int_{-a}^{a} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{-a}^{a} f_i(x)\,dx = 0$$

   b) Si f_i es par para todo $i \in \{1,2,...,n\}$ probar que:

   $$\int_{-a}^{a} \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,dx = 2\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{a} f_i(x)\,dx$$

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica de periodo T. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, f es periódica de periodo nT

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de periodo T. Mostrar que las funciones:

    a) $\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x+a) \end{aligned}$

    b) $\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(xb) \end{aligned}$

    c) $\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f\left(\frac{x}{c}\right) \end{aligned}$

    con $a,b,c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, tienen periodos T, $\frac{T}{b}$ y Tc respectivamente.

11. Analizar la periodicidad de las funciones:

    a) $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos(3x) \end{aligned}$

    b) $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\operatorname{sen}(x))^2\cos^3(x) \end{aligned}$

12. Analizar la continuidad de las siguientes funciones:

    a) $\begin{aligned} H : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0, \; si\;\; x < 0 \\ 1, \; si\;\; x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$

    b) $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$

    c) $\begin{aligned} H : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0, \;\; 2+4k \leq x \leq -1+4k \\ a, \;\; -1+4k < x \leq 1+4k \\ 0, \;\;\; 1+4k < x \leq 2+4k \end{cases} \end{aligned}$

13. Sean $a\, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{1-bx}{x^2+1} & x < 1 \\ -2 & x = 1 \\ \frac{sen(a(x-1))}{x^2-1} & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Determinar los valores de a y b para los cuales existe $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) Determinar para que valores de a y b la función es continua en 1

Ejercicios Adicionales

14. Sean f y g funciones continuas a trozos en intervalo $[a, b]$ y suponga que f_1 se identifica con f y g_1 se identifica con g. Pruebe que:

$$\int_a^b f_1(x) g_1(x)\, dx = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

15. Sea f una función diferenciable en el intervalo $[-a, a]$. Muestre que f' es impar cuando f es par e impar cuando f es par.

16. Demuestre que toda función real f, definida en un intervalo de la forma $[-a, a]$ para $a \in \mathbb{R}$, puede ser expresada como la suma de una función par y una impar (A cada uno de estos sumandos se los conoce como la *parte par* y la *parte impar* de f). [*Hint:* $2f(x) = f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)$.]

17. Analizar si las siguientes funciones son continuas a trozos.

a)

$$f(x) = \begin{cases} |x| - \lfloor |x| \rfloor, & \text{si } |x| \leq 2, \\ x^2, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} -5 - x, & \text{si } x < -\pi, \\ \lfloor \cos x \rfloor, & \text{si } |x| \leq \pi, \\ x^2, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x = 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x = 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \lfloor \operatorname{sen} x \rfloor \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

f)

$$f(x) = \frac{1}{n+1} \quad \text{para} \quad x \in \left] \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

18. Sea f una función integrable definida en el intervalo $[-a, a]$ y sea

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \quad \text{si } -a \leq x \leq a.$$

Muestre que F es impar cuando f es par y F es par cuando f es impar.

19. Halle las partes par e impar de la función definida por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

donde a_0, a_k, b_k son constantes y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Agradecimientos

La presente hoja de ejercicios fue propuesta enteramente por el matemático Diego Vargas a quien agradecemos su colaboración. Los ejercicios adicionales fueron elaborados durante el periodo 2018-B por los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya.

Ejercicios CP: 1, 3a, 5, 6a, 7, 10, 14, 15, 18, 19, (21)

1. Calcular:

$$\frac{2+5i}{3+4i}.$$

Respuesta: $\frac{2+5i}{3+4i} = \frac{26}{25} + \frac{7}{25}i.$

2. Calcular:

$$\frac{(5-3i)(1+i)}{\bar{z}} \quad \text{donde} \quad z = 1-2i.$$

Respuesta: $\frac{(5-3i)(1+i)}{\bar{z}} = \frac{12}{5} - \frac{14}{15}i.$

3. Demuestre que las siguientes potencias de números complejos son iguales a 1:

$$i^{2344} \quad , \quad i^{-4}.$$

4. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dos números complejos de módulo 1. Demuestre que:

$$|z_1 + z_2| = 2 \quad \text{si y solo si} \quad z_1 = z_2.$$

5. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. Muestre que si $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ entonces el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ es un imaginario puro, es decir:

$$\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2} = 0.$$

6. Utilice la fórmula de Moivre para demostrar:

$$\operatorname{sen}(3x) = 3\cos^2(x)\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3(x).$$

$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\operatorname{sen}^2(x).$$

7. Obtenga la forma polar o trigonométrica del número:

$$z = \sqrt{3} + i.$$

Respuesta: $z = 2(\cos(\pi/6) + i\operatorname{sen}(\pi/6)).$

8. Verifique que la forma polar del número:

$$z = -4i,$$

está dada por: $z = 4(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{2})).$

9. Muestre que:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 1$$

para todo $z, w \in \mathbb{C}.$

10. Dado el número complejo:

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

a) Calcule z^2.

b) Encuentre las ocho soluciones de la ecuación $z^8 = 1$.

c) Grafique estas soluciones en el plano complejo.

Respuesta: Professor Gilbert Strang's Lecture: Complex Numbers Part Imaginary, but Really Simple

11. *a*) Escriba $z = -2 + 3i$ en coordenadas polares.

    b) Escriba $z = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ en coordenadas rectangulares.

    c) Dibuje y etiquete el triángulo que relaciona las coordenadas rectangulares con las polares.

    d) Calcule $\frac{1}{-2+3i}$ en forma polar.

    e) Encuentre la raíz cúbica de 1.

    Respuesta: MIT OpenCourseWare: Complex Numbers and Euler's Formula

12. Dado el número complejo:

$$z = -1 + i/2$$

a) Encuentre el conjugado $\bar{z}$.

b) Encuentre $z\bar{z}$.

c) Encuentre $z + \bar{z}$

d) Grafique cada resultado en el plano complejo.

Respuesta: Professor Gilbert Strang's Lecture: Complex Numbers Part Imaginary, but Really Simple

13. Calcular el valor de: $\cos(3i)$.
Respuesta: $\cos(3i) = \cosh(3) \approx 10{,}06$.

14. Calcular $|z|$, si

$$z = \frac{4i}{-3-4i}.$$

Respuesta: $|z| = \frac{4}{5}$.

15. Calcule la potencia del siguiente numero complejo:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}.$$

Respuesta: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \frac{i}{32}$

16. Reduzca la siguiente fracción:

$$\frac{(1-i)^{10}}{(1+i)^3}$$

Respuesta: $\frac{(1-i)^{10}}{(1+i)^3} = 8 - 8i$

17. Dada la función

$$\begin{array}{rcl} f: & \longrightarrow & \\ z & \longmapsto & \operatorname{sen}(z), \end{array}$$

con $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, determinar la parte real y la parte imaginaria de $f(z)$.
Respuesta: $\operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$ y $\operatorname{Im}(f(z)) = \cos(x)\sinh(y)$

18. **(Prueba 1, 2018-B)** Encuentre la parte real e imaginaria del número:

$$\left(\frac{4-4i}{2+2i}\right)^7 + \left(\frac{4+4i}{2-2i}\right)^7.$$

Respuesta: $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$.

19. Hallar las soluciones de la ecuación:

$$x^5 + 1 = 0.$$

Respuesta: $\cos(\pi/5) + i\operatorname{sen}(\pi/5); -\cos(2\pi/5) + i\operatorname{sen}(2\pi/5); -1; -\cos(2\pi/5) - i\operatorname{sen}(2\pi/5); \cos(\pi)/5 - i\operatorname{sen}(\pi/5)$.

20. Sea $z \in \mathbb{C}$. Probar que $z \in \mathbb{R}$ si y solo si $\bar{z} = z$.

21. Sean $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ dos números complejos en su forma polar. Demostrar que:

$$z_1 + z_2 = r_3 e^{i\theta_3},$$

donde

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

y además

$$\tan(\theta_3) = \frac{r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + r_2 \operatorname{sen}(\theta_2)}{r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2)}.$$

Ejercicios Adicionales

22. *a*) Demuestre que para todo número complejo $z \neq 1$ y para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se verifica la identidad

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

b) Usando el inciso anterior, demuestre la siguiente identidad trigonométrica, válida para $0 < \theta < 2\pi$ y para todo $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Agradecimientos

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya. Para la presente versión se incluyeron los aportes del matemático Diego Vargas, y los ingenieros Edwin Bone y Jéssica Montenegro.

Ejercicios CP: 1, 2a, 4, 5a, 5c, 5f, 7, (9b)

1. Verificar que si la sucesión $\{x_n\}$ converge hacia límite $x_n \to 2$, entonces la sucesión $\{\frac{2x_n-1}{3}\}$ converge hacia el límite $\frac{2x_n-1}{3} \to 1$.

2. Determinar si las siguientes sucesiones, son convergentes o divergentes:

   a) $\left\{\frac{(1+i)^n}{n}\right\}$

   b) $\{\frac{n}{n+3i} - \frac{in}{n+1}\}$

3. Estudie la convergencia de cada una de las siguientes series. Si la serie es convergente, calcule su suma.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+1/n)^n(1+n))}{\log(n^n)\log((n+1)^{n+1})}$, donde log es la función logaritmo natural.

   Respuesta: a) Convergente, serie telescópica y geométrica de suma $S = 1$. b) Convergente, serie telescópica de suma $S = \frac{1}{2\log(2)}$.

4. **(Prueba 1, 2018-B)** Determine si la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+3n+2}$$

   es convergente o divergente y si converge calcule su suma.
   Respuesta: a) Serie convergente (telescópica) de suma $S = 1$.

5. Determine si las series que se presentan a continuación son convergentes o divergentes.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$

   d) $\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \frac{i}{\log(i)}$

   e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+1}$

   f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i^2}$

   g) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

   Respuesta: g) Cristigo: Como saber si una serie converge: Prueba del Cociente

6. Demuestre que para $a = e$, la serie :

$$\sum_{m\epsilon\mathbb{N}} \frac{1}{m!}\left(\frac{m}{a}\right)^n$$

es divergente.

7. Determine la expansión de McLaurin de las siguientes funciones:

   a) $\begin{aligned} \text{sen}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{sen}(x) \end{aligned}\,,$

   b) $\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}\,,$

   c) $\begin{aligned} e^z\colon \quad &\longrightarrow \\ z &\longmapsto e^z \end{aligned}\,.$

   y a partir de ellas verifique la fórmula de Euler, es decir, que para todo $y \in \mathbb{R}$ se satisface la relación: $e^{iy} = \cos(y) + i\,\text{sen}(y)$.

8. Asuma que la siguiente expresión es verdadera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

(en el próximo capítulo, sobre series de Fourier, demostraremos esta expresión) y que la serie anterior puede integrarse término a término. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

9. Verifique los siguientes desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto $x_0 = 0$, para los valores de x indicados.

   a) $\text{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

   b) $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, para $|x| < 1$; y

   c) $\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$, para $|x| < 1/2$.

   Para ello, puede asumir conocidos los desarrollos en serie de Taylor de $\text{sen}(x)$ y $\cos(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $\log(1-x)$ y $1/(1-x)$ si $|x| < 1$.

Ejercicios Adicionales

10. Las siguientes sucesiónes definidas mediante su enésimo término x_n como:

    a) $x_n = \frac{1}{n}$

    b) $x_n = \frac{n+1}{n}$

    c) $x_n = \frac{2n}{n^3+1}$

    son todas convergentes y de límite L. Por tanto, para cada número ϵ positivo (fijo), existe otro número $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que: $|x_n - L| < \epsilon$, si $n \geq N$ con $n \in \mathbb{Z}^+$. Determinar en cada caso el valor de N que corresponde a los siguientes valores de ϵ: $\epsilon = 1; 0,1; 0,01$.

11. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función creciente y acotada. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se define

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{y} \qquad t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

a) Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq t_n \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \int_0^1 f(x)\,dx - s_n \leq \frac{f(1)-f(0)}{n}.$$

b) Demuestre que las sucesiones (s_n) y (t_n) ambas convergen y que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

12. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos. Utilice el criterio de comparación para mostrar que:

a) Si $\sum a_n$ converge, demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

converge.

b) Si $\sum a_n$ diverge, demuestre que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$$

también diverge.

13. Determine si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$$

Respuesta: Serie convergente. **Hint:** Utilice el criterio de la integral.

14. a) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ y cada $x \in \mathbb{R}$, se define

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

b) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ y cada $x \in \mathbb{R}$, se define

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}.$$

Demuestre que existe

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, que f_n y f son derivables en 0 para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y que

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) \neq f'(0).$$

c) Qué conclusión puede obtener de los dos incisos anteriores?

AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya. Para la presente versión se incluyeron los aportes del matemático Diego Vargas, y los ingenieros Edwin Bone y Jéssica Montenegro.

Ejercicios CP: 5, 8 // 12, 14, 16, (11a)

1. Dadas dos funciones f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ periódicas de periodo $p > 0$. Demostrar que el producto de estas funciones o cualquier combinación lineal de ellas, es también una función periódica de periodo p.

2. Si la función $f \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periódica de periodo $p > 0$, mostrar que para todo número entero n se cumple que:
$$f(x) = f(nx + p).$$
para todo $x \in I$. f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en R periódicas de periodo $p > 0$.

3. Sea f una función continua por tramos, periódica de período $2p$ con $p \in \mathbb{N}$. Muestre que
$$\int_a^{a+2p} f(x)\,dx = \int_b^{b+2p} f(x)\,dx.$$

4. Las funciones $f \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \operatorname{sen}(m\pi x/L)$ y $g(x)\cos(m\pi x/L)$ constituyen una familia de funciones mutuamente ortogonales sobre el intervalo $I = [-L, L]$. Verificar (por integración directa) las siguientes relaciones de ortogonalidad:
$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n; \end{cases}$$
$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = 0 \qquad \text{para todo } m, n;$$
$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

5. Dada la función $f \colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$, determine la descomposición en series de Fourier de:

   a) La **extensión impar** de f, dada por:
$$\begin{aligned} f_{\text{impar}} \colon]-2\pi, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

   b) La **extensión par** de f, dada por:
$$\begin{aligned} f_{\text{par}} \colon]-2\pi, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

   c) La función f.

   Esboce en todos los casos la función y su respectiva extensión periódica.

6. Dada la función:
$$\begin{aligned} f \colon (-\pi, \pi) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{ax} \end{aligned}$$
con $a \neq 0$, determine la expansión en series de Fourier de:

a) La función f.

b) La extensión impar de $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$.

c) La extensión par de $f\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$.

7. A partir de la función $f\colon [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, determine la representación en series de Fourier de:

   a) La función f.

   b) La extensión impar de f.

   c) La extensión par de f

8. **(Prueba 1, Examen 1, 2018-B)** Encuentre la expansión en series de Fourier de la función que se muestra en la figura 1.

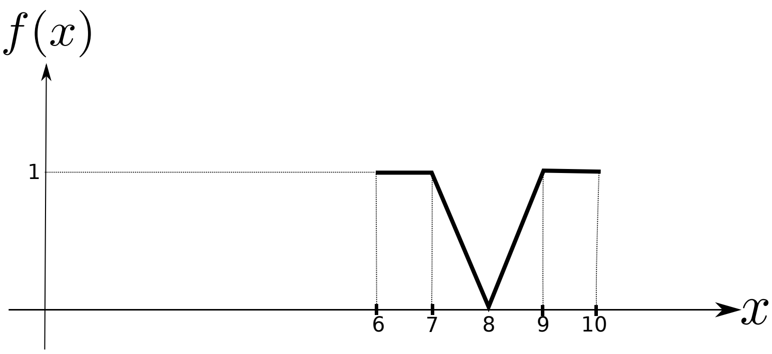


Figura 1: Ejercicio 8

Utilice: $\int x\cos(kx)dx = \frac{x\,\mathrm{sen}(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} + C$, donde $k, C \in \mathbb{R}$

9. Descomponer en una serie de Fourier de cosenos la función $f :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x \leq h \\ 0 & \text{si} \quad h < x < \pi, \end{cases}$$

   donde $0 < h < \pi$.

10. Dada la función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 1$, y $x \in [0, \pi]$:

    a) Determine la expansión en series de Fourier de f.

    b) Descomponer f en una serie de (Fourier en términos de) senos.

    c) Descomponer f en una serie de (Fourier de) cosenos.

11. **(Prueba 1, 2018-B)** En cada uno de los siguientes casos, la serie de Fourier correspondiente converge hacia $f(x)$ en todos los puntos en donde la función f es continua. Realice el gráfico para cada caso y determine:

    a) La **serie de Fourier de senos** de la función:

$$\begin{aligned} f :]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos(x). \end{aligned}$$

    b) La **serie de Fourier de cosenos** de la función:

$$\begin{aligned} f :]0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |\cos(x)|. \end{aligned}$$

12. **(Examen 1, 2018-B)** A partir del desarrollo en series de Fourier de cosenos de la función f definida por:

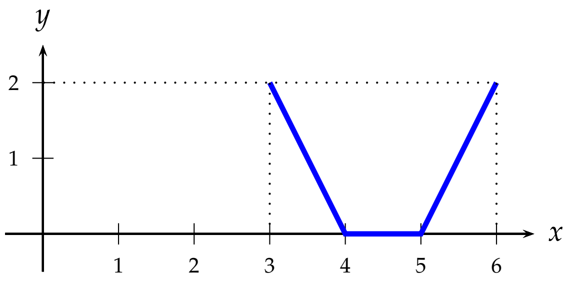
$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2, \end{array}$$

calcule la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Hint: Halle el desarrollo en series de Fourier de cosenos de f (es decir, de la extensión par de f), y luego evalúe $f(x=0)$.

13. **(Examen Final, 2018-B)** Hallar el desarrollo en series de Fourier de la función que se muestra en la figura:



14. **(Examen Remedial, 2018-B)** Considere la función f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ -\sqrt{2-x}, & \text{si} \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

y que se muestra en la figura. Determine los **coeficientes** a_0, a_m y b_m de la respresentación en Series de Fourier de la extensión periódica de:

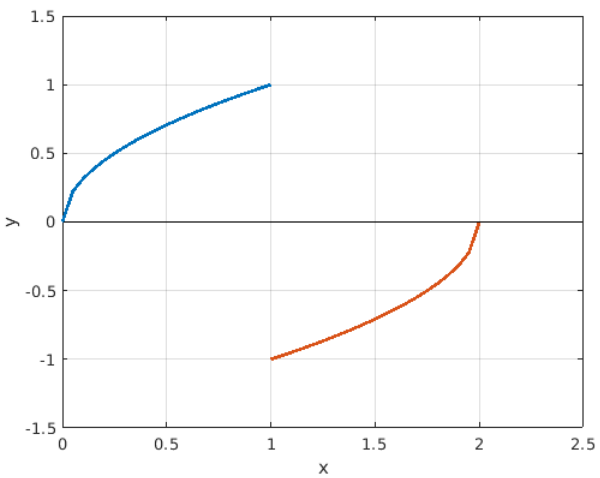
a) La función f utilizando CAMBIO DE INTERVALO.

b) La EXTESIÓN PAR de f.

c) La EXTESIÓN IMPAR de f.

d) La serie de Fourier de COSENOS de $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$

En cada caso **esboce** la (extensión periódica de la) función y determine su **período**. **Importante:** Plantee las integrales asociadas a cada problema y no las resuelva.



15. En este ejercicio probaremos la convergencia y hallaremos la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

a) Encuentre la expansión en serie de Fourier de la función

$$\begin{aligned} f: [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}.$$

b) Redefina la función f de tal manera que sea períodica con período 2.

c) Utilice el teorema de convergencia de series de Fourier para calcular el valor al que converge la serie para $x = 0$.

d) Concluya el valor de la suma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

16. **(Examen Remedial, 2018-B)** Los coeficientes de la Serie de Fourier de la función f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad -L < x < 0, \\ L, & \text{si} \quad 0 < x < L \end{cases}$$

son: $a_0 = L$, $a_m = 0$ y $b_m = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad m \text{ par,} \\ \frac{2L}{m\pi}, & \text{si} \quad m \text{ impar} \end{cases}$. Determine una aproximación de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{L} x$$

Ejercicios Adicionales

17. Sea $p \in \mathbb{N}$, pruebe que las funciones

$$1, \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \ldots$$

son ortogonales en el intervalo $[-p, p]$.

18. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función par continua a trozos con desarrollo en serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)].$$

Asuma que

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0, \quad 0 < \pi < x.$$

Demuestre que

$$a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

y encuentre una expresión para a_{2k+1}, con $k = 0, 2, \ldots$.

19. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos con desarrollo en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)], \quad -\pi < x < \pi.$$

Demuestre que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Esta igualdad se conoce como la *identidad de Parseval*.

20. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función continua a trozos. Demuestre que las sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$, que aparecen en el desarrollo en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)], \quad -\pi < x < \pi,$$

ambas convergen hacia 0.

AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya.

Ejercicios CP: 9, 10, 11, 14, (7)

1. Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ 0, & \text{si} \quad x > 2, \end{cases}$$

determine:

a) La representación en integrales de Fourier de f.

b) La representación en integrales de Fourier seno de f.

c) La representación en integrales de Fourier coseno de f.

d) Estime la integral impropia:

$$\int_0^\infty \left(\frac{2\,\text{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right) \cos(wx) dw$$

Respuesta:

a) La representación en integrales de Fourier de la función está dada por:

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos(wx) + B(w)\,\text{sen}(wx)] dw$$

de donde:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wv) dv$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v)\,\text{sen}(wv) dv$$

por tanto, la función $A(w)$ se determina por:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(v)\cos(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 v\cos(wv) dv$$

de donde la integral es igual a:

$$\int_0^2 x\cos(wx) dx = \frac{\cos(wx)}{w^2}\Big|_0^2 + x\frac{\text{sen}(wx)}{w}\Big|_0^2 = \frac{2\,\text{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \tag{1}$$

Finalmente,

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\,\text{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right].$$

Por otro lado $B(w)$ se determina por:

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(v)\,\text{sen}(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(v)\,\text{sen}(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 v\,\text{sen}(wv) dv$$

de donde la integral es igual a:

$$\int_0^2 x\,\text{sen}(wx) dx = \frac{\text{sen}(wx)}{w^2}\Big|_0^2 - \frac{x\cos(wx)}{w}\Big|_0^2 = \frac{\text{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w} \tag{2}$$

Finalmente,

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w}\right].$$

Por tanto, la representación en integrales de Fourier de $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\frac{2\operatorname{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)\cos(wx) + \left(\frac{\operatorname{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w}\right)\operatorname{sen}(wx)\right]dw.$$

b) Determinar la representación en integrales de Fourier seno de f significa (en este caso, dado que f no es impar) obtener la representación en integrales de Fourier de la extensión impar de f, la cual está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad -2 < x < 2, \\ 0, & \text{si} \quad |x| > 2, \end{cases}$$

Como $F(v)$ es impar y $\cos(wv)$ es par en el intervalo $]-2, 2[$, entonces:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)\cos(wv)dv = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} F(v)\cos(wv)dv = 0.$$

Por otro lado,

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} F(v)\operatorname{sen}(wv)dv.$$

como $F(v)$ y $\operatorname{sen}(wv)$ son impares,

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} F(v)\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^2 F(v)\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^2 v\operatorname{sen}(wv)dv.$$

En donde podemos utilizar el resultado obtenido en el literal anterior para la integral (2) es decir:

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 v\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w}\right)$$

Finalmente,

$$F(x) = \int_0^\infty B(w)\operatorname{sen}(wx)dw$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2\cos(2w)}{w}\right)\operatorname{sen}(wx)dw$$

c) Determinar la representación en integrales de Fourier coseno de f significa (en este caso, ya que f no es par) obtener la representación en integrales de Fourier de la extensión par de f dada por:

$$G(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad 0 < x < 2, \\ -x, & \text{si} \quad -2 < x < 0, \\ 0, & \text{si} \quad |x| > 2, \end{cases}$$

Como $G(v)$ es par y $\operatorname{sen}(wv)$ es impar en el intervalo $]-2, 2[$, entonces:

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(v)\operatorname{sen}(wv)dv = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} G(v)\operatorname{sen}(wv)dv = 0.$$

Además como $G(v)$ y $\cos(wv)$ son pares

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(v)\cos(wv)dv = \frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2} G(v)\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^2 G(v)\cos(wv)dv.$$

de donde,

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 G(v)\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\int_0^2 v\cos(wv)dv.$$

En donde podemos utilizar el resultado obtenido en el literal anterior para la integral (1) es decir:

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^2 v\cos(wv)dv = \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)$$

Finalmente,

$$G(x) = \int_0^\infty A(w)\cos(wx)dw$$

$$G(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)\cos(wx)dw$$

d) La integral impropia

$$\int_0^\infty \left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)\cos(wx)dw$$

puede estimarse a partir de la representación en integrales de Fourier de $G(x)$ obtenida en el último literal. Por el teorema de convergiencia y existencia de la integral de Fourier, la integral va a converger a x en $[0,2]$, a $\frac{G(2^+)+G(2^-)}{2}$ en $x=2$ y a 0 para $x>2$ entonces,

$$\int_0^\infty \left(\frac{2\,\mathrm{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w)-1}{w^2}\right)\cos(wx)dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & \text{si} \quad 0<x<2, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si} \quad x=2, \\ 0, & \text{si} \quad x>2. \end{cases}$$

2. Determine la representación en integrales de Fourier de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x<0. \end{cases}$$

3. Determine la representación en integrales de Fourier de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x>0, \\ e^{x} & \text{si } x<0. \end{cases}$$

4. Determine la representación en integrales de Fourier de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } |x|\le 1, \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

5. Determine la representación en integrales de Fourier de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x=0, \\ e^{-x} & \text{si } x>0. \end{cases}$$

6. **(Examen Remedial, 2018-B)** Determine la representación en Integrales de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|>0, \\ 1 & \text{si } |x|<0. \end{cases}$$

y a partir de ella encuentre una estimación para:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(wx)\,\mathrm{sen}(w)}{w}dw$$

7. Demostrar que:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(w)}{w}\cos(wx)\,dw=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{si } 0\leq x<1,\\ \frac{1}{4} & \text{si } x=1,\\ 0 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

8. Demostrar que:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(w\pi)}{1-w^2}\operatorname{sen}(wx)\,dw=\begin{cases}\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) & \text{si } x<\pi\\ 0 & \text{si } x>\pi.\end{cases}$$

9. **(Examen 1, 2018-B)** Determine la representación en integral de Fourier de la función:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si} \quad -\infty<x\leq-\pi,\\ -1, & \text{si} \quad -\pi<x\leq 0,\\ 1, & \text{si} \quad 0<x\leq\pi,\\ 0, & \text{si} \quad \pi<x\leq\infty,\end{cases}$$

y a partir de esta, evalúe la integral impropia:

$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(w\pi)}{w}\operatorname{sen}(wx)dw.$$

(2.5pt)

10. **(Examen 1, 2018-B)** Utilice la representación en integral de Fourier de senos de la función:

$$f(x)=e^{-x}\operatorname{sen}(x), \quad x>0$$

para evaluar la integral impropia:

$$\int_0^{\infty}\frac{w\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}w)}{w^4+4}\,dw.$$

11. Represente mediante una integral de Fourier del tipo

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A(w)\cos(wx)\,dw$$

la función:

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{si } 0<x<1,\\ 2-x & \text{si } 1<x<2,\\ 0 & \text{si } x>2.\end{cases}$$

12. Demuestre la siguiente identidad:

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(\pi w)\operatorname{sen}(wx)}{1-w^2}=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(x) & \text{si } 0\leq x\leq\pi\\ 0 & \text{si } x>\pi.\end{cases}$$

13. *a*) Utilizando las representación en serie de Fourier de coseno y seno de la función $f(x)=e^{-kx}$, con $x>0$ y $k>0$, demuestre que:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(wx)}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2k}e^{-kx} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty}\frac{w\operatorname{sen}(wx)}{k^2+w^2}\,dw=\frac{\pi}{2}e^{-kx}, \qquad x>0, k>0.$$

Estas integrales se conocen como *integrales de Laplace*.

b) Usando el inciso anterior, encuentre la representación de la función $f(x)=1/(1+x^2)$, definida para $x>0$, en serie de Fourier de coseno.

14. El objetivo de este ejercicio es calcular el valor de la integral:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{t^3 \operatorname{sen}(t)}{t^4+4}\, dt.$$

Para ello, realice lo siguiente:

a) Considere la función $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida para cada $x > 0$ por:

$$f(x) = e^{-x} \cos(x).$$

Demuestre que la extensión impar de f es absolutamente integrable, continua por tramos en cada intervalo acotado y que admite derivadas laterales en cada punto.

b) Del inciso anterior concluya que f puede ser representada por una integral de Fourier de senos. Calcule esta representación.

c) Usando el inciso anterior, calcule el valor de la integral I.

EJERCICIOS ADICIONALES

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par con representación en integral de Fourier de coseno

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) cos(wx)\, dw, \qquad \text{donde} \qquad A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos(wv)\, dv.$$

a) Demuestre que, para todo $a > 0$ y para todo $x > 0$, se verifica la *identidad de cambio de escala:*

$$f(ax) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} A\left(\frac{w}{a}\right) \cos(wx)\, dw.$$

b) Demuestre que para todo $x > 0$ se verifica

$$xf(x) = -\int_0^{\infty} A'(w) \operatorname{sen}(wx)\, dw,$$

donde A' es la primera derivada de la función A.

c) Demuestre que para todo $x > 0$ se verifica

$$x^2 f(x) = -\int_0^{\infty} A''(w) \cos(wx)\, dw,$$

donde A'' es la segunda derivada de la función A.

d) Proponga fórmulas similares para la transformada de Fourier de senos de una función impar f y demuéstrelas.

16. Considere las funciones $f, g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ y $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

a) Represente a f mediante una integral de Fourier de cosenos.

b) Sin calcular ninguna integral, y utilizando la representación de f como integral de Fourier de cosenos, encuentre la representación de g como integral de Fourier de cosenos.

c) Compruebe el resultado anterior calculando mediante definición la representación de g como integral de Fourier de cosenos.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función absolutamente integrable, derivable con continuidad, con representación como integral de Fourier

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Si f' también admite una representación como integral de Fourier, demuestre que

$$f'(x) = \int_0^\infty w[B(w)\cos(wx) - A(w)\operatorname{sen}(wx)]\, dw.$$

b) Asuma que f es dos veces derivable con continuidad y que f'' admite una representación como integral de Fourier. Demuestre que

$$f''(x) = -\int_0^\infty w^2[A(w)\cos(wx) + B(w)\operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de Carlos Ajila y Leonardo Montoya.

Ejercicios CP: 1, 2, 4, 9 // 10, 11, 13, (19)

1. Determinar la transformada de Fourier de la función $f\colon [-1,1] \to R$ con $f(x) = x$.
   Respuesta: $\mathcal{F}(f) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\operatorname{sen} w - w\cos w}{w^2}\right]$

2. Determinar la transformada de Fourier de la función:
$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad |t| < a, \\ 0, & \text{si} \quad |t| > a. \end{cases}$$
   Respuesta: $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2\operatorname{sen}(wa)}{w}$

3. Determinar la transformada de Fourier de la función:
$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad -1 < t < 0, \\ 1, & \text{si} \quad 0 < t < 1, \\ 0, & \text{si} \quad |t| > 1. \end{cases}$$
   Respuesta: A partir de la definición de transformada de Fourier:
$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt,$$
$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{-1}^{0} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{1}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt\right],$$
$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{-1} (0)e^{-iwt}dt + \int_{-1}^{0} (-1)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} (1)e^{-iwt}dt + \int_{1}^{\infty} (0)e^{-iwt}dt\right],$$
$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\int_{-1}^{0} e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} e^{-iwt}dt\right],$$
$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{e^{-iwt}}{(-iw)}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{e^{-iwt}}{(-iw)}\bigg|_{0}^{1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2}{iw} + \frac{2\operatorname{sen} w}{w}\right].$$

4. Halle la transformada de Fourier de la función definida por:
$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}.$$
   Respuesta: $\hat{f}(w) = \dfrac{e^{2a} - e^{2aiw}}{\sqrt{2\pi}(1 - wi)e^{a(1+wi)}}.$

5. Halle la transformada de Fourier de la función definida por:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-ax} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$
   Respuesta: $\hat{f}(w) = \dfrac{a - iw}{\sqrt{2\pi}(a^2 + w^2)}$

6. Determinar la transformada de Fourier seno de $f(x) = e^{-|x|}$ y a partir de la transformada seno inversa (de $\hat{f}_s(w)$) evaluar la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{1+x^2} dx, \quad m > 0$$

Respuesta: $\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{1+w^2}$, $\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{1+x^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-m}$.

7. Determinar la transformada de Fourier de:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(1+i)t}, & \text{si} \quad t > 0, \\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

y a partir de este resultado, demostrar que:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i(w+1)}\right) = \begin{cases} e^{-(1+i)t}, & \text{si} \quad t > 0, \\ 0, & \text{si} \quad t < 0, \\ 1/2, & \text{si} \quad t = 0, \end{cases}$$

Respuesta: $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{1+i(w+1)}\right]$.

8. Determine:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+iw}{6-w^2+5iw}\right)$$

Hint: Separe en fracciones parciales y utilice la tabla de transformadas inversas.

9. **(Examen Remedial, 2018-B)** Sea $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua por tramos y absolutamente integrable en I, y es tal que $\lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0$ y $f'(t)$ es también continua por tramos en I. A partir de la definición de transformada de Fourier demuestre que:

$$\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\} = iw\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}.$$

10. Determinar la transformada de Fourier del pulso triangular:

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si} \quad 0 < t < 1, \\ 3-t, & \text{si} \quad 1 < t < 3, \\ 0, & \quad\text{en otros casos.} \end{cases}$$

Respuesta: $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2-3e^{-iw}+e^{-3iw}}{(iw)^2}\right]$.

   a) A partir de la definición de transformada de Fourier.

   b) A partir de la transformada de Fourier de la segunda derivada de $f(t)$.
   Para esto considere los siguientes resultados, definiciones y siga el siguiente procedimiento: Halle la primera derivada de $f(t)$ y exprese el resultado a través de la **función escalón unitario** definida como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t > a, \\ 0, & \text{si} \quad t < a. \end{cases}$$

   donde $a \in \mathbb{R}$. Derive $f'(t)$ y exprese dicho resultado a través de la "función" impulso $\delta(t)$, teniendo en cuenta que:

$$u'(t-a) = \delta(t-a), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

   La **función impulso** se define como:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & \text{si} \quad t = a, \\ 0, & \text{si} \quad t \neq a, \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, halle la transformada de Fourier de $f''(t)$. Utilice el hecho de que para esta función es válida la propiedad:

$$\mathcal{F}(f'') = (iw)^2\mathcal{F}(f),$$

y que la transformada de Fourier de la función impulso está definida como:

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-aiw}$$

para determinar $\mathcal{F}(f)$.

Observación: Una función del tipo impulso rectangular, puede expresarse a través de una combinación de funciones escalón unitario. Considere por ejemplo, la función:

$$g(t) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad 2 < t < 3, \\ 0, & \text{en} \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Esta puede expresarse como:

$$g(t) = 2\left[u(t-2) - u(t-3)\right].$$

Respuesta:

a) A partir de la definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt,$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{1}^{3} f(t)e^{-iwt}dt + \int_{3}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt\right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} (0)e^{-iwt}dt + \int_{0}^{1} (2t)e^{-iwt}dt + \int_{1}^{3} (3-t)e^{-iwt}dt + \int_{3}^{\infty} (0)e^{-iwt}dt\right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{0}^{1} (2t)e^{-iwt}dt + \int_{1}^{3} (3-t)e^{-iwt}dt\right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2-3e^{-iw}+e^{-3iw}}{(iw)^2}\right].$$

b) La primera derivada de $f(t)$ está dada por:

$$f'(t) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad 0 < t < 1, \\ -1, & \text{si} \quad 1 < t < 3, \\ 0, & \quad \text{en otros casos.} \end{cases}$$

La cual puede escribirse como una combinación lineal de funciones escalón unitario $u(t)$ como:

$$f'(t) = 2[u(t) - u(t-1)] + (-1)[u(t-1) - u(t-3)],$$

Simplificando, la última expresión tenemos:

$$f'(t) = 2u(t) - 3u(t-1) + u(t-3).$$

Derivando la expresión anterior tenemos que:

$$f''(t) = 2u'(t) - 3u'(t-1) + u'(t-3).$$

y como, $u'(t-a) = \delta(t-a)$, entonces:

$$f''(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t-1) + \delta(t-3).$$

Aplicando la transformada de Fourier a la última ecuación tenemos:

$$\mathcal{F}(f''(t)) = 2\mathcal{F}(\delta(t)) - 3\mathcal{F}(\delta(t-1)) + \mathcal{F}(\delta(t-3)).$$

y como la transformada de la función impulso se define por:

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-aiw}$$

entonces:

$$\mathcal{F}(f''(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}\right].$$

Además, haciendo uso de la propiedad: $\mathcal{F}(f'') = (iw)^2\mathcal{F}(f)$, tenemos que:

$$(iw)^2\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}\right].$$

de donde, finalmente,

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2 - 3e^{-iw} + e^{-3iw}}{(iw)^2}\right].$$

11. **(Examen Remedial, 2018-B)** Determine la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 5, & \text{si} \quad 3 \le t \le 11, \\ 0, & \quad \text{en otro caso} . \end{cases}$$

   a) A partir de la definición de transformada de Fourier.

   b) A partir de la transformada de Fourier de la primera derivada de $f(t)$.

   Respuesta: $\mathcal{F}(f) = \frac{5}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-3iw} - e^{-11iw}}{iw}\right].$

12. Dados $a, b > 0$, se define la función pulso rectangular de altura b por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -a, \\ b & \text{si } -a < x < a, \\ 0 & \text{si } a < x. \end{cases}$$

Halle su transformada de Fourier a partir de la definición y a partir de la transformada de f'.
Respuesta: Calcularemos primero la transformada de la función de pulso rectangular unitario $f_1(x)$, esto es cuando $b = 1$, es decir $f_1(x) = f(x)|_{b=1}$. De la definición de transformada de Fourier tenemos

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-iwx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-iwx}\,dx \\ &= -\frac{1}{iw\sqrt{2\pi}}\left(e^{-iwa} - e^{iwa}\right) \\ &= -\frac{1}{iw\sqrt{2\pi}}\left(\overline{e^{iwa}} - e^{iwa}\right) \\ &= \frac{1}{iw\sqrt{2\pi}}2i\,\text{sen}(wa) \\ &= \frac{2\,\text{sen}(wa)}{w\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Notemos ahora que cualquier función pulso rectangular de altura b es de la forma bf_1. Luego, utilizando la linealidad de la transformada de Fourier, tenemos:

$$\mathcal{F}[bf_1(x)] = b\mathcal{F}[f_1(x)] = b\frac{2\,\text{sen}(wa)}{w\sqrt{2\pi}} = \frac{2b\,\text{sen}(wa)}{w\sqrt{2\pi}}.$$

Por otro lado, $f(x)$ puede ser expresado a través de la función escalón unitario como:

$$f(x) = b[u(x+a) - u(x-a)]$$

Cuya derivada está dada por:

$$f'(x) = b[\delta(x+a) - \delta(x-a)]$$

Aplicando la transformada de Fourier sobre la última expresión tenemos:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = b[\mathcal{F}(\delta(x+a)) - \mathcal{F}(\delta(x-a))]$$

de donde:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = -\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-iwa} - e^{iwa}\right)$$

$$\mathcal{F}(f'(x)) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} 2i \operatorname{sen}(wa)$$

además como $\mathcal{F}(f'(x)) = iw\mathcal{F}(f(x))$, tenemos que:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{2b}{w\sqrt{2\pi}} \operatorname{sen}(wa)$$

13. **(Prueba 2, 2018-B)** Determine la transformada de Fourier de la función definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t < -2, \\ -t-2, & \text{si} \quad -2 \leq t < -1, \\ t, & \text{si} \quad -1 \leq t \leq 1, \\ 2-t, & \text{si} \quad 1 < t \leq 2, \\ 0, & \text{si} \quad t > 2, \end{cases}$$

A partir de:

a) La definición de transformada de Fourier.

b) La transformada de Fourier de la segunda derivada de $f(t)$.

14. Evalúe, para cada $x \in \mathbb{R}$ la integral

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y}\, dy$$

Respuesta: $g(x) = \begin{cases} \frac{\pi \operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ \pi & \text{si } x = 0. \end{cases}$

EJERCICIOS ADICIONALES

15. Demostrar que la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ es auto recíproca, Es decir, que la transformada de Fourier de $e^{\frac{-x^2}{2}}$ está dada por $e^{\frac{-w^2}{2}}$, y viceversa.

16. La función $f : \mathbb{R} \to$ definida por

$$f(x) = e^{ix^2}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$ se conoce como *función de Fresnel*. Asumiendo su existencia, encuentre la transformada de Fourier de la función de Fresnel.

Respuesta: $\mathcal{F}(f)(w) = \dfrac{1+i}{2} e^{-w^2/4}$.

17. Dadas dos variables aleatorias continuas independientes X e Y, con funciones de densidad f_X y f_Y, se

sabe que la función de densidad f_{X+Y} de la variable aleatoria $X+Y$ está dada por

$$f_{X+Y}(x) = (f_X * f_Y)(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. La función de densidad de una variable aleatoria que sigue una distribución normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ está dada por

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Sean X, Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Demuestre que $X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

18. Usando la definición de transformada de Fourier, pruebe las siguientes propiedades. Recuerde que las siguientes notaciones son equivalentes: $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}(f(t))(w) = \mathcal{F}(f)(w) = \hat{f}(w)$

    a) $\mathcal{F}(f(t-t_0)) = \mathcal{F}(f)e^{-iwt_0}$

    b) $\mathcal{F}(f(t)e^{iw_0t}) = \hat{f}(w-w_0)$

    c) $\mathcal{F}(f(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\frac{w}{\alpha}\right)$

    d) $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f(-w)$

19. Pruebe que $\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+w^2}$. Luego utilice las propiedades de la transformada de Fourier (del ejercicio anterior) para determinar: $\mathcal{F}(e^{-|at|})$ y finalmente, utilice este resultado para determinar $\mathcal{F}(e^{|3t|})$. **Respuesta:** $\mathcal{F}(e^{|at|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2|a|}{a^2+w^2}$, $\mathcal{F}(e^{|3t|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{6}{w^2+9}$

20. Determinar $\mathcal{F}(e^{-at}u(at))$. **Respuesta:** $\mathcal{F}(e^{-at}u(at)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{|a|(a+wi)}$

AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de Carlos Ajila y Leonardo Montoya.

1. **Teorema Fundamental:** Si $u_1, u_2, ..., u_n$, son n funciones de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, son soluciones (linealmente independientes) de una EDP (de orden n) lineal y homogénea en Ω, entonces la combinación lineal de ellas u, con:
$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), ..., +c_n u_n(x),$$
donde $c_1, c_2, ...c_n \in \mathbb{R}$, y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ también es solución (de esa EDP en Ω).
Pruebe el teorema fundamental (por sustitución de $u(x)$ donde $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.) para una EDP de segundo orden (lineal y homogénea).

2. Verifique para cada uno de los siguientes casos (y para un valor de $c \in \mathbb{R}$ adecuado) que la función $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con:

   a) $u(x,t) = x^2 + t^2$,
   b) $u(x,t) = \cos(4t)\,\text{sen}(2x)$,
   c) $u(x,t) = \text{sen}(kct)\cos(kx)$,
   d) $u(x,t) = \text{sen}(at)\,\text{sen}(bx)$,

   satisface la ecuación de la onda unidimensional:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. Verifique que $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con $u(x,t) = v(x+ct) + w(x+ct)$ donde v y w son funciones al menos dos veces diferenciales y $c \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación de la onda en una dimensión.

4. Verifique para cada uno de los siguientes casos (y para un valor de $c \in \mathbb{R}$ adecuado) que la función $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con:

   a) $u(x,t) = e^{-t}\,\text{sen}(x)$,
   b) $u(x,t) = e^{-w^2c^2t}\cos(wx)$,
   c) $u(x,t) = e^{-9t}\,\text{sen}(wx)$,

   satisface la ecuación del calor unidimensional:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

5. Verifique para cada uno de los siguientes casos que la función $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con:

   a) $u(x,y) = x^2 - y^2$.
   b) $u(x,y) = e^x \cos y$.
   c) $u(x,y) = e^x\,\text{sen}\, y$.
   d) $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

   satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

6. Verifique que la función $u\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$ con $u(x,y) = a\log_{10}(x^2+y^2)+b$, con $a,b \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Determine a y b tales que satisfagan las condiciones de frontera: $u = 110$ en el circulo $x^2+y^2 = 1$ y $u = 0$ en el circulo $x^2+y^2 = 100$.
   Respuesta: $a = -55$, $b = 110$.

Ejercicios CP: 1, 7, 10

1. El siguiente problema describe las vibraciones transversales $u(x,t)$ de una cuerda elástica de longitud $L = \pi$ fija en ambos extremos, la cual ha sido desplazada de su posición de equilibrio levantándola en su centro y luego soltada al tiempo $t = 0$ (su velocidad inicial es cero):

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2. \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Utilice el método de separación de variables para encontrar una expresión que describa las vibraciones transversales $u(x,t)$ en todo punto $x \in [0,\pi]$ de la cuerda y para todo tiempo t.
Respuesta: Buscamos una solución de la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1}$$

la cual al derivar

$$u_{tt} = X(x)T''(t)$$

$$u_{xx} = X''(x)T(t)$$

y reemplazar u_{tt} y u_{xx} en nuestra EDP: $u_{tt} = 9u_{xx}$, tenemos:

$$X(x)T''(t) = 9X''(x)T(t)$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

El lhs de la ecuación depende solamente de t y el rhs solamente de x, esto es posible si ambos son igual a una constante k (arbitraria), es decir:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k.$$

de donde podemos obtener las EDO's:

$$X''(x) - kX(x) = 0 \tag{2}$$

$$T''(t) - 9kT(t) = 0. \tag{3}$$

con las condiciones de frontera:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \qquad X(0) = 0$$

$$u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0, \qquad X(\pi) = 0$$

Como k es una constante arbitraria, esta puede ser positiva, negativa o incluso cero, y por tanto esto las soluciones de las ecuaciones (2) y (3) serán diferentes. Se puede demostrar que para valores de $k > 0$ o $k = 0$ las soluciones de las ecuaciones (2) y (3) corresponden a la solución trivial $u(x,t) = 0$.

Para $k < 0$ y tomando $k = -\gamma^2$ tenemos la ecuación:

$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0 \tag{4}$$

con las condiciones de frontera que obtuvimos previamente:

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0$$

Para resolverla, buscamos una solución de la forma:

$$X(x) = e^{mx}, \tag{5}$$

que derivando y reemplazando $X'(x)$ y $X''(x)$ en (4) tenemos:

$$m^2 e^{mx} + \gamma^2 e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + \gamma^2) = 0$$

de donde:

$$m = \pm i\gamma.$$

Reemplazando m en (5),

$$X(x) = e^{\pm i\gamma x}. \tag{6}$$

Se puede verificar que la solución general de (4) está dada por:

$$X(x) = A\cos(\gamma x) + B\,\mathrm{sen}(\gamma x). \tag{7}$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$.

$$X(0) = A\cos(\gamma 0) + B\,\mathrm{sen}(\gamma 0) = 0, \qquad A = 0. \tag{8}$$

$$X(\pi) = B\,\mathrm{sen}(\gamma\pi) = 0. \tag{9}$$

El $\mathrm{sen}(\gamma\pi)$ es 0 si el argumento $\gamma\pi$ es igual a $n\pi$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, ...$ es decir:

$$\gamma\pi = n\pi$$

y por tanto,

$$\gamma_n = n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Como $X(x) = B\,\mathrm{sen}(\gamma x)$ y existen un infinito número de valores de γ, existen también un infinito número de soluciones para la ecuación (4) (denotadas por el subíndice n), es decir:

$$X_n(x) = B_n\,\mathrm{sen}(\gamma_n x)$$

reemplazando $\gamma_n = n$, tenemos:

$$X_n(x) = B_n\,\mathrm{sen}(nx). \tag{10}$$

Como habíamos considerado $k = -\gamma^2$, la ecuación (3) se convierte en:

$$T''(t) + 9n^2 T(t) = 0. \tag{11}$$

cuya resolucón es similar a la ecuación (4). Se puede verificar que la solución a (11) está dada por:

$$T_n(t) = C_n\cos(3nt) + D_n\cos(3nt) \tag{12}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, ...$ Reemplazando las ecuaciones (10) y (12) en (1), tenemos:

$$u_n(x,t) = B_n\,\mathrm{sen}(nx)\,[C_n\cos(3nt) + D_n\cos(3nt)] \tag{13}$$

Por el teorema fundamental de superposición, la solución general está dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[B_n \operatorname{sen}(nx) \left[C_n \cos(3nt) + D_n \cos(3nt) \right] \right] \tag{14}$$

o simplemente por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx) \left[A_n^* \cos(3nt) + B_n^* \cos(3nt) \right] \tag{15}$$

donde, para determinar los coeficientes A_n^* y B_n^* utilizamos las condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x)$ y $u_t(x,0) = 0$, y se puede demostrar que estas están dadas por:

$$A_n^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$$

$$B_n^* = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} u_t(x,0) \operatorname{sen}(nx) dx = 0$$

por tanto:

$$u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2}) \operatorname{sen}(nx) \cos(3nt)$$

o

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2} \right) \operatorname{sen}((2k-1)x) \cos(3(2k-1)t).$$

2. Resuelva el problema de la onda unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 5, \\ u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

con $f(x) = 4\operatorname{sen}(\pi x) - \operatorname{sen}(2\pi x) - 3\operatorname{sen}(5\pi x)$.
Respuesta: $u(x,t) = 4\cos(2\pi t)\operatorname{sen}(\pi x) - \cos(4\pi t)\operatorname{sen}(2\pi x) - 3\cos(10\pi t)\operatorname{sen}(5\pi x)$.

3. Resuelva el problema de la onda unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 5 \\ u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0 \quad u_t(x,0) = 4 & 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{80}{2(2n-1)^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{2(2n-1)\pi t}{5} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{5}$.

4. **(Prueba 2, 2018-B)** Considere una cuerda elástica de longitud $L = 2\pi$ y $c = 2$ fija en ambos extremos, la cual ha sido desplazada de su posición de equilibrio y luego soltada. Si al tiempo $t = 0$, la posición de la cuerda puede ser descrita por la función:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\left(\frac{5x}{2}\right),$$

y si la cuerda parte del reposo:

a) Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema (asumiendo que la masa de la cuerda es despreciable, y que no existen fuerzas externas o de rozamiento).

b) Utilice el método de separación de variables para encontrar una expresión que describa las vibraciones transversales $u(x,t)$ que experimenta la cuerda, para todo $t \geq 0$ y para $0 \leq x \leq L$.

c) Determine explicítamente los términos no nulos de la serie infinita que define a $u(x,t)$. Hint: Los coeficientes de la serie pueden ser determinados directamente de las condiciones iniciales sin usar las relaciones:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\,\text{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx, \qquad B_n = \frac{2}{\lambda_n L}\int_0^L u_t(x,0)\,\text{sen}(\frac{n\pi x}{L})dx, \qquad n = 1,2,3,...$$

con $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L}$.

5. Encuentre una expresión que describa la vibración de una cuerda de longitud L fija en sus extremos que ha sido sacada de su posición de equilibrio. Considere que la velocidad de todos sus puntos es cero al tiempo $t = 0$ y que en ese mismo instante la cuerda tiene la forma de un triángulo con vértice en el punto (h, a).

Respuesta: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^2 h}{a(L-a)n^2\pi^2} \,\text{sen}\, \frac{n\pi a}{L} \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L}$.

6. Resuelva la ecuación de la onda sujeta a las condiciones:

$$u(0,t) = 0; \qquad u(L,t) = 0;$$
$$u(x,0) = 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \text{sen}(x).$$

Respuesta: $u(x,t) = \frac{2L\,\text{sen}\,L}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{L^2 - \pi^2 n^2} \,\text{sen}\, \frac{n\pi x}{L} \,\text{sen}\, \frac{n\pi ct}{L}$.

7. Hallar la función $u(x,t)$, con $x \in [0, L]$ y $t > 0$, que resuelve la ecuación de la onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y satisface las condiciones de frontera e iniciales:

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = x(L-x), \\ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Respuesta: Usando el método de separación de variables tenemos que la solución para este problema de valores de frontera está dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(A_n \,\text{sen}\left(\frac{nc\pi t}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)\right)\right]$$

donde

$$A_n = \frac{2}{nc\pi}\int_0^L 0 \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \qquad \text{y} \qquad B_n = \frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Calculando B_n tenemos

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{L}\cdot L \int_0^L x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{2}{L}\cdot \int_0^L x^2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\
&= 2\left(-\frac{xL}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L + \frac{L}{n\pi}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right) - \frac{2}{L}\cdot \int_0^L x^2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\
&= 2\left(-\frac{L^2}{n\pi}\cos(n\pi) + 0\right) - \frac{2}{L}\cdot \int_0^L x^2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\
&= \frac{2L^2}{n\pi}(-1)^{n+1} - \frac{2}{L}\left(-\frac{x^2 L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L + \frac{2L}{n\pi}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2L^2}{n\pi}(-1)^{n+1} - \frac{2}{L}\left[-\frac{L^3}{n\pi}(-1)^n + \frac{2L}{n\pi}\left(\frac{xL}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)\right],\\
&= \frac{2L^2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{2L^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\left(\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L\right),\\
&= \frac{4L^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1].
\end{aligned}
$$

De donde la función buscada es

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(\frac{4L^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1]\cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)\right)\right]\\
u(x,t) &= \frac{4L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n - 1]}{n^3}\cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).
\end{aligned}
$$

8. Hallar la función $u(x,t)$, con $x \in [0,L]$ y $t > 0$, que resuelve la ecuación de la onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y satisface las condiciones de frontera:

$$
\begin{cases}
u(0,t) = u(2,t) = 0,\\
u(x,0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\widetilde{A_j}\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{2}\right),\\
u_t(x,0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\widetilde{B_j}\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi x}{2}\right).
\end{cases}
$$

Respuesta: $u(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\left[\frac{2}{nc\pi}\widetilde{B_n}\operatorname{sen}\left(\frac{nc\pi t}{2}\right) + \widetilde{A_n}\cos\left(\frac{nc\pi t}{L}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$

9. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ con $I = [0,L]$ dos funciones y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ donde $\Omega = [0,L] \times [0,+\infty[$, donde $L > 0$. Considere el siguiente problema de valor en la frontera, asociado a la ecuación de la onda unidimensional:

$$
\text{(P1)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \Omega,\\
u(0,t) = a & t \geq 0,\\
u(L,t) = b & t \geq 0,\\
u(x,0) = f(x) & x \in [0,L],\\
\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in [0,L].
\end{cases}
$$

a) **(Examen Remedial, 2018-B)** Demuestre que toda solución u del problema (P1) puede escribirse en la forma:

$$u(x,t) = w(x,t) + a + \frac{b-a}{L}x, \quad (x,t) \in \Omega,$$

donde $w : \Omega \to \mathbb{R}$ es solución del problema (con condiciones de frontera homogéneas):

$$
\text{(P2)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & (x,t) \in \Omega,\\
w(0,t) = w(L,t) = 0 & t \geq 0,\\
w(x,0) = f(x) - a - \dfrac{b-a}{L}x & x \in [0,L],\\
\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = g(x) & x \in [0,L].
\end{cases}
$$

b) Sea $\Omega = [0,\pi] \times [0,+\infty[$. Use el inciso anterior para resolver el siguiente problema de valor en la frontera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \Omega, \\ u(0,t) = -3 & t \geq 0, \\ u(L,t) = 8 & t \geq 0, \\ u(x,0) = \text{sen}(17x) & x \in [0,\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \text{sen}(17x)\cos(17t) - 3 + \dfrac{11}{\pi}x + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2(3+8(-1)^k)}{k\pi}\,\text{sen}(kx)\cos(kt).$

10. El objetivo de este ejercicio es el de resolver la ecuación de la onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

con **condiciones de Neumann** homogéneas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t \geq 0,$$

y con condiciones iniciales:

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L,$$

donde $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ es una función conocida no nula. Nótese que a diferencia del problema usual, las condiciones de frontera se encuentran sobre la derivada parcial $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ en lugar de sobre la función u. Para esto, usaremos el método de separación de variables: Asumiremos que existen funciones $X : [0,L] \to \mathbb{R}$ y $T : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ tales que, para todo (x,t) se cumple que:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

a) Demuestre que existe una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que las funciones X y T son soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias con restricciones:

$$\begin{cases} c^2 X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ X'(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \geq 0, \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Suponiendo que $\lambda = 0$, demuestre que X y T son funciones constantes.

c) Demuestre que no es posible que $\lambda > 0$.

d) Demuestre que si $\lambda < 0$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\lambda = -\frac{c^2 k^2 \pi^2}{L^2} \qquad X(x) = C\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \qquad \text{y} \qquad T(t) = D\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right)$$

para todo $x \in [0,L]$ y $t \geq 0$, donde C y D son constantes.

e) Demuestre que la solución u del problema de Neumann puede escribirse en la forma:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right),$$

donde para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx.$$

f) Use los incisos anteriores para resolver el siguiente problema de Neumann asociado a la ecuación de la onda:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = \cos^3(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Respuesta:

a) Sustituyendo en la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

la solución $u = XT$ se tiene que

$$XT'' = c^2 X'' T,$$

de donde, dividiendo para $u = XT$, se tiene que

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X}.$$

El lado izquierdo de esta igualdad es una función que depende solamente de la variable t, mientras que el derecho depende solamente de la variable x, por ende ambos términos deben ser iguales a una constante $\lambda \in \mathbb{R}$, así

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Ahora, como T no puede ser idénticamente nula, se tiene que $0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t)$, de donde $X'(0) = 0$ y similarmente $X'(L) = 0$. De igual manera se tiene que $T'(0) = 0$. Con esto, se tienen las siguientes EDOs con restricciones:

$$\begin{cases} c^2 X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ X'(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \geq 0, \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Supongamos que $\lambda = 0$. Entonces se tiene que $X'' = 0$ y que $T'' = 0$. De la primera ecuación se tiene que

$$X(x) = c_1 + c_2 x,$$

de donde, $X'(x) = c_2$ y dado que $X'(0) = X'(L) = 0$, se sigue que $c_2 = 0$, por ende $X(x) = c_1$, es decir, X es una función constante. Con el mismo razonamiento se tiene que T es también una función constante.

c) Supongamos que $\lambda > 0$, entonces se tiene que $c^2 X'' - \lambda X = 0$, de donde

$$X(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x},$$

de donde

$$X'(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{c}\left(c_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} - c_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}\right).$$

Dado que $X'(0) = X'(L) = 0$ se tiene que

$$c_1 - c_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad c_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}L} - c_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}L} = 0,$$

lo que implica que $c_1 = c_2 = 0$. Por ende $X = 0$ y así $u = 0$, lo que no es posible ya que f es no nula.

d) Supongamos que $\lambda < 0$. Entonces, la solución general de la EDO $c^2 X'' - \lambda X = 0$ es

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right),$$

de donde
$$X'(x) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{c}\left(-c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right)\right),$$
y como $X'(0) = 0$, se tiene que
$$0 = X'(0) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{c}c_2,$$
con lo cual $c_2 = 0$. Así
$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) \qquad \text{y} \qquad X'(x) = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right).$$
Ahora, necesitamos que $c_1 \neq 0$ en orden de tener $u \neq 0$, por ende, de la condición
$$0 = X'(L) = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L\right),$$
se tiene que $\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L\right) = 0$, lo que sucede solamente si existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que
$$\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L = k\pi,$$
de donde tenemos que, escribiendo $C = c_1$,
$$\lambda = -\frac{c^2k^2\pi^2}{L^2} \qquad \text{y} \qquad X(x) = C\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$
Con este valor de λ, procedemos a resolver la EDO $T'' - \lambda T = 0$ con la condición inicial $T'(0) = 0$. La solución general de esta EDO es
$$T(t) = c_1 \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{ck\pi t}{L}\right),$$
de donde, por la condición $T'(0) = 0$, se tiene que $c_2 = 0$, así, escribiendo $D = c_1$, se tiene que
$$T(t) = D\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right).$$

e) Por los incisos b) y d) se tiene que la solución u se puede escribir en la forma
$$u(x,t) = A + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right).$$
Escribiendo $a_0 = 2A$ y $a_k = A_k$, se tiene que
$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right).$$
Ahora, como $u(x,0) = f(x)$, se tiene que
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$
por ende, los coeficientes a_k son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de coseno de f en el intervalo $[0, L]$, y por ende
$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx.$$

Para calcular los coeficientes de Fourier, considere la siguiente identidad trigonométrica: $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

11. Sean $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$ dos funciones. Considere el siguiente problema de valor en la frontera asociado a la ecuación de la onda:

$$
\text{(P)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}
$$

a) Demuestre que toda solución u de (P) puede escribirse en la forma

$$
u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t), \quad (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[,
$$

donde u_1 y u_2 son soluciones de los problemas

$$
\text{(P1)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[, \\ u_1(0,t) = u_1(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u_1(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}
$$

y

$$
\text{(P2)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[, \\ u_2(0,t) = u_2(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u_2(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}
$$

respectivamente.

b) Use el resultado precedente para resolver el siguiente problema:

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(L-x) & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}
$$

donde

$$
g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, L/3[\cup]2L/3, L], \\ 1 & \text{si } x \in [L/3, 2L/3]. \end{cases}
$$

Respuesta:

$$
\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{2L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left[\frac{2L}{\pi(2k+1)^3} \cos\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \right. \\ & \left. + \frac{\cos((2k+1)\pi/3) - \cos(2(2k+1)\pi/3)}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi t}{L}\right) \right]. \end{aligned}
$$

AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de Carlos Ajila y Leonardo Montoya.

Ejercicios CP: 1, 5, 8

1. El calentamiento de una barra metálica de longitud L está modelado por el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(L-x) & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Determine la temperatura de la barra $u(x,t)$ en todo punto x de la barra y todo instante t.
Respuesta: $u(x,t) = \dfrac{8L^2}{\pi^3} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 t}{c^2 L^2}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{(2n+1)\pi x}{L}\right).$

2. Resuelva el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x & \text{si} \quad \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \operatorname{sen}((2n+1)x).$

3. Considere una varilla metálica de longitud L que ha sido sumergida en agua a una temperatura de 100 grados C, y luego de un tiempo retirada y al tiempo $t = 0$, sus extremos han sido colocados en dos recipientes con hielo a 0 grados C. Encuentre una expresión que describa la conducción de calor que se produce en la varilla.
Respuesta: Si llamamos $u(x,t)$ la distribución de temperatura en la varilla, entonces:

$$u(x,t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - \cos(n\pi))\, e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

4. Resuelva el problema de conducción de calor:

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x)\cos(4x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Respuesta:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(e^{-75t} \operatorname{sen}(5x) + e^{-27t} \operatorname{sen}(3x))$$

5. Resuelva el problema de conducción de calor con extremos aislados (y sin fuentes de calor):

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < L \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Respuesta: Tomando $u(x,t) = X(x)T(t)$ se obtienen las EDO's:

$$X'' - \alpha X = 0 \tag{1}$$

$$T' - \alpha k T = 0 \tag{2}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Resolviendo (1) (para $\alpha < 0$, y con $\alpha = -\gamma^2$) tenemos:

$$X(x) = A\cos(\gamma x) + B\,\text{sen}(\gamma x) \tag{3}$$

de donde A y B se determinan a partir de las condiciones de frontera $u_x(0,t) = 0$, $u_x(L,t) = 0$:

$$u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \qquad X'(0) = 0,$$

$$u_x(L,t) = X'(L)T(t) = 0 \qquad X'(L) = 0.$$

Derivando (3):

$$X'(x) = -A\gamma\,\text{sen}(\gamma x) + B\gamma\cos(\gamma x)$$

y evaluando las condiciones $X'(0) = 0$ y $X'(L) = 0$, tenemos:

$$X'(0) = -B\gamma = 0, \qquad B = 0$$

$$X'(L) = -A\gamma\,\text{sen}(\gamma L) = 0, \qquad \text{sen}(\gamma L) = 0$$

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2...$$

y por tanto,

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

Nota: Es importante remarcar que el número n, en este caso, corre desde cero en lugar que desde 1 (como en algunos problemas de la onda unidimensional), esto es, porque en dichos casos para $n = 0$ la solución asociada a $n = 0$ era $X_{n=0} = 0$. Sin embargo, en este caso para $n = 0$, tenemos $X_0 = 1$.

Resolviendo (2) con $\alpha = -\gamma^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ tenemos:

$$T_n(t) = e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}, \quad n = 0, 1, 2... \tag{5}$$

donde $T_0 \neq 0$, $T_0 = 1$. A partir de (4) y (5), tenemos que:

$$u_n(x,t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}, \quad n = 0, 1, 2...$$

De donde la solución general de nuestro problema se forma de la combinación lineal de estas soluciones, es decir:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}$$

que llamando $c_n = C_n A_n$,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}$$

que también puede ser escrito como:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}$$

de donde,

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad n = 0, 1, 2...$$

y $a_0 = 2c_0$

6. Resuelva el problema de conducción de calor:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < \pi/2 \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi/2, t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi/2. \end{cases}$$

Respuesta:

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}((2n-1)x)$$

7. Resolver el problema de conducción de calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, \quad 0 < x < 1 \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 2 & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Hint: Considere $u(x,t) = w(x,t) + v(x)$.
Respuesta:

$$u(x,t) = 2t + x^2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2\pi^2 t} \cos(n\pi x)\, dx$$

8. En el siguiente problema encuentre la solución $u(x,t)$ de la ecuación de calor unidimensional, la cual satisface las condiciones de frontera e iniciales:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad 0 < x < L \\ u(0,t) = k_0, & t \geq 0, \quad k_0 \in \mathbb{R} \\ u(L,t) = k_1, & t \geq 0, \quad k_1 \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = k_0 + (k_1 - k_0)\dfrac{x}{L} + \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$ con:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \left(g(x) - (k_0 + (k_1 - k_0)\frac{x}{L} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx$$

9. Resuelva el problema del calor:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.
Respuesta: $u(x,t) = \dfrac{2k}{\pi} \left(1 - 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{-\frac{4n^2\pi^2 t}{L^2 c^2}} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right)$.

10. Una barra metálica de 100 centímetros de longitud, con difusividad térmica de 0,01 cm^2/s se calienta de modo tal que su extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de 100 C, mientras que su extremo derecho se mantiene a 0 C. La temperatura en el instante en que la barra empieza a calentarse está dada, para cada punto x de la barra por:

$$f(x) = 100 \cos\left(\frac{\pi x}{200}\right),$$

en donde se considera que x es la distancia, medida en centímetros, desde el extremo izquierdo de la barra. Halle la temperatura de la barra en todo punto y en todo instante de tiempo.
Respuesta: $u(x,t) = 100 - x + \dfrac{200}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)} e^{\frac{-c^2 n^2 \pi^2 t^2}{L^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{100}\right)$.

11. Resuelva el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 6, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 3x^2 & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

   a) Usando el método de separación de variables.

   b) Buscando una solución de la forma $u(x,t) = X(x) + T(t)$.

   c) Las dos soluciones obtenidas, son la misma?

   Respuesta: $u(x,t) = 3x^2 + 6t$.

12. **(Examen 2, 2018-B)** Considere una varilla metálica de longitud $L = \pi$, constante $c = 2$, aislada en sus bordes (es decir, sin flujo de calor en los extremos de la varilla) y cuyo perfil de temperatura al tiempo $t = 0$ está descrito por la función:

$$f(x) = \cos(3x) + \frac{2}{3}\cos(4x) + \frac{3}{5}\cos(5x)$$

   Si $u(x,t)$ es la temperatura de la varilla:

   a) Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.

   b) Utilice el método de separación de variables para determinar las EDO's asociadas. Llame k a la constante arbitraria.

   c) Muestre que para $k = 0$ la solución es constante, que para $k > 0$ la solución es trivial y que para $k < 0$ es no-trivial y para este último caso, encuentre una expresión que describa la temperatura de la varilla $u(x,t)$ para todo $x \in [0,\pi]$ y $t \geq 0$.

   d) Determine explícitamente los coeficientes de la serie infinita que define a $u(x,t)$. (1.5pt)

13. **(Examen Final, 2018-B)** Considere una varilla metálica de longitud $L = 1$, $c = 1$ y cuyos extremos izquierdo y derecho se encuentran (a todo tiempo) a las temperaturas constantes T_1 y T_2, respectivamente. La distribución de temperatura a lo largo de la varilla al tiempo $t = 0$ está descrita por la función:

$$f(x) = \frac{T_2}{L}x + T_1, \qquad 0 \leq x \leq L$$

   Si $u(x,t)$ es la temperatura de la varilla en cualquier punto y para todo tiempo:

   a) Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.

   b) Utilice argumentos físicos para transformar este problema con condiciones de frontera no-homogéneas en uno con condiciones homogéneas. **Hint:** Considere que $u(x,t)$ puede expresarse como la suma de una distribución transiente $w(x,t)$ y una estacionaria $v(x)$, es decir:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \qquad t \geq 0$$

   donde $w(x,t)$ es la solución de un problema con condiciones homogéneas. Determine explícitamente $v(x)$ y plantee la ecuación diferencial y condiciones iniciales y/o de frontera para $w(x,t)$.

   c) Utilice el método de separación de variables para resolver el problema encontrado en el literal anterior y encuentre una expresión para $w(x,t)$ para todo $x \in [0,L]$ y $t \geq 0$.

   d) Determine explícitamente los coeficientes de la serie infinita que define a $w(x,t)$.

   e) Finalmente, construya la solución $u(x,t)$ del problema original. (3pt)

14. **(Examen Remedial, 2018-B)** Las ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a un cierto problema de conducción de calor son:

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0$$

$$T'(t) - 4kT(t) = 0.$$

a) Muestre que para $k = 0$, la solución $u(x,t)$ es constante.

b) Muestre que para $k > 0$, la solución $u(x,t)$ es trivial.

c) Muestre que para $k < 0$, la solución $u(x,t)$ es no-trivial.

EJERCICIOS ADICIONALES

15. Encontrar la solución $u(x,t)$ de la ecuación unidimensional de calor dado las condiciones de frontera e iniciales:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (x,t) \in]0,\pi[\times]0,\infty[\\ u(0,t) = 0 & t \in]0,\infty[\\ u(\pi,t) = 0 & t \in]0,\infty[\\ u(x,0) = f(x) & f(0) = f(\pi) = 0 \end{cases}$$

Respuesta: $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} f(r) \operatorname{sen}(kr)\, dr \right) \operatorname{sen}(kx) e^{-k^2 t}$

AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de Carlos Ajila y Leonardo Montoya.

Ejercicios CP: 1a, 5, (9)

1. Resuelva el siguiente problema de Dirichlet en el rectángulo:

$$(P)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & & 0<x<L_1, \quad 0<y<L_2 \\ u(x,0)=f_1(x), & u(x,L_2)=f_2(x), & 0\leq x\leq L_1, \\ u(0,y)=g_1(y), & u(L_1,y)=g_2(y), & 0\leq y\leq L_2. \end{cases}$$

para cada uno de los siguientes casos:

a) $f_1(x)=f_2(x)=g_2(y)=0$,
b) $f_1(x)=f_2(x)=g_1(y)=0$,
c) $f_2(x)=g_1(y)=g_2(y)=0$,
d) $f_1(x)=g_1(y)=g_2(y)=0$.

Posteriormente construya la solución general del problema (P) la cual está dada por:

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)+u_3(x,y)+u_4(x,y)$$

donde, u_1 es la solución del literal a), u_2 es la solución del literal b), u_3 es la solución del literal c), y u_4 es la solución del literal d).

Respuesta: El procedimiento es similar para todos los literales, consideremos por ejemplo: a) $f_1(x)=f_2(x)=g_2(y)=0$. Consideremos:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

de donde derivando y reemplazando en la EDP, tenemos:

$$X''(x)-kX(x)=0, \tag{1}$$

$$Y''(y)+kY(y)=0, \tag{2}$$

con $k\in\mathbb{R}$. A partir de las condiciones de frontera y como $f_1(x)=f_2(x)=g_2(y)=0$, tenemos que:

$$u(x,0)=X(x)Y(0)=0 \qquad Y(0)=0, \tag{3}$$

$$u(x,L_2)=X(x)Y(L_2)=0 \qquad Y(L_2)=0, \tag{4}$$

$$u(L_1,y)=X(L_1)Y(y)=0 \qquad X(L_1)=0. \tag{5}$$

Con esta información resulta conveniente resolver la ecuación (2). Tomado $k=\gamma^2$, y $Y(y)=e^{my}$, se puede demostrar que la solución de (2) está dada por:

$$Y(y)=A\cos(\gamma y)+B\,\mathrm{sen}(\gamma y) \qquad A,B\in\mathbb{R} \tag{6}$$

en donde, utilizando las condiciones (3) y (4) tenemos:

$$Y(0)=A=0$$

$$Y(L_2)=B\,\mathrm{sen}(\gamma L_2)=0$$

Suponiendo B distinto de cero en la última expresión, entonces

$$\mathrm{sen}(\gamma L_2)=0$$

de donde:

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L_2} \qquad n = 1, 2, ... \tag{7}$$

y por tanto:

$$Y_n(y) = B_n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{L_2} y) \qquad n = 1, 2, ... \tag{8}$$

Por otro lado, debemos también resolver la ecuación:

$$X''(x) - \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 X(x) = 0, \tag{9}$$

cuya solución está dada por:

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi}{L_2} x} + D_n e^{-\frac{n\pi}{L_2} x} \tag{10}$$

de donde resulta complicado obtener un resultado q satisfaga la condición (5), ya que:

$$X_n(L_1) = C_n e^{\frac{n\pi}{L_2} L_1} + D_n e^{-\frac{n\pi}{L_2} L_1} = 0. \tag{11}$$

En estos casos (se puede demostrar) es conveniente tomar una solucón de la forma:

$$X_n(x) = C_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L_2}(x - L1)\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L_2}(x - L1)\right)$$

que con la condición (5): $C_n = 0$ y por tanto:

$$X_n(x) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L_2}(x - L1)\right). \tag{12}$$

(**NOTA:** Se puede tomar una solución de esta forma para en para el litera c), sin embargo, no es la única alternativa. Se recomienda verificar que su solución satisfaga las condiciones iniciales.)

Por tanto, con (8) y (12):

$$u_n(x, y) = D_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L_2}(x - L1)\right) * B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right) \qquad n = 1, 2, ...$$

y por tanto la solución general se forma de la superposici'on de estas soluciones como:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \sinh\left(\frac{n\pi}{L_2}(x - L1)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right). \tag{13}$$

Para determinar los coeficientes C_n^*, utilizamos la condición $u(0, y) = g_1(y)$:

$$u(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \sinh\left(\frac{n\pi}{L_2}(-L1)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right) = g_1(y). \tag{14}$$

de donde (se puede demostrar que):

$$C_n^* = \frac{2}{L_2 \sinh\left(\frac{-n\pi L_1}{L_2}\right)} \int_0^{L_2} g_1(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L_2} y\right) dy.$$

De forma similar para los otros literales.
Finalmente, la solución al problema (P) está dada por:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y).$$

2. Resuelva la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 3, \quad 0 < y < 2 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, & 0 \leq x \leq 3, \\ u(0, y) = 0, \quad u(3, y) = f(y), & 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

con:

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Respuesta:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right), \qquad c_n = \frac{8 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2 \sinh(3n\pi/2)}$$

3. Encuentre una expresión para el potencial en el interior de una lámina metálica rectángular de 20cm de base, y 40cm de altura, en cuyo lado superior se aplica un potencial de 110V y donde los otros lados están conectados a tierra.
Respuesta:

$$u(x,y) = \frac{440}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\sinh(2(2n-1)\pi)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{20}\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi y}{20}\right)$$

4. Encuentre el potencial en el cuadrado $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ en cuyo lado superior se aplica un potencial de $1000 \operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})$ y cuyos otros lados están conectados a tierra.
Respuesta:

$$u(x,y) = \frac{1000}{\sinh(\pi)} \operatorname{sen}(\pi x/2) \operatorname{sen}(\pi y/2)$$

5. Una membrana rectangular de base a y altura b tiene sus bordes inferior y laterales fijos, mientras su borde superior tiene un movimiento (en el eje z), descrito por la función

$$u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right),$$

donde u_0 es una constante. Halle y resuelva el problema de valores de frontera que describe el comportamiento **estacionario** de la membrana.
Respuesta: El movimiento de esta membrana está en realidad descrito por la ecuación de la onda bidimensional:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

sin embargo, el comportamiento **estacionario** (es decir, cuando no cambia tiempo $u_t = 0$) está descrito por la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

con las condiciones:

$$\begin{cases} u(0,y) = 0 & 0 \leq y \leq b, \\ u(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq a, \\ u(a,y) = 0 & 0 \leq y \leq b, \\ u(x,b) = u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Usando el método de separación de variables buscamos soluciones de la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y),$$

por lo tanto la ecuación de Laplace se transforma en

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k,$$

de donde obtenemos el problema para $X(x)$:

$$\begin{cases} X'' - kX = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

y para $Y(y)$:

$$\begin{cases} Y'' + kY = 0 \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

Para $k = 0$, la solución está dada por:

$$X(x) = c_1 x + c_2,$$

que usando las condiciones de frontera se obtiene que:

$$X(0) = 0, \quad c_2 = 0,$$

$$X(a) = c_1 a = 0, \quad c_1 = 0,$$

por tanto, $X(x) = 0$ lo cual implica que $u(x,t) = 0$. Como buscamos soluciones no triviales, descartamos este caso. Ahora, si $k > 0$, con $k = \gamma^2$, tenemos:

$$X(x) = A \operatorname{senh}(\gamma x) + B \cosh(\gamma x),$$

que con las condiciones de frontera, tenemos que:

$$X(0) = 0, \quad B = 0,$$

$$X(a) = A \operatorname{senh}(\gamma a) = 0, \quad A = 0,$$

por lo que de nuevo obtenemos $X(x) = 0$ es decir, $u(x,t) = 0$. Finalmente, para $k < 0$ y con $k = -\gamma^2$, tenemos:

$$X(x) = A \operatorname{sen}(\gamma x) + B \cos(\gamma x),$$

y utilizando las condiciones de frontera:

$$X(0) = 0, \quad B = 0,$$

$$X(a) = A \operatorname{sen}(\gamma a) = 0, \quad \gamma = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

es decir,

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Resolviendo el problema para $Y(y)$ obtenemos:

$$Y(y) = C \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + D \cosh\left(\frac{n\pi}{a} y\right),$$

la condición inicial nos lleva a:

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right).$$

Así, gracias al teorema fundamental de superposición tenemos:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} y\right).$$

De la condición inicial que dicta el movimiento del borde superior de la membrana se obtiene:

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right) = u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right),$$

gracias a la ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$ vemos que a_n debe ser nulo para todo n excepto para $n = 1$, es decir:

$$a_1 = \frac{u_0}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)}$$

por lo tanto la solución al problema es:

$$u(x,y) = \frac{u_0}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a} b\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{a} y\right).$$

6. Encuentre una expresión para la temperatura del estado estable de una lámina rectangular $\pi \times \pi$ cuyos bordes (salvo uno) están aislados, de acuerdo a las siguientes condiciones:

$$u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = u(x,\pi) = 0, \qquad u(x,0) = f(x).$$

Respuesta: $u(x,y) = \dfrac{a_0}{2\pi}(\pi - y) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sen}(n(\pi-y))\cos(nx)}{\sinh(n\pi)}$, con $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.

7. **(Examen 2, 2018-B)** Considere una lámina rectangular metálica de base L y altura M. Los bordes inferior y derecho de la lámina se mantienen a una **temperatura** constante de 0 grados C, el borde superior se mantiene aislado (no hay flujo de temperatura) y la temperatura del borde izquierdo puede ser descrita por la función:

$$f(y) = u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2M}y\right), \qquad 0 \le y \le M, \qquad u_0 \in \mathbb{R}.$$

Si u es la temperatura en el interior de la lámina, determine la temperatura en el **estado estacionario** de la lámina $u(x,y)$. Para esto:

a) Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.

b) Utilice el método de separación de variables para encontrar las EDO's asociadas al problema, y resuélvalas (puede asumir directamente la positividad o negatividad de la constante arbitraria que aparece en ellas). **Hint**: Para la EDO correspondiente a $X(x)$ puede considerarse una solución de la forma $X(x) = C\cosh(\rho z) + D\sinh(\rho x)$. Aplique la respectiva condición inicial y exprese la constante C en función de la otra constante (y de la $\tanh(\rho x)$).

c) Encuentre una expresión que describa la temperatura en el interior de la lámina, para todo $x \in [0,L]$ y $y \in [0,M]$ y determine explícitamente los coeficientes de la serie infinita que define a $u(x,y)$.

8. **(Examen Final, 2018-B)** Considere una lámina rectangular metálica de base B y altura H. Los bordes inferior e izquierdo de la lámina se mantienen a una **temperatura** constante de 0 grados C, el borde superior se mantiene aislado (no hay flujo de temperatura) y la temperatura del borde derecho puede ser descrita por la función:

$$f(y) = a_0 \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{2H}y\right), \qquad 0 \le y \le H, \qquad a_0 \in \mathbb{R}.$$

Si u es la temperatura en el interior de la lámina, determine la temperatura en el **estado estacionario** de la lámina $u(x,y)$. Para esto:

a) Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.

b) Utilice el método de separación de variables para encontrar las EDO's asociadas al problema, y resuélvalas (puede asumir directamente la positividad o negatividad de la constante arbitraria que aparece en ellas).

c) Encuentre una expresión que describa la temperatura en el interior de la lámina, para todo $x \in [0,B]$ y $y \in [0,H]$ y determine explícitamente los coeficientes de la serie infinita que define a $u(x,y)$.

Ejercicios Adicionales

9. Encuentre una expresión para la temperatura acotada de estado estable de la lámina infinita $R =]0,L[\times]0,+\infty[$, tal que los bordes verticales se mantienen a una temperatura de 0 grados y el borde horizontal a una temperatura de 100 grados.

Respuesta: $u(x,y) = \dfrac{400}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{-\frac{(2m+1)\pi y}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{(2m+1)\pi x}{L}\right)$.

10. Resuelva la ecuación de Laplace en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

en el cubo $0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi$, sujeta a las condiciones:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{para } 0 < x, y < \pi$$

y tal que u tome el valor 0 en las caras restantes del cubo.
Respuesta:

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}(\tanh(\pi\sqrt{m^2+n^2})\cosh(\sqrt{m^2+n^2}z) - \sinh(\sqrt{m^2+n^2}z))\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(ny),$$

donde

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^2\tanh(\pi\sqrt{m^2+n^2})}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(ny)\, dxdy.$$

11. **Ecuación de Laplace en el disco.** El objetivo de este ejercicio es el de resolver el problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1, \\ u(x,y) = f(\theta), & x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

donde $x = \cos(\theta)$ y $y = \operatorname{sen}(\theta)$. Para ello, seguimos el siguiente procedimiento:

a) Utilizando la regla de la cadena y el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, demostrar que:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

b) Aplicando el método de separación de variables, suponer que $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ y deducir que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \qquad \text{y} \qquad \Theta'' + \lambda\Theta = 0$$

con condiciones $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$.

c) Demostrar que:

$$\Theta_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\operatorname{sen}(n\theta), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y que además $\lambda = \lambda_n = n^2$ son las soluciones del problema:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0, \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) = 0. \end{cases}$$

d) Resolver la EDO:

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$$

y, vía un argumento de continuidad, deducir que:

$$R_n(r) = r^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

son las soluciones posibles para esta EDO.

e) Demostrar que:

$$u_n(r,\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[A_nr^n\cos(n\theta) + B_nr^n\operatorname{sen}(n\theta)],$$

donde

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)\, ds \qquad \text{y} \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\operatorname{sen}(ns)\, ds$$

f) Demostrar que:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(s(n-\theta))\right] ds.$$

g) Considere $z = r\cos(s-\theta) + ir\operatorname{sen}(s-\theta)$. Use la fórmula de De Moivre y estudie la suma de la serie geométrica:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

para demostrar que:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(s(n-\theta)) = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos(s-\theta)+r^2)}.$$

h) Concluya que:

$$u(r,\theta) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(s)}{(1-2r\cos(s-\theta)+r^2} \, ds$$

es la solución al problema.

Agradecimientos

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de Carlos Ajila y Leonardo Montoya.

HOJA DE EJERCICIOS NO. 11

ECUACIÓN DE LA ONDA (EN DOS DIMENSIONES)

Ejercicios CP: 1, 2a, (5c)

1. **CASO GENERAL:** Resuelva la ecuación de la onda en dos dimensiones:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,y) \in R, \quad t > 0 \\ u(x,y,t)|_{\partial R} = 0, & t \geq 0 \\ u(x,y,0) = f(x,y), \quad u_t(x,y,0) = g(x,y), & (x,y) \in R \end{cases}$$

en un rectángulo R de base b y altura h.

2. Encuentre la deflección $u(x,y,t)$ de una membrana cuadrada de lado π y $c^2 = 1$ para una velocidad inicial 0 y una deflexión inicial:

   a) $f(x,y) = 0{,}1 \operatorname{sen}(4x) \operatorname{sen}(4y)$

   b) $f(x,y) = 0{,}01 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$

   c) $f(x,y) = 0{,}1xy(\pi - x)(\pi - y)$

   Nota: Para el literal c) resuelva completamente el ejercicio paso a paso, para los literales a) y b) utilice los resultados encontrados en el ejercicio 1.

3. Describa la deflección $u(x,y,t)$ de una membrana (elástica, homogénea y flexible) rectangular de base b y altura h cuyos bordes se encuentran fijos, si inicialmente la forma de la membrana puede ser descrita por la función:

$$f(x,y) = xy(x^2-1)(y^2-1)$$

y si la membrana parte del reposo. La tensión de la membrana es constante e igual a 10 y su densidad es 3.

4. Describa la deflección de una membrana de lados a y b y con $c^2 = 1$ para una deflección inicial:

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{b}\right)$$

5. Represente las siguientes funciones por una **Serie de Fourier Doble**:

   a) $f(x,y) = 1$ en $[0,1] \times [0,1]$,

   b) $f(x,y) = x$ en $[0,1] \times [0,1]$,

   c) $f(x,y) = y$ en $[0,1] \times [0,1]$,

   d) $f(x,y) = xy$ en $[0,a] \times [0,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$,

   e) $f(x,y) = xy(a-x)(b-y)$ en $[0,a] \times [0,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$

   Nota: De forma vaga: Si $f(x,y)$ y sus derivadas son continuas en $R = (0,a) \times (0,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$ la representación de $f(x,y)$ por **Series de Fourier Dobles** está dada por:

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

   en donde se deben determinar los coeficientes c_{nm}.

6. **(Examen 2, 2018-B)** Considere una membrana (elástica, homogénea y flexible) rectangular de base L y altura H, fija en sus bordes y de constante $c = 1$. Si se encuentra en reposo en la posición:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

y luego se suelta:

   a) Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.
   b) Utilice el método de separación de variables para determinar las 3 EDO's asociadas al problema y sus respectivas condiciones iniciales.
   c) Determine las tres constantes arbitrarias asociadas a las EDO's del literal b)

7. **(Examen Remedial, 2018-B)** La solución al problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \left(u_{xx} + u_{yy}\right), & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 3, \\ u(x, y, t)|_{\partial R} = 0, & t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = x^2 + y^2, \quad u_t(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in R = (0, 2) \times (0, 3). \end{cases}$$

está dada por:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_{nm} \cos\left(\lambda_{nm} t\right) + B_{nm} \operatorname{sen}\left(\lambda_{nm} t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{3}\right).$$

Determine explícitamente y paso a paso los coeficientes A_{nm} y B_{nm}.