



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES  
HOJA DE EJERCICIOS NO. 1  
FUNCIONES



Semestre 2019-B

Departamento de Formación Básica

Ejercicios CP: 1.a, 1.d, 2, 4, 6, 9, 14.b, 15.a, (16)

FUNCIONES CONTINUAS POR TRAMOS

1. Analizar la continuidad de las siguientes funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -2 + 4k \leq x \leq -1 + 4k \\ a, & \text{si } -1 + 4k < x \leq 1 + 4k \\ 0, & \text{si } 1 + 4k < x \leq 2 + 4k \end{cases}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} x = 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} x = 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} |x| - \lfloor |x| \rfloor, & \text{si } |x| \leq 2, \\ x^2, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

2. Sean  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1 - bx}{x^2 + 1}, & \text{si } x < 1 \\ -2, & \text{si } x = 1 \\ \frac{\text{sen}(a(x-1))}{x^2 - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar los valores de  $a$  y  $b$  para los cuales existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

b) Determinar para que valores de  $a$  y  $b$  la función es continua en 1.

3. (Prueba 1, 2019-A) Sea

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\text{sen}(ax)}{x} & x < 0 \\ x^2 + b & x \geq 0 \end{cases}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Bajo qué condiciones  $g$  es continua en 0? Las condiciones anteriores son suficientes para argumentar que  $f$  sea derivable en 0?

## FUNCIONES PARES E IMPARES

4. Sea  $a > 0$ . Demostrar que todo intervalo de la forma  $[-a, a]$  ó  $]-a, a[$  es un conjunto simétrico. Qué ocurre con los intervalos de la forma  $[-a, a[$  ó  $]-a, a]$ ?
5. Sean  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  dos conjuntos simétricos. Demostrar que  $A \cup B$  y  $A \cap B$  son conjuntos simétricos. Demostrar que  $A^c$  es un conjunto simétrico.
6. De las siguientes funciones, indique cuales son pares:

$$a) f: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2$$

$$b) f: ]-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{sen}(x^2) + x^4$$

$$c) f: ]-a, a[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \operatorname{csc}(x), \quad a > 0$$

$$d) f: [-10, 10] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^{|x|} + e^{-|x|}}{e^{-x^2}}$$

$$e) f: ]-\pi + k\pi, \pi + k\pi[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\operatorname{sen} x)^3 - \cos(x^3)e^{|x|}$$

7. De las siguientes funciones analizar la paridad de cada una:

$$a) \sinh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$b) \cosh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$c) \tanh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

8. Demostrar o refutar los siguientes enunciados:

- a) La suma de dos funciones pares es par.  
 b) La resta de una función impar de una par es una función par.  
 c) El cociente de dos funciones impares es par.

9. Sea  $a > 0$  y  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Demostrar que:

- a) Si  $f$  es una función par, continua en  $[-a, a]$ , entonces:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

- b) Si  $f$  es una función impar, continua en  $[-a, a]$ , entonces:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

10. Si  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $a > 0$  es impar y si  $b \in [-a, a]$ . Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

$$a) \int_{-b}^b f(x) dx = 0.$$

$$b) \int_{-b}^0 f(x) dx = 0.$$

$$c) \int_0^b f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-b}^a f(x) dx.$$

$$d) \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^b f(x) dx.$$

11. Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $a > 0$ . Sean  $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  funciones continuas:

- a) Si  $f_i$  es impar para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  probar que:

$$\int_{-a}^a \sum_{i=1}^n f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{-a}^a f_i(x) dx = 0$$

- b) Si  $f_i$  es par para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  probar que:

$$\int_{-a}^a \sum_{i=1}^n f_i(x) dx = 2 \sum_{i=1}^n \int_0^a f_i(x) dx$$

## FUNCIONES PERIÓDICAS

12. Si la función  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función periódica de periodo  $p > 0$ , mostrar que para todo número entero  $n$  se cumple que:

$$f(x) = f(x + np)$$

para todo  $x \in I$ .

13. Dadas dos funciones  $f$  y  $g$  de  $I \subseteq \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  periódicas de periodo  $p > 0$ . Demostrar que el producto de estas funciones o cualquier combinación lineal de ellas, es también una función periódica de periodo  $p$ .
14. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de periodo  $T$ . Mostrar que las funciones:

$$\begin{array}{lll} a) f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & b) f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & c) f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x+a) & x \mapsto f(xb) & x \mapsto f\left(\frac{x}{c}\right) \end{array}$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ , tienen periodos  $T, \frac{T}{b}$  y  $Tc$  respectivamente.

15. Analizar la periodicidad de las funciones:

$$\begin{array}{ll} a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & b) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(3x) & x \mapsto (\sin(x))^2 \cos^3(x) \end{array}$$

16. (**Prueba 1, 2019-A**) Sean  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones periódicas de periodos  $T_1$  y  $T_2$  respectivamente.

- a) Pruebe que si existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $T_1 = kT_2$ , el periodo de la función:

$$\begin{array}{l} F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f_1(x)f_2(x) \end{array}$$

es  $T_1$ . Del mismo modo, si  $T_2 = kT_1$ , el periodo de  $F$  es  $T_2$ .

- b) Utilizando el resultado anterior, hallar el periodo de la función

$$\begin{array}{l} F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right). \end{array}$$

17. Sea  $f$  una función continua por tramos, periódica de período  $2p$  con  $p \in \mathbb{N}$ . Muestre que:

$$\int_a^{a+2p} f(x) dx = \int_b^{b+2p} f(x) dx.$$

## EJERCICIOS ADICIONALES

18. Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas a trozos en intervalo  $[a, b]$  y suponga que  $f_1$  se identifica con  $f$  y  $g_1$  se identifica con  $g$ . Pruebe que:

$$\int_a^b f_1(x)g_1(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

19. Sea  $f$  una función diferenciable en el intervalo  $[-a, a]$ . Muestre que  $f'$  es impar cuando  $f$  es par e impar cuando  $f$  es par.
20. Demuestre que toda función real  $f$ , definida en un intervalo de la forma  $[-a, a]$  para  $a \in \mathbb{R}$ , puede ser expresada como la suma de una función par y una impar (A cada uno de estos sumandos se los conoce como la *parte par* y la *parte impar* de  $f$ ). **Hint:**  $2f(x) = f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)$ .

21. Analizar si las siguientes funciones son continuas a trozos:

a)

$$f(x) = \begin{cases} -5 - x, & \text{si } x < -\pi, \\ \lfloor \cos x \rfloor, & \text{si } |x| \leq \pi, \\ x^2, & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

b)  $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$  para todo  $x \in \mathbb{R}$

c)  $f(x) = \frac{1}{n+1}$  para  $x \in ]\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

22. Sea  $f$  una función integrable definida en el intervalo  $[-a, a]$  y sea

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \text{si } -a \leq x \leq a.$$

Muestre que  $F$  es impar cuando  $f$  es par y  $F$  es par cuando  $f$  es impar.

23. Halle las partes par e impar de la función definida por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

donde  $a_0, a_k, b_k$  son constantes y  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

## AGRADECIMIENTOS

La presente hoja de ejercicios es una versión re-estructurada de la versión anterior la cual fue propuesta en su totalidad por el matemático Diego Vargas durante el periodo 2019-A, a quien agradecemos su colaboración. A esto se añadió además la sección de ejercicios adicionales los cuales fueron elaborados durante el periodo 2018-B por los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya.



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES  
HOJA DE EJERCICIOS NO. 2  
NÚMEROS COMPLEJOS



Semestre 2019-B

Departamento de Formación Básica

Ejercicios CP: 1.a, 2.a, 4, 5.a, 12, 14, 15, 19, (21)

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

1. Determine la parte real e imaginaria de los números:

$$a) \frac{2 + 5i}{3 + 4i}$$

$$b) \frac{(5 - 3i)(1 + i)}{\bar{z}}, \text{ donde } z = 1 - 2i.$$

**Respuesta:** a)  $\frac{26}{25} + \frac{7}{25}i$ , b)  $\frac{12}{5} - \frac{14}{15}i$ .

2. Demuestre que las siguientes potencias de números complejos son iguales a 1:

$$i^{2344}, \quad i^{-4}.$$

3. Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  dos números complejos de módulo 1. Demuestre que:

$$|z_1 + z_2| = 2 \quad \text{si y solo si} \quad z_1 = z_2.$$

4. Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , con  $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ . Muestre que si  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$  entonces el cociente  $\frac{z_1}{z_2}$  es un imaginario puro, es decir:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z_1}{z_2} \right\} = 0.$$

5. Utilice la fórmula de Moivre para demostrar que:

$$\operatorname{sen}(3x) = 3 \cos^2(x) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3(x).$$

$$\operatorname{cos}(3x) = \operatorname{cos}^3(x) - 3 \operatorname{cos}(x) \operatorname{sen}^2(x).$$

6. Obtenga la forma polar o trigonométrica del número:

$$z = \sqrt{3} + i.$$

**Respuesta:**  $z = 2(\operatorname{cos}(\pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi/6))$ .

7. Verifique que la forma polar del número:

$$z = -4i,$$

está dada por:

$$z = 4 \left( \operatorname{cos} \left( \frac{3\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{2} \right) \right).$$

8. Muestre que:

$$\operatorname{Re} \left( \frac{z}{z+w} \right) + \operatorname{Re} \left( \frac{w}{z+w} \right) = 1$$

para todo  $z, w \in \mathbb{C}$ .

9. Dado el número complejo:

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

- a) Calcule  $z^2$ .
- b) Encuentre las ocho soluciones de la ecuación  $z^8 = 1$ .
- c) Grafique estas soluciones en el plano complejo.

**Respuesta:** Professor Gilbert Strang's Lecture: [Complex Numbers Part Imaginary, but Really Simple](#)

10. Realice las siguientes operaciones con números complejos:

- a) Represente al número  $z = -2 + 3i$  en coordenadas polares.
- b) Represente al número  $z = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$  en coordenadas rectangulares.
- c) Dibuje y etiquete el triángulo que relaciona las coordenadas rectangulares con las polares.
- d) Calcule  $\frac{1}{-2+3i}$  en forma polar.
- e) Encuentre la raíz cúbica de 1.

**Respuesta:** MIT OpenCourseWare: [Complex Numbers and Euler's Formula](#)

11. Dado el número complejo:

$$z = -1 + i/2$$

- a) Encuentre el conjugado  $\bar{z}$ .
- b) Encuentre  $z\bar{z}$ .
- c) Encuentre  $z + \bar{z}$
- d) Grafique cada resultado en el plano complejo.

**Respuesta:** Professor Gilbert Strang's Lecture: [Complex Numbers Part Imaginary, but Really Simple](#)

12. **(Prueba 1, 2019-A)** Realice las siguientes operaciones con números complejos sin utilizar calculadora. **Hint:** La mayoría de los ángulos (y valores de senos y cosenos) pueden obtenerse a partir de un triángulo equilátero de lado  $2\sqrt{3}$ .

- a) Escriba  $z = -3 + \sqrt{3}i$  en coordenadas polares.
- b) Escriba  $w = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  en coordenadas rectangulares
- c) Calcule:  $y = (z\bar{w})\bar{w}$ . Exprese el resultado en coordenadas rectangulares.
- d) Calcule:  $y^8$ . Exprese el resultado en coordenadas rectangulares.

13. Determine el valor aproximado del  $\cos(3i)$  a partir de una función real que pueda evaluarse usando la calculadora. **Hint:** Represente el coseno complejo a través de funciones exponenciales complejas.

**Respuesta:**  $\cos(3i) = \cosh(3) \approx 10,06$ .

14. Calcular  $|z|$ , si:

$$z = \frac{4i}{-3 - 4i}$$

**Respuesta:**  $|z| = \frac{4}{5}$ .

15. Calcule la potencia del siguiente número complejo:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$$

**Respuesta:**  $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \frac{i}{32}$

16. Reduzca la siguiente fracción:

$$\frac{(1-i)^{10}}{(1+i)^3}$$

**Respuesta:**  $\frac{(1-i)^{10}}{(1+i)^3} = 8 - 8i$

17. Dada la función:

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \operatorname{sen}(z)$$

con  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , determinar la parte real y la parte imaginaria de  $f(z)$ .

**Respuesta:**  $\operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{sen}(x) \cosh(y)$  y  $\operatorname{Im}(f(z)) = \cos(x) \sinh(y)$

18. (Prueba 1, 2018-B) Encuentre la parte real e imaginaria del número:

$$\left(\frac{4-4i}{2+2i}\right)^7 + \left(\frac{4+4i}{2-2i}\right)^7.$$

**Respuesta:**  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = 0$ .

19. Hallar las soluciones de la ecuación:

$$x^5 + 1 = 0.$$

**Respuesta:**  $\cos(\pi/5) + i \operatorname{sen}(\pi/5)$ ;  $-\cos(2\pi/5) + i \operatorname{sen}(2\pi/5)$ ;  $-1$ ;  $-\cos(2\pi/5) - i \operatorname{sen}(2\pi/5)$ ;  $\cos(\pi/5) - i \operatorname{sen}(\pi/5)$ .

20. Sea  $z \in \mathbb{C}$ . Probar que  $z \in \mathbb{R}$  si y solo si  $\bar{z} = z$ .

21. Sean  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  dos números complejos en su forma polar. Demostrar que:

$$z_1 + z_2 = r_3 e^{i\theta_3},$$

donde

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

y además

$$\tan(\theta_3) = \frac{r_1 \operatorname{sen}(\theta_1) + r_2 \operatorname{sen}(\theta_2)}{r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2)}.$$

### EJERCICIOS ADICIONALES

22. a) Demuestre que para todo número complejo  $z \neq 1$  y para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  se verifica la identidad

$$\sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

b) Usando el inciso anterior, demuestre la siguiente identidad trigonométrica, válida para  $0 < \theta < 2\pi$  y para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

### AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al aporte de los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya. Para la presente versión se incluyeron los aportes del matemático Diego Vargas, y los ingenieros Edwin Bone y Jéssica Montenegro.



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES  
HOJA DE EJERCICIOS NO. 3  
SUCESIONES Y SERIES



Semestre 2019-B

Departamento de Formación Básica

Ejercicios CP: 1.b, 1.d, 1.g, 2.h, 3.a, 3.c, 6.a, 7, 13, 16, 18, 20, (19.a)

### SUCESIONES INFINITAS

1. Determine la regla que genera las siguientes sucesiones :

a)  $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$       b)  $\{-2, 4, -6, 8, -10, \dots\}$       c)  $\left\{i, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$       d)  $\{i, -1, -i, 1, \dots\}$   
e)  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$       f)  $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{6}{5}, \frac{24}{6}, \dots\right\}$       g)  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{27}{64}, \frac{256}{625}, \dots\right\}$       h)  $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, -\frac{27}{64}, \frac{256}{625}, \dots\right\}$

2. Determine los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

a)  $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$       b)  $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right\}$       c)  $\left\{\frac{n+1}{n^2}\right\}$       d)  $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right\}$   
e)  $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$       f)  $\{2n + (i)^n\}$       g)  $\left\{\frac{i^{2n}}{2}\right\}$       h)  $\left\{\frac{1}{2^n} + i\frac{e^{-n}}{n}\right\}$

3. Determine si las siguientes sucesiones son convergentes:

a)  $\{-2, 4, -6, 8, -10, \dots\}$       b)  $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$       c)  $\left\{\frac{1}{2^n} + i\frac{e^{-n}}{n}\right\}$       d)  $\left\{\frac{3n^2}{10n + 5n^2}\right\}_{n=2}^{\infty}$

4. Determine (gráficamente) si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes:

a)  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \dots\right\}$       b)  $\{1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots\}$

5. Verificar que si la sucesión  $\{x_n\}$  converge hacia límite  $x_n \rightarrow 2$ , entonces la sucesión  $\left\{\frac{2x_n - 1}{3}\right\}$  converge hacia el límite  $\frac{2x_n - 1}{3} \rightarrow 1$ .

6. Determinar si las siguientes sucesiones, son convergentes o divergentes:

a)  $\left\{\frac{(1+i)^n}{n}\right\}$       b)  $\left\{\frac{n}{n+3i} - i\frac{n}{n+1}\right\}$       c)  $\left\{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + i\left(2 + \frac{4}{n}\right)\right\}$

Para el literal c), bosquejar además la sucesión en el plano complejo.

### SERIES INFINITAS

7. Considere la sucesión  $\{x_n\}$  donde  $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ , muestre gráfica y analíticamente que dicha sucesión es convergente. A partir de  $\{x_n\}$  contruya su correspondiente sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}$  donde  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$  y muestre gráficamente que también converge. Finalmente determine el valor de la suma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}, \dots$$



8. Muestre que el  $n$ -ésimo término de la sucesión de sumas parciales asociadas a:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

está dado por:

$$s_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Los elementos de  $\{s_n\}$  se conocen como números triangulares porque pueden ser arreglados como triángulos equiláteros. Muestre este hecho, usando bolitas, para los 4 primeros números triangulares.

9. Determine usando una suma de Cèsaro que la serie de Grandi:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

a pesar de ser divergente (porque la sucesión de sumas parciales no tiende a ningún valor).

10. Determine usando una suma de Abel que la serie :

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = \frac{1}{4}$$

a pesar de ser divergente (porque que la sucesión de sumas parciales no tiende a ningún valor) y a pesar de su suma de Cèsaro tampoco.

11. Considere la serie:

$$\sum_{k=1}^n x^k$$

- Utilice algún lenguaje de programación para graficar las sumas parciales  $s_1(x)$ ,  $s_5(x)$ ,  $s_{10}(x)$  y  $s_{20}(x)$  en el intervalo  $-2 < x < 2$ .
- Qué puede concluir sobre la convergencia de las sumas parciales en este intervalo?
- Qué puede concluir sobre la convergencia en el intervalo  $-1/2 < x < 1/2$ ?

### CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE SERIES

12. Determine si las series que se presentan a continuación son convergentes o divergentes:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n} - 1)^n$$

$$d) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\log(k)}$$

$$e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$$

$$f) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + 5i)^n}{n!}$$

$$i) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-5)^{1+2n}}{2^{5n-3}}$$

**Respuesta:** g) [Como saber si una serie converge: Prueba del Cociente](#)

13. **(Prueba 1, 2019-A)** Determine si las series que se presentan a continuación son convergentes o divergentes:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 k^{n/2}}{(k+1)^n} \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n 4^{2n+1}}.$$

14. Demuestre que para  $a = e$ , la serie:

$$\sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m!} \left(\frac{m}{a}\right)^m$$

es divergente.

15. Estudie la convergencia de cada una de las siguientes series. Si la serie es convergente, calcule su suma.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)}.$$

$$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log((1+1/n)^n(1+n))}{\log(n^n)\log((n+1)^{n+1})},$$

donde  $\log$  es la función logaritmo natural.

**Respuesta:** a) Convergente, serie telescópica y geométrica de suma  $S = 1$ . b) Convergente, serie telescópica de suma  $S = \frac{1}{2\log(2)}$ .

16. (Prueba 1, 2018-B) Determine si la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 3n + 2}$$

es convergente o divergente y si converge calcule su suma.

**Respuesta:** a) Serie convergente (telescópica) de suma  $S = 1$ .

17. Pruebe que siguiente serie es geométrica, convergente y calcule su suma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

18. Demuestre que la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$$

es geométrica y calcule su suma.

### SERIES DE TAYLOR Y McLAURIN

19. Determine la expansión de McLaurin de las siguientes funciones:

$$a) \begin{array}{l} \text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{sen}(x) \end{array}$$

$$b) \begin{array}{l} \text{cos} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \text{cos}(x) \end{array}$$

$$c) \begin{array}{l} e^z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto e^z \end{array}$$

y a partir de ellas verifique la fórmula de Euler, es decir, que para todo  $y \in \mathbb{R}$  se satisface la relación:  $e^{iy} = \cos(y) + i \text{sen}(y)$ .

20. Asuma que la siguiente expresión es verdadera:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 2\pi,$$

(en el próximo capítulo, sobre series de Fourier, demostraremos esta expresión y que la serie anterior puede integrarse término a término) y demuestre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

21. Verifique los siguientes desarrollos en serie de Taylor alrededor del punto  $x_0 = 0$ , para los valores de  $x$  indicados:

$$a) \text{sen}^3(x) = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

$$b) \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ para } |x| < 1; \text{ y}$$

$$c) \frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-2)^n] x^n, \text{ para } |x| < 1/2.$$

Para ello, puede asumir conocidos los desarrollos en serie de Taylor de  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$  y  $\log(1-x)$  y  $1/(1-x)$  si  $|x| < 1$ . **Hint:** Para el literal a), utilice la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}(3x) = 3 \text{sen}(x) - 4 \text{sen}^3(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Para el literal c), descomponga el término de la izquierda en fracciones parciales.

### EJERCICIOS ADICIONALES

22. Las siguientes sucesiones definidas mediante su enésimo término  $x_n$  como:

$$a) \ x_n = \frac{1}{n} \qquad b) \ x_n = \frac{n+1}{n} \qquad c) \ x_n = \frac{2n}{n^3+1}$$

son todas convergentes y de límite  $L$ . Por tanto, para cada número  $\epsilon$  positivo (fijo), existe otro número  $N \in \mathbb{Z}^+$ , tal que:  $|x_n - L| < \epsilon$ , si  $n \geq N$  con  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Determinar en cada caso el valor de  $N$  que corresponde a los siguientes valores de  $\epsilon$ :  $\epsilon = 1; 0,1; 0,01$ .

23. Sea  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente y acotada. Para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  se define

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{y} \quad t_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

a) Demostrar que, para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$s_n \leq \int_0^1 f(x) dx \leq t_n \quad \text{y} \quad 0 \leq \int_0^1 f(x) dx - s_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

b) Demuestre que las sucesiones  $(s_n)$  y  $(t_n)$  ambas convergen y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \int_0^1 f(x) dx.$$

24. Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales no negativos. Utilice el criterio de comparación para mostrar que:

a) Si  $\sum a_n$  converge, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$  converge.

b) Si  $\sum a_n$  diverge, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  también diverge.

25. Determine si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - e^{-n^2} \right)$$

**Respuesta:** Serie convergente. **Hint:** Utilice el criterio de la integral.

26. a) Para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  y cada  $x \in \mathbb{R}$ , se define

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}.$$

Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

b) Para cada  $n \in \mathbb{N}^*$  y cada  $x \in \mathbb{R}$ , se define

$$f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}.$$

Demuestre que existe

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , que  $f_n$  y  $f$  son derivables en 0 para todo  $n \in \mathbb{N}^*$  y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) \neq f'(0).$$

c) Qué conclusión puede obtener de los dos incisos anteriores?

### **AGRADECIMIENTOS**

La sección de ejercicios adicionales fue elaborada por los matemáticos Carlos Ajila, Leonardo Montoya (durante el periodo 2018-A) y Diego Vargas (durante el periodo 2019-A).



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES  
HOJA DE EJERCICIOS NO. 4  
SERIES DE FOURIER



Semestre 2019-B

Departamento de Formación Básica

Ejercicios CP: 3, 4, 10, 13, 16, 18, 19

ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES

1. Las funciones  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = \cos(m\pi x/L)$  y  $g(x) = \cos(n\pi x/L)$  constituyen una familia de funciones mutuamente ortogonales sobre el intervalo  $I = [-L, L]$ . Verificar (por integración directa) las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n; \end{cases}$$
$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \text{para todo } m, n;$$
$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

2. Determine en cuales de los siguientes casos es posible utilizar las relaciones trigonométricas del ejercicio 1 y para dichos casos determine el valor de la integral.

a)  $\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right) dx$       b)  $\int_{-3}^3 \cos\left(\frac{2\pi x}{3}\right) \cos\left(\frac{5\pi x}{3}\right) dx$

c)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \sin(5x) dx$       d)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) \sin(2x) dx$

e)  $\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(2x) \sin(4x) dx$       f)  $\int_{-1/2}^{1/2} \sin(2x) \sin(4x) dx$

g)  $\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(2x) \cos(4x) dx$       h)  $\int_{-1}^1 \sin(3\pi x) \cos(5\pi x) dx$

3. Sea  $f: [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua por partes y periódica con periodo  $p = 2L$  tal que puede representarse por la serie infinita:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L, \quad (1)$$

Utilice el sistema trigonométrico del ejercicio 1. en la ecuación (1) para demostrar que los coeficientes de Fourier  $a_0$ ,  $a_m$  y  $b_m$  están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

## SERIES DE FOURIER

4. (Prueba 1, 2019-A) Considere la función  $f: ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{si } \pi < x < 2\pi. \end{cases} \quad (2)$$

- a) Esboce (grafique) dicha función y su extensión periódica. Cuál es el periodo de esta función?  
 b) Redefina  $f$  de tal forma que la función resultante sea una **función par** en el intervalo  $] - 2\pi, 2\pi[$  y llame a esta "extensión par de  $f$ " por  $F$ .

**Hint:** Parta del gráfico de la función original  $f: ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  y "complete el gráfico" reflejando la función con respecto al eje  $y$ . Halle la ecuación de cada una de las curvas en ese gráfico y defina la función  $F$  para cada uno de esos intervalos, es decir para:  $] - 2\pi, -\pi[$ ,  $] - \pi, 0[$ ,  $]0, \pi[$  y  $] \pi, 2\pi[$ . El resultado debe presentarse como la ecuación (2). Alternativamente, esto también puede hacerse utilizando la definición de función par.

- c) Esboce la función  $F$  y su extensión periódica. Cuál es el periodo de esta función?  
 d) Determine las integrales que permitan determinar los coeficientes  $a_0$ ,  $a_m$  y  $b_m$  de la expansión en series de Fourier de  $F$ . **Importante:** Solo plantee las integrales y no las resuelva. La respuesta debe ser expresada por ejemplo como:  $b_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 x^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx$ . No olvide analizar la paridad de las funciones dentro de la integral.  
 e) Redefina  $f$  de tal forma que la función resultante sea una **función impar** en el intervalo  $] - 2\pi, 2\pi[$  y llame a esta "extensión impar de  $f$ " por  $G$ .  
 f) Esboce la función  $G$  y su extensión periódica. Cuál es el periodo de esta función?  
 g) Determine las integrales que permitan determinar los coeficientes  $a_0$ ,  $a_m$  y  $b_m$  de la expansión en series de Fourier de  $G$ .  
 No analice que ocurre en  $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

5. Dada la función  $f: [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = x$ , determine la descomposición en series de Fourier de a) la función  $f$  y además de:

b) La **extensión impar** de  $f$ , dada por:

$$f_{\text{impar}}: ] - 2\pi, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x$$

c) La **extensión par** de  $f$ , dada por:

$$f_{\text{par}}: ] - 2\pi, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x|$$

Esboce en todos los casos la función y su respectiva extensión periódica.

6. Dada la función:

$$f: (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{ax}$$

con  $a \neq 0$ , determine la expansión en series de Fourier de la función  $f$  y de las extensiones pares e impares de la función  $f$  restringida al intervalo  $(0, \pi)$ , es decir,  $f|_{(0, \pi)}$ . Analice los casos i)  $a > 0$  y ii)  $a < 0$ . **Observación:** Si por facilidad llamamos  $g = f|_{(0, \pi)}$ , la función  $g$  está definida simplemente como:

$$g: (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{ax}$$

7. Determine la representación en series de Fourier de:

a) La función:  $f: [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{\pi - x}{2}$

b) La extensión impar de  $f$ .

c) La extensión par de  $f$ .

8. Dada la función  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f(x) = 1$ :

a) Determine la expansión en series de Fourier de  $f$ .

b) Descomponer  $f$  en una serie de (Fourier en términos de) senos.

c) Descomponer  $f$  en una serie de (Fourier de) cosenos.

9. Descomponer en una serie de Fourier de cosenos la función  $f : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq h \\ 0 & \text{si } h < x < \pi, \end{cases}$$

donde  $0 < h < \pi$ .

10. (Examen Remedial, 2018-B) Considere la función  $f$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ -\sqrt{2-x}, & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$

y que se muestra en la figura. Determine los **coeficientes**  $a_0$ ,  $a_m$  y  $b_m$  de la representación en Series de Fourier de la extensión periódica de:

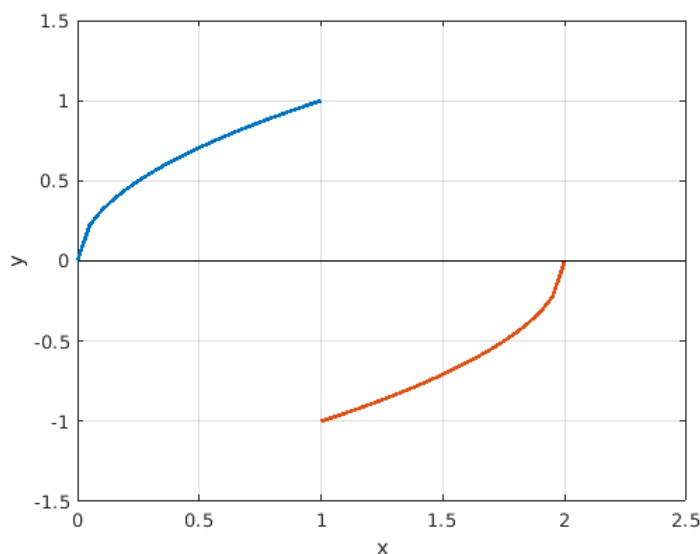
a) La función  $f$  utilizando CAMBIO DE INTERVALO.

b) La EXTESIÓN PAR de  $f$ .

c) La EXTESIÓN IMPAR de  $f$ .

d) La serie de Fourier de COSENOS de  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

En cada caso **esboce** la (extensión periódica de la) función y determine su **período**. **Importante:** Plantee las integrales asociadas a cada problema y no las resuelva.



11. (Examen 1, 2019-A) Considere la función  $f: ]4\pi, 10\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 2\pi, & \text{si } 4\pi < x < 8\pi, \\ 10\pi - x, & \text{si } 8\pi < x < 10\pi. \end{cases}$$

y tal que  $f(x) = f(x + 6\pi)$ . Plantee las integrales que permitan determinar los coeficientes  $a_0$ ,  $a_m$  y  $b_m$  de la **representación en Series de Fourier** de:

- La función  $f$  (en el intervalo donde está definida, es decir, en  $]4\pi, 10\pi[$ ).
- La **EXTENSIÓN IMPAR** de la función  $g$  donde  $g = F|_{]0, 4\pi[}$ , y  $F$  es la extensión periódica de  $f$ .  
**Hint:** La notación  $F|_{]0, 4\pi[}$  se refiere a la "parte" de  $F$  que está definida en el intervalo  $]0, 4\pi[$ .
- Proponga, a partir de  $F$ , una forma alternativa de determinar los coeficientes de Fourier diferente a la realizada en el literal a) y plantee las integrales que permitirían su determinación.

**IMPORTANTE:** Para todos los literales, únicamente plantee las integrales y **no las resuelva**. Las funciones deben estar definidas explícitamente (como lo está  $f(x)$ ).

12. (Prueba 1, 2018-B) En cada uno de los siguientes casos, la serie de Fourier correspondiente converge hacia  $f(x)$  en todos los puntos en donde la función  $f$  es continua. Realice el gráfico para cada caso y determine:

- La **serie de Fourier de senos** de la función:

$$\begin{aligned} f: ]0, \pi[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \cos(x). \end{aligned}$$

- La **serie de Fourier de cosenos** de la función:

$$\begin{aligned} f: ]0, \pi[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = |\cos(x)|. \end{aligned}$$

13. (Prueba 1, Examen 1, 2018-B) Encuentre la expansión en series de Fourier de la función que se muestra en la figura 1:

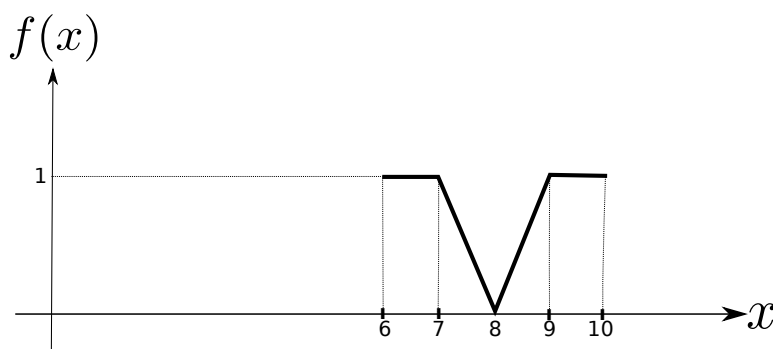
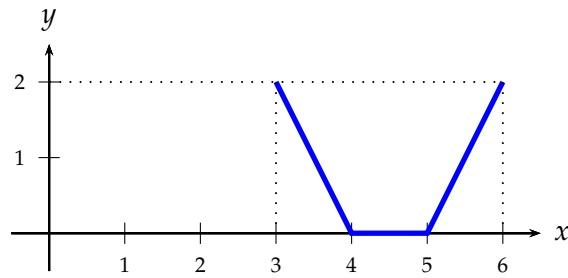


Figura 1: Ejercicio 13

Utilice:  $\int x \cos(kx) dx = \frac{x \operatorname{sen}(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} + C$ , donde  $k, C \in \mathbb{R}$



14. (Examen Final, 2018-B) Hallar el desarrollo en series de Fourier de la función que se muestra en la figura:



15. (Examen Remedial, 2018-B) Los coeficientes de la Serie de Fourier de la función  $f$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -L < x < 0, \\ L, & \text{si } 0 < x < L \end{cases}$$

son:

$$a_0 = L, \quad a_m = 0 \quad b_m = \begin{cases} 0, & \text{si } m \text{ par,} \\ \frac{2L}{m\pi}, & \text{si } m \text{ impar.} \end{cases}$$

Determine una aproximación para la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi}{L} x$$

16. (Examen 1, 2019-A) Muestre que:

$$\frac{3}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^m - 1}{m^2 \pi^2} \cos(m\pi x) - \frac{1}{m\pi} \operatorname{sen}(m\pi x) \right] = \begin{cases} 1, & \text{si } -1 < x < 0, \\ x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Hint:** Intuya sobre la función para la cual esta serie representa su Serie de Fourier y determine dicha serie. Utilice además el teorema de convergencia (de las Series de Fourier) para determinar el valor para  $x = 0$ .

17. En este ejercicio probaremos la convergencia y hallaremos la suma de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

- a) Encuentre la expansión en series de Fourier de la función:

$$f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2.$$

- b) Redefina la función  $f$  de tal manera que sea periódica con período 2.  
 c) Utilice el teorema de convergencia de series de Fourier para calcular el valor al que converge la serie para  $x = 0$ .

- d) Determine el valor de la suma:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

18. (Examen 1, 2018-B) A partir del desarrollo en series de Fourier de cosenos de la función  $f$  definida por:

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2,$$

calcule la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

**Hint:** Halle el desarrollo en series de Fourier de cosenos de  $f$  (es decir, de la extensión par de  $f$ ), y luego evalúe  $f(x=0)$ .

19. (Examen Final, 2019-A)

a) Encuentre el desarrollo en series de Fourier de la función  $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $f(x) = x^2$  y a partir de este resultado muestre que:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Desarrolle en una serie de Fourier adecuada la (extensión periódica de la) función  $f$  donde:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|x|, & -2 < x < 2 \\ 0, & 2 \leq x < 6. \end{cases}$$

### EJERCICIOS ADICIONALES

20. Sea  $p \in \mathbb{N}$ , pruebe que las funciones:

$$1, \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \dots$$

son ortogonales en el intervalo  $[-p, p]$ .

21. Sea  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  una función par continua a trozos con desarrollo en serie de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)].$$

Asuma que:

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0, \quad 0 < \pi < x.$$

y demuestre que:

$$a_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Encuentre además una expresión para  $a_{2k+1}$ , con  $k = 0, 2, \dots$

22. Sea  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos con desarrollo en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)], \quad -\pi < x < \pi.$$

Demuestre que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Esta igualdad se conoce como la *identidad de Parseval*.

23. Sea  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua a trozos. Demuestre que las sucesiones  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$ , que aparecen en el desarrollo en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)], \quad -\pi < x < \pi,$$

ambas convergen hacia 0.

#### **AGRADECIMIENTOS**

Los ejercicios adicionales de la presente hoja fueron elaborados por los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya durante el periodo 2018-B.



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**  
**ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES**  
**HOJA DE EJERCICIOS NO. 5**  
**INTEGRALES DE FOURIER**



Semestre 2019-B

Departamento de Formación Básica

**Ejercicios CP: 1.a, 5, 7, 10, (12)**

1. Dada la función  $f$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 2, \\ 0, & \text{si } x > 2, \end{cases}$$

determine:

- a) La representación en integrales de Fourier de  $f$ .
- b) La representación en integrales de Fourier seno de  $f$ .
- c) La representación en integrales de Fourier coseno de  $f$ .
- d) Utilice alguna de las representaciones anteriores para estimar la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{2 \operatorname{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right) \cos(wx) dw$$

**Respuesta:**

- a) La representación en integrales de Fourier de la función está dada por:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)] dw$$

de donde:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv) dv$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv) dv$$

por tanto, la función  $A(w)$  se determina por:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(v) \cos(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 v \cos(wv) dv$$

de donde la integral es igual a:

$$\int_0^2 x \cos(wx) dx = \frac{\cos(wx)}{w^2} \Big|_0^2 + x \frac{\operatorname{sen}(wx)}{w} \Big|_0^2 = \frac{2 \operatorname{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \quad (1)$$

Finalmente,

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2 \operatorname{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right].$$

Por otro lado  $B(w)$  se determina por:

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(v) \operatorname{sen}(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_0^2 v \operatorname{sen}(wv) dv$$

de donde la integral es igual a:

$$\int_0^2 x \operatorname{sen}(wx) dx = \frac{\operatorname{sen}(wx)}{w^2} \Big|_0^2 - \frac{x \cos(wx)}{w} \Big|_0^2 = \frac{\operatorname{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2 \cos(2w)}{w} \quad (2)$$

Finalmente,

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\text{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2 \cos(2w)}{w} \right].$$

Por tanto, la representación en integrales de Fourier de  $f(x)$  está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{2 \text{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right) \cos(wx) + \left( \frac{\text{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2 \cos(2w)}{w} \right) \text{sen}(wx) \right] dw.$$

- b) Determinar la representación en integrales de Fourier seno de  $f$  significa (en este caso, dado que  $f$  no es impar) obtener la representación en integrales de Fourier de la extensión impar de  $f$ , la cual está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{si } -2 < x < 2, \\ 0, & \text{si } |x| > 2, \end{cases}$$

Como  $F(v)$  es impar y  $\cos(wv)$  es par en el intervalo  $] -2, 2[$ , entonces:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \cos(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 F(v) \cos(wv) dv = 0.$$

Por otro lado,

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v) \text{sen}(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 F(v) \text{sen}(wv) dv.$$

como  $F(v)$  y  $\text{sen}(wv)$  son impares,

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 F(v) \text{sen}(wv) dv = \frac{2}{\pi} \int_0^2 F(v) \text{sen}(wv) dv = \frac{2}{\pi} \int_0^2 v \text{sen}(wv) dv.$$

En donde podemos utilizar el resultado obtenido en el literal anterior para la integral (2) es decir:

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^2 v \text{sen}(wv) dv = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\text{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2 \cos(2w)}{w} \right)$$

Finalmente,

$$F(x) = \int_0^{\infty} B(w) \text{sen}(wx) dw$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\text{sen}(2w)}{w^2} - \frac{2 \cos(2w)}{w} \right) \text{sen}(wx) dw$$

- c) Determinar la representación en integrales de Fourier coseno de  $f$  significa (en este caso, ya que  $f$  no es par) obtener la representación en integrales de Fourier de la extensión par de  $f$  dada por:

$$G(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 2, \\ -x, & \text{si } -2 < x < 0, \\ 0, & \text{si } |x| > 2, \end{cases}$$

Como  $G(v)$  es par y  $\text{sen}(wv)$  es impar en el intervalo  $] -2, 2[$ , entonces:

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \text{sen}(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 G(v) \text{sen}(wv) dv = 0.$$

Además como  $G(v)$  y  $\cos(wv)$  son pares

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \cos(wv) dv = \frac{1}{\pi} \int_{-2}^2 G(v) \cos(wv) dv = \frac{2}{\pi} \int_0^2 G(v) \cos(wv) dv.$$

de donde,

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^2 G(v) \cos(wv) dv = \frac{2}{\pi} \int_0^2 v \cos(wv) dv.$$

En donde podemos utilizar el resultado obtenido en el literal anterior para la integral (1) es decir:

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^2 v \cos(wv) dv = \frac{2}{\pi} \left( \frac{2 \operatorname{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right)$$

Finalmente,

$$G(x) = \int_0^\infty A(w) \cos(wx) dw$$

$$G(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{2 \operatorname{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right) \cos(wx) dw$$

d) La integral impropia

$$\int_0^\infty \left( \frac{2 \operatorname{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right) \cos(wx) dw$$

puede estimarse a partir de la representación en integrales de Fourier de  $G(x)$  obtenida en el último literal. Por el teorema de convergencia y existencia de la integral de Fourier, la integral va a converger a  $x$  en  $(0, 2)$ , a  $\frac{G(2^+) + G(2^-)}{2}$  en  $x = 2$  y a 0 para  $x > 2$  entonces,

$$\int_0^\infty \left( \frac{2 \operatorname{sen}(2w)}{w} + \frac{\cos(2w) - 1}{w^2} \right) \cos(wx) dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & \text{si } 0 < x < 2, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 2, \\ 0, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

2. Determine la representación en integrales de Fourier de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x > 0, \\ e^x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0, \\ e^{-x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

**Respuesta:**

a)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left( \frac{\cos(wx)}{1+w^2} + \frac{w \operatorname{sen}(wx)}{1+w^2} \right) dw = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(wx)}{1+w^2} dw = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. Utilice la representación en integrales de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

para estimar las integrales impropias:

$$a) \int_0^\infty \frac{\cos(3x) + x \operatorname{sen}(3x)}{1+x^2} dx$$

$$b) \int_0^\infty \frac{\cos(5x) - x \operatorname{sen}(5x)}{1+x^2} dx$$

**Respuesta:** a) Evaluando  $x = 3$  en la representación en integrales de Fourier de  $f(x)$ , tenemos:

$$f(3) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\cos(3w)}{1+w^2} + \frac{w \operatorname{sen}(3w)}{1+w^2} \right) dw$$

de donde, como  $f(3) = e^{-3}$ , tenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3w) + w \operatorname{sen}(3w)}{1+w^2} dw = \pi e^{-3}.$$

Haciendo el cambio de variable  $w \rightarrow x$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x) + x \operatorname{sen}(3x)}{1+x^2} dx = \pi e^{-3}.$$

4. **(Examen Remedial, 2018-B)** Determine la representación en Integrales de Fourier de:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| > 1, \\ 1, & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

y a partir de ella encuentre una estimación para:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wx) \operatorname{sen}(w)}{w} dw.$$

5. Demostrar que:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(w)}{w} \cos(wx) dw = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x = 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

6. Demuestre la siguiente identidad:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi w) \operatorname{sen}(wx)}{1-w^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

7. **(Examen 1, 2018-B)** Determine la representación en integral de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\infty < x \leq -\pi, \\ -1, & \text{si } -\pi < x \leq 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{si } \pi < x \leq \infty, \end{cases}$$

y a partir de esta, evalúe la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(w\pi)}{w} \operatorname{sen}(wx) dw.$$

8. **(Examen 1, 2018-B)** Utilice la representación en integral de Fourier de senos de la función:

$$f(x) = e^{-x} \operatorname{sen}(x), \quad x > 0$$

para evaluar la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} \frac{w \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}w)}{w^4 + 4} dw.$$

9. Represente mediante una integral de Fourier del tipo:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A(w) \cos(wx) dw$$

la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 2 - x, & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

10. a) **(Examen 1, 2019-A)** Utilizando las representación en serie de Fourier de coseno y seno de la función  $f(x) = e^{-kx}$ , con  $x > 0$  y  $k > 0$ , demuestre que:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wx)}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} \frac{w \operatorname{sen}(wx)}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx}, \quad x > 0, \quad k > 0.$$

Estas integrales se conocen como *integrales de Laplace*.

- b) Usando el inciso anterior, encuentre la representación de la función  $f(x) = 1/(1 + x^2)$ , definida para  $x > 0$ , en serie de Fourier de coseno.
11. El objetivo de este ejercicio es calcular el valor de la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^3 \operatorname{sen}(t)}{t^4 + 4} dt.$$

Para ello, realice lo siguiente:

- a) Considere la función  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida para cada  $x > 0$  por:

$$f(x) = e^{-x} \cos(x).$$

Demuestre que la extensión impar de  $f$  es absolutamente integrable, continua por tramos en cada intervalo acotado y que admite derivadas laterales en cada punto.

- b) Del inciso anterior concluya que  $f$  puede ser representada por una integral de Fourier de senos y determine dicha representación.
- c) Finalmente utilice el resultado del literal anterior para calcular el valor de la integral buscada.

**Respuesta:** a)  $f$  es claramente continua y derivable, además se tiene que, para  $x > 0$ ,

$$f'(x) = -e^{-x}(\cos(x) + \operatorname{sen}(x)),$$

de donde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1.$$

Así, la extensión impar de  $f$  es continua por tramos en cada intervalo acotado y admite derivadas laterales en cada punto. Para ver que esta es absolutamente integrable, basta analizar su integrabilidad en  $]0, +\infty[$ :

$$|f(x)| = |e^{-x} \cos(x)| \leq e^{-x},$$

y dado que la función  $e^{-x}$  es de tipo Riemann impropriamente integrable en  $]0, +\infty[$ , se tiene lo deseado.

b) Por el teorema de existencia de la integral de Fourier, se concluye que la extensión impar de  $f$  admite una representación como integral de Fourier y como es impar,  $f$  admite una representación como integral de Fourier de senos.

12. **(Examen 1, 2019-A)** Muestre que:

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sen}(w)}{w^2} + \frac{\cos(w)}{w} - \frac{2 \cos(2w)}{w} \right) \operatorname{sen}(wx) dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} x, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \alpha_1, & \text{si } x = 1, \\ \pi, & \text{si } 1 < x < 2, \\ \alpha_2, & \text{si } x = 2, \\ 0, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



donde  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Determine los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  utilizando el teorema de convergencia y existencia de las integrales de Fourier.

13. (Examen Final, 2019-A) Dada la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde:

$$f(x) = xe^{-|x|}$$

- Determine la paridad de la función  $f$  (a partir de la definición de función par o impar).
- Determine los coeficientes  $A(w)$  y  $B(w)$  del desarrollo en integrales de Fourier de  $f$ . **Hint:** Resuelva las integrales resultantes para  $A(w)$  y  $B(w)$  por partes, tomando  $u = x$  y  $dv = e^{-x} \sin(wx)$ .
- Encuentra la representación en Integrales de Fourier de  $f$  y utilice dicho resultado para estimar la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(\pi x)}{(1+x^2)^2} dx.$$

### EJERCICIOS ADICIONALES

14. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función par con representación en integral de Fourier de coseno:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos(wx) dw, \quad \text{donde} \quad A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos(wv) dv.$$

- Demuestre que, para todo  $a > 0$  y para todo  $x > 0$ , se verifica la *identidad de cambio de escala*:

$$f(ax) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} A\left(\frac{w}{a}\right) \cos(wx) dw.$$

- Demuestre que para todo  $x > 0$  se verifica

$$xf(x) = - \int_0^{\infty} A'(w) \operatorname{sen}(wx) dw,$$

donde  $A'$  es la primera derivada de la función  $A$ .

- Demuestre que para todo  $x > 0$  se verifica

$$x^2 f(x) = - \int_0^{\infty} A''(w) \cos(wx) dw,$$

donde  $A''$  es la segunda derivada de la función  $A$ .

- Proponga fórmulas similares para la representación en integrales de Fourier de senos de una función impar  $f$  y demuéstrelas.

15. Considere las funciones  $f: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

- Represente a  $f$  mediante una integral de Fourier de cosenos.
- Sin calcular ninguna integral, y utilizando la representación de  $f$  anterior, encuentre la representación de  $g$  como integral de Fourier de cosenos. **Hint:** Utilice las propiedades demostradas en el ejercicio 14.
- Compruebe el resultado anterior calculando la representación en integral de Fourier de cosenos de la función  $g$ .

16. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función absolutamente integrable, derivable con continuidad, con representación como integral de Fourier:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)] dw, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Si  $f'$  también admite una representación como integral de Fourier, demuestre que:

$$f'(x) = \int_0^{\infty} w[B(w) \cos(wx) - A(w) \operatorname{sen}(wx)] dw.$$

b) Asuma que  $f$  es dos veces derivable con continuidad y que  $f''$  admite una representación como integral de Fourier, demuestre que

$$f''(x) = - \int_0^{\infty} w^2[A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)] dw$$

### **AGRADECIMIENTOS**

Los ejercicios adicionales de la presente hoja fueron elaborados por los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya durante el periodo 2018-B.



**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**  
**ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES**  
**HOJA DE EJERCICIOS NO. 6**  
**TRANSFORMADA DE FOURIER**



Semestre 2019-B

Departamento de Formación Básica

**Ejercicios CP: 1, 2.a, 2.d, 6 // 7, 12, (13)**

1. Determinar la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 < t < 0, \\ 1, & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{si } |t| > 1. \end{cases}$$

**Respuesta:** A partir de la definición de transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \\ \mathcal{F}(f(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{-1} f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{-1}^0 f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_1^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right], \\ \mathcal{F}(f(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{-1} (0)e^{-i\omega t} dt + \int_{-1}^0 (-1)e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 (1)e^{-i\omega t} dt + \int_1^{\infty} (0)e^{-i\omega t} dt \right], \\ \mathcal{F}(f(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ - \int_{-1}^0 e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 e^{-i\omega t} dt \right], \\ \mathcal{F}(f(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ - \frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)} \Big|_{-1}^0 + \frac{e^{-i\omega t}}{(-i\omega)} \Big|_0^1 \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \frac{\cos \omega - 1}{\omega}. \end{aligned}$$

2. Determinar la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

$$a) \begin{matrix} f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t \end{matrix} \qquad b) f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| < a, \\ 0, & \text{si } |t| > a. \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } |x| < a, \\ 0, & \text{si } |x| > a. \end{cases} \quad a \in \mathbb{R} \qquad d) f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ e^{-ax}, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad a > 0.$$

**Respuesta:** a) A partir de la definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 te^{-i\omega t} dt$$

Utilizando la **fórmula de Euler**:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 t(\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t)) dt \\ \mathcal{F}(f(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 t \cos(\omega t) dt - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 t \operatorname{sen}(\omega t) dt \end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que  $f(t) = t$  es una función impar en su dominio e integrando tenemos que:

$$\mathcal{F}(f(t)) = -i \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 t \operatorname{sen}(\omega t) dt = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\operatorname{sen} \omega - \omega \cos \omega}{\omega^2} \right].$$

b)  $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 \operatorname{sen}(wa)}{w}$ , c)  $\mathcal{F}(f) = \frac{e^{2a} - e^{2aiw}}{\sqrt{2\pi}(1 - wi)e^{a(1+wi)}}$ . d) A partir de la definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+iw)x} dx$$

donde la integral impropia anterior, se puede calcular de:

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+iw)x} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^m e^{-(a+iw)x} dx$$

por tanto, tenemos:

$$\mathcal{F}(f) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(a+iw)} \left( \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-(a+iw)m} - 1 \right)$$

( El límite de la expresión anterior se determina correctamente siguiendo el siguiente análisis:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-(a+iw)m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-am} e^{-iwm} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-am} (\cos(wm) - i \operatorname{sen}(wm)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-am} \cos(wm) - i \lim_{m \rightarrow \infty} e^{-am} \operatorname{sen}(wm) \end{aligned}$$

de donde, como las funciones  $\cos(wm)$  y  $\operatorname{sen}(wm)$  son acotadas y (como  $a > 0$ )  $e^{-am} \rightarrow 0$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , entonces:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-(a+iw)m} = 0$$

**Observación:** El límite de la exponencial compleja  $\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-iwm}$  no es nulo (incluso si  $w > 0$ ). Esto se puede ver claramente si expresamos esta exponencial compleja usando la fórmula de Euler:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-iwm} = \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(wm) - i \operatorname{sen}(wm)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \cos(wm) - i \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{sen}(wm).$$

Finalmente,

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(a+iw)} = \frac{a-iw}{\sqrt{2\pi}(a^2+w^2)}.$$

3. Determinar la transformada de Fourier seno de  $f(x) = e^{-|x|}$  y a partir de la transformada seno inversa evaluar la integral impropia:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(mx)}{1+x^2} dx, \quad m > 0$$

$$\text{Respuesta: } \hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w}{1+w^2}, \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen}(mx)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}.$$

4. Determinar la transformada de Fourier de:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(1+i)t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

y a partir de este resultado, demostrar que:

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i(w+1)} \right) = \begin{cases} e^{-(1+i)t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t < 0, \\ 1/2, & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

$$\text{Respuesta: } \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{1+i(w+1)} \right].$$

5. Determine:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+iw}{6-w^2+5iw}\right)$$

**Hint:** Separe en fracciones parciales y utilice la tabla de transformadas inversas.

6. (**Examen Remedial, 2018-B**) Sea  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua por tramos y absolutamente integrable en  $I$ , y es tal que  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$  y  $f'(t)$  es también continua por tramos en  $I$ . A partir de la definición de transformada de Fourier demuestre que:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}.$$

7. Determinar la transformada de Fourier del pulso triangular:

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{si } 0 < t < 1, \\ 3-t, & \text{si } 1 < t < 3, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

a) A partir de la definición de transformada de Fourier.

b) A partir de la transformada de Fourier de la segunda derivada de  $f(t)$ .

Para esto considere los siguientes resultados, definiciones y siga el siguiente procedimiento:

Primero, halle la primera derivada de  $f(t)$  y exprese el resultado a través de la **función escalón unitario** definida como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > a, \\ 0, & \text{si } t < a. \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Derive  $f'(t)$  y exprese dicho resultado a través de la "función" impulso  $\delta(t-a)$ , teniendo en cuenta que:

$$u'(t-a) = \delta(t-a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

y que la **función impulso** se define como:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & \text{si } t = a, \\ 0, & \text{si } t \neq a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, halle la transformada de Fourier de  $f''(t)$ . Utilice el hecho de que para esta función es válida la propiedad:

$$\mathcal{F}(f'') = (iw)^2 \mathcal{F}(f),$$

y utilice la definición de transformada de Fourier de la función impulso:

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-aiw}.$$

**Observación:** Una función del tipo impulso rectangular, puede expresarse a través de una combinación de funciones escalón unitario. Considere por ejemplo, la función:

$$g(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 2 < t < 3, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

puede expresarse como:

$$g(t) = 2[u(t-2) - u(t-3)].$$

**Respuesta:**

a) A partir de la definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt,$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_1^3 f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_3^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 (0)e^{-i\omega t} dt + \int_0^1 (2t)e^{-i\omega t} dt + \int_1^3 (3-t)e^{-i\omega t} dt + \int_3^{\infty} (0)e^{-i\omega t} dt \right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^1 (2t)e^{-i\omega t} dt + \int_1^3 (3-t)e^{-i\omega t} dt \right],$$

$$\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{2 - 3e^{-i\omega} + e^{-3i\omega}}{(i\omega)^2} \right].$$

b) La primera derivada de  $f(t)$  está dada por:

$$f'(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 < t < 1, \\ -1, & \text{si } 1 < t < 3, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

La cual puede escribirse como una combinación lineal de funciones escalón unitario  $u(t)$  como:

$$f'(t) = 2[u(t) - u(t-1)] + (-1)[u(t-1) - u(t-3)],$$

Simplificando, la última expresión tenemos:

$$f'(t) = 2u(t) - 3u(t-1) + u(t-3).$$

Derivando la expresión anterior tenemos que:

$$f''(t) = 2u'(t) - 3u'(t-1) + u'(t-3).$$

y como,  $u'(t-a) = \delta(t-a)$ , entonces:

$$f''(t) = 2\delta(t) - 3\delta(t-1) + \delta(t-3).$$

Aplicando la transformada de Fourier a la última ecuación tenemos:

$$\mathcal{F}(f''(t)) = 2\mathcal{F}(\delta(t)) - 3\mathcal{F}(\delta(t-1)) + \mathcal{F}(\delta(t-3)).$$

y como la transformada de la función impulso se define por:

$$\mathcal{F}(\delta(t-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ai\omega}$$

entonces:

$$\mathcal{F}(f''(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [2 - 3e^{-i\omega} + e^{-3i\omega}].$$

Además, haciendo uso de la propiedad:  $\mathcal{F}(f'') = (i\omega)^2 \mathcal{F}(f)$ , tenemos que:

$$(i\omega)^2 \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [2 - 3e^{-i\omega} + e^{-3i\omega}].$$

de donde, finalmente,

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{2 - 3e^{-i\omega} + e^{-3i\omega}}{(i\omega)^2} \right].$$

8. (Examen Remedial, 2018-B) Determine la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 5, & \text{si } 3 \leq t \leq 11, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) A partir de la definición de transformada de Fourier.

b) A partir de la transformada de Fourier de la primera derivada de  $f(t)$ .

**Respuesta:**  $\mathcal{F}(f) = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-3iw} - e^{-11iw}}{iw} \right]$ .

9. La función pulso rectangular de altura  $b$  se define por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -a, \\ b & \text{si } -a < x < a, \\ 0 & \text{si } a < x. \end{cases}$$

donde  $a, b > 0$ . Determine la transformada de Fourier de esta función a partir de la transformada del pulso rectangular unitario y a partir de la transformada de  $f'$ .

**Respuesta:** La función de pulso rectangular unitario  $f_1(x)$ , se obtiene de la definición anterior para cuando  $b = 1$ , es decir  $f_1(x) = f(x)|_{b=1}$ . De la definición de transformada de Fourier tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-iwx} dx = -\frac{1}{iw\sqrt{2\pi}} (e^{-iwa} - e^{iwa}) \\ &= \frac{2i}{iw\sqrt{2\pi}} \text{sen}(wa) = \frac{2}{w\sqrt{2\pi}} \text{sen}(wa) \end{aligned}$$

Notemos ahora que cualquier función pulso rectangular de altura  $b$  es de la forma  $bf_1$ . Luego, utilizando la linealidad de la transformada de Fourier, tenemos:

$$\mathcal{F}[bf_1(x)] = b\mathcal{F}[f_1(x)] = b \left( \frac{2}{w\sqrt{2\pi}} \text{sen}(wa) \right) = \frac{2b}{w\sqrt{2\pi}} \text{sen}(wa).$$

Por otro lado,  $f(x)$  puede ser expresado a través de la función escalón unitario como:

$$f(x) = b[u(x+a) - u(x-a)],$$

cuya derivada está dada por:

$$f'(x) = b[\delta(x+a) - \delta(x-a)].$$

Aplicando la transformada de Fourier sobre la última expresión tenemos:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = b[\mathcal{F}(\delta(x+a)) - \mathcal{F}(\delta(x-a))]$$

de donde:

$$\mathcal{F}(f'(x)) = -\frac{b}{\sqrt{2\pi}} (e^{-iwa} - e^{iwa}) = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} 2i \text{sen}(wa)$$

además como  $\mathcal{F}(f'(x)) = iw\mathcal{F}(f(x))$ , tenemos que:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \frac{2b}{w\sqrt{2\pi}} \text{sen}(wa)$$

10. Pruebe que:  $\mathcal{F}(e^{-t}u(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+iw}$  donde  $u(t)$  es la función escalón unitario. Determinar de igual manera  $\mathcal{F}(e^{-at}u(at))$  donde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . **Respuesta:**  $\mathcal{F}(e^{-at}u(at)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{|a|(a+wi)}$ .

11. **(Prueba 2, 2018-B)** Determine la transformada de Fourier de la función definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -2, \\ -t-2, & \text{si } -2 \leq t < -1, \\ t, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 2-t, & \text{si } 1 < t \leq 2, \\ 0, & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

A partir de:

a) La definición de transformada de Fourier.

b) La transformada de Fourier de la segunda derivada de  $f(t)$ .

12. (Prueba 2, 2019-A) Determine la transformada de Fourier de la función definida por: (2pt)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -2, \\ -1, & \text{si } -2 < t < -1, \\ t + 1, & \text{si } -1 < t < 0, \\ 1 - t, & \text{si } 0 < t < 1, \\ -1, & \text{si } 1 < t < 2, \\ 0, & \text{si } t > 2, \end{cases}$$

A partir de:

a) La definición de transformada de Fourier.

b) La representación de  $f$  en términos de la función escalón unitario  $u(t - a)$  y/o impulso  $\delta(t - a)$ .

13. Utilice la definición de transformada de Fourier, para demostrar las siguientes propiedades. Recuerde que las siguientes notaciones son equivalentes:  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{F}(f(t))(w) = \mathcal{F}(f)(w) = \hat{f}(w)$

a)  $\mathcal{F}(f(t - t_0)) = \mathcal{F}(f)e^{-iwt_0}$

b)  $\mathcal{F}(f(t)e^{iwt_0}) = \hat{f}(w - w_0)$

c)  $\mathcal{F}(f(\alpha t)) = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}\left(\frac{w}{\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d)  $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = f(-w)$

14. Pruebe que:  $\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1 + w^2}$ . Luego utilice las propiedades de la transformada de Fourier (del ejercicio anterior) para determinar:  $\mathcal{F}(e^{-|at|}), a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y finalmente, utilice este resultado para determinar  $\mathcal{F}(e^{-|3t|})$ . **Respuesta:**  $\mathcal{F}(e^{-|at|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2|a|}{a^2 + w^2}, \mathcal{F}(e^{-|3t|}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{6}{w^2 + 9}$

### EJERCICIOS ADICIONALES

15. Evalúe, para cada  $x \in \mathbb{R}$  la integral:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(y)}{y} \frac{\text{sen}(x - y)}{x - y} dy$$

**Respuesta:**  $g(x) = \begin{cases} \pi \frac{\text{sen}(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ \pi, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

16. Demostrar que la transformada de Fourier de la función  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$  es auto recíproca, es decir, que la transformada de Fourier de  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  está dada por  $e^{-\frac{w^2}{2}}$ , y viceversa.

17. La función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$f(x) = e^{ix^2}$$

para cada  $x \in \mathbb{R}$  se conoce como **función de Fresnel**. Asumiendo su existencia, encuentre la transformada de Fourier de la función de Fresnel. **Respuesta:**  $\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1+i}{2} e^{-w^2/4}$ .

18. Dadas dos variables aleatorias continuas independientes  $X$  e  $Y$ , con funciones de densidad  $f_X$  y  $f_Y$ , se sabe que la función de densidad  $f_{X+Y}$  de la variable aleatoria  $X + Y$  está dada por:

$$f_{X+Y}(x) = (f_X * f_Y)(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . La función de densidad de una variable aleatoria que sigue una distribución normal  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  está dada por:

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Sean  $X, Y$  variables aleatorias independientes tales que  $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  y  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Demuestre que  $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

### **AGRADECIMIENTOS**

Los ejercicios adicionales de la presente hoja fueron elaborados por los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya durante el periodo 2018-B.



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL  
ANÁLISIS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES  
HOJA DE EJERCICIOS NO. 7  
CONCEPTOS BÁSICOS DE EDP'S



Semestre 2019-B

Departamento de Formación Básica

1. **Teorema Fundamental:** Si  $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,  $n$  funciones de  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , son soluciones (linealmente independientes) de una EDP lineal y homogénea de orden  $n$  en  $\Omega$ , entonces la combinación lineal de ellas:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \dots, + c_n u_n(x),$$

donde  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ , y  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  también es solución (de esa EDP en  $\Omega$ ).

Pruebe el teorema fundamental (por sustitución de  $u(x)$  donde  $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ) para una EDP de segundo orden (lineal y homogénea).

2. Verifique para cada uno de los siguientes casos (y para un valor de  $c \in \mathbb{R}$  adecuado) que la función  $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con:

a)  $u(x, t) = x^2 + t^2$ ,

b)  $u(x, t) = \cos(4t) \sen(2x)$ ,

c)  $u(x, t) = \sen(kct) \cos(kx)$ ,

d)  $u(x, t) = \sen(at) \sen(bx)$ ,

satisface la ecuación de la onda unidimensional:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

**Respuesta:** a) Determinando las derivadas parciales de  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$$

y sustituyendo en la EDP tenemos que:

$$2 = 2c^2$$

por tanto la función  $u$  es solución de la ecuación si  $c^2 = 1$ .

3. Verifique que  $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct)$  donde  $v$  y  $w$  son funciones al menos dos veces diferenciales y  $c \in \mathbb{R}$ , satisface la ecuación de la onda en una dimensión.
4. Verifique para cada uno de los siguientes casos (y para un valor de  $c \in \mathbb{R}$  adecuado) que la función  $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con:

a)  $u(x, t) = e^{-t} \sen(x)$ ,

b)  $u(x, t) = e^{-w^2 c^2 t} \cos(wx)$ ,

c)  $u(x, t) = e^{-9t} \sen(wx)$ ,

satisface la ecuación del calor unidimensional:  $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

**Respuesta:** c) Determinando las derivadas parciales de  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -9e^{-9t} \sen(wx), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = we^{-9t} \cos(wx), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -w^2 e^{-9t} \sen(wx)$$

y sustituyendo en la EDP:

$$-9e^{-9t} \sen(wx) = c^2 (-w^2 e^{-9t} \sen(wx))$$

tenemos que la función  $u$  es solución de la ecuación si  $c^2 w^2 = 9$ .

5. Verifique para cada uno de los siguientes casos que la función  $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con:

a)  $u(x, y) = x^2 - y^2$ .

b)  $u(x, y) = e^x \cos y$ .

c)  $u(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ .

d)  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

**Respuesta:** b) Determinando las derivadas parciales de  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos(y) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen}(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos(y),$$

como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

entonces la función  $u$  satisface la ecuación diferencial parcial.

6. Verifique que la función  $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $u(x, y) = a \log_{10}(x^2 + y^2) + b$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Determine  $a$  y  $b$  tales que satisfagan las condiciones de frontera:  $u = 110$  en el círculo  $x^2 + y^2 = 1$  y  $u = 0$  en el círculo  $x^2 + y^2 = 100$ .

**Respuesta:**  $a = -55, b = 110$ .



**Ejercicios CP: 1, 10, 11**

**CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET**

1. El siguiente problema describe las vibraciones transversales  $u(x, t)$  de una cuerda elástica de longitud  $L = \pi$  fija en ambos extremos, la cual ha sido desplazada de su posición de equilibrio levantándola en su centro y luego soltada al tiempo  $t = 0$  (su velocidad inicial es cero):

$$(P) \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

donde,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2. \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Utilice el método de separación de variables para encontrar una expresión que describa las vibraciones transversales  $u(x, t)$  en todo punto  $x \in [0, \pi]$  de la cuerda y para todo tiempo  $t$ .

**Respuesta:** Buscamos una solución de la forma:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{1}$$

la cual al derivar

$$u_{tt} = X(x)T''(t)$$

$$u_{xx} = X''(x)T(t)$$

y reemplazar  $u_{tt}$  y  $u_{xx}$  en nuestra EDP:  $u_{tt} = 9u_{xx}$ , tenemos:

$$X(x)T''(t) = 9X''(x)T(t)$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad X(x) \neq 0, T(t) \neq 0.$$

Podemos observar que el lhs de la ecuación depende solamente de  $t$  mientras que el rhs solamente de  $x$ , esto es solo posible si ambos lados de la ecuación son igual a una constante  $k$  (arbitraria), es decir si:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

de donde podemos obtener las EDO's:

$$X''(x) - kX(x) = 0 \tag{2}$$

$$T''(t) - 9kT(t) = 0. \tag{3}$$

Además utilizando las condiciones de frontera  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  en la ecuación (1):

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad X(0) = 0$$

$$u(\pi, t) = X(\pi)T(t) = 0, \quad X(\pi) = 0$$

Podemos ver como el método de separación de variables permite transformar nuestro problema (P) en la resolución de las EDO's:

$$a) \begin{aligned} X''(x) - kX(x) &= 0, \\ X(0) = 0, \quad X(\pi) &= 0, \end{aligned} \qquad b) \begin{aligned} T''(t) - 9kT(t) &= 0. \end{aligned}$$

El hecho de que la constante  $k$  sea arbitraria esto significa que esta puede ser positiva, negativa o incluso cero ( $k \in \mathbb{R}$ ), y por tanto esto las soluciones de las ecuaciones  $a)$  y  $b)$  serán diferentes en cada uno de estos casos. Por ejemplo, se puede demostrar que para valores de  $k > 0$  o  $k = 0$  las soluciones de las ecuaciones  $a)$  y  $b)$  corresponden a la solución trivial  $u(x, t) = 0$ .

Por otro lado, para el caso  $k < 0$  (y tomando solamente por simplicidad  $k = -\gamma^2$ ) tenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} X''(x) + \gamma^2 X(x) &= 0, \\ X(0) = 0, \quad X(\pi) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Para resolverla, buscamos una solución de la forma:

$$X(x) = e^{mx}, \tag{5}$$

que derivando y reemplazando  $X'(x)$  y  $X''(x)$  en (4) tenemos:

$$\begin{aligned} m^2 e^{mx} + \gamma^2 e^{mx} &= 0 \\ e^{mx}(m^2 + \gamma^2) &= 0 \end{aligned}$$

de donde:

$$m = \pm i\gamma.$$

Reemplazando  $m$  en (5),

$$X(x) = e^{\pm i\gamma x}. \tag{6}$$

Se puede verificar que la solución general de (4) está dada por:

$$X(x) = A \cos(\gamma x) + B \sen(\gamma x), \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Las constantes  $A$  y  $B$  se determinan a partir de las condiciones  $X(0) = 0$  y  $X(\pi) = 0$ .

$$X(0) = A \cos(\gamma 0) + B \sen(\gamma 0) = 0, \quad A = 0. \tag{8}$$

$$X(\pi) = B \sen(\gamma \pi) = 0. \tag{9}$$

El  $\sen(\gamma \pi)$  es 0 si el argumento  $\gamma \pi$  es igual a  $n\pi$  para todo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  es decir:

$$\gamma \pi = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

y por tanto,

$$\gamma_n = n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Existen un infinito número de valores de  $\gamma$ , existen también un infinito número de soluciones para la ecuación (4) (denotadas por el subíndice  $n$ ), es decir:

$$X_n(x) = B_n \sen(\gamma_n x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

reemplazando  $\gamma_n = n$ , tenemos:

$$X_n(x) = B_n \sen(nx), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{10}$$

Por otro lado, reemplazando  $k = -\gamma^2$ , la ecuación (3) se convierte en:

$$T''(t) + 9n^2 T(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{11}$$

cuya resolución es similar a la ecuación (4) y se puede verificar que su solución está dada por:

$$T_n(t) = C_n \cos(3nt) + D_n \sin(3nt), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Reemplazando las ecuaciones (10) y (12) en (1), tenemos:

$$u_n(x, t) = B_n \sin(nx) [C_n \cos(3nt) + D_n \sin(3nt)], \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Por el teorema fundamental de superposición, la solución general está dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [B_n \sin(nx) [C_n \cos(3nt) + D_n \sin(3nt)]] \quad (14)$$

o simplemente por:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) [A_n^* \cos(3nt) + B_n^* \sin(3nt)]. \quad (15)$$

Note que la sumatoria de la solución corre desde 1 y no desde cero, debido a que para  $n = 0$ ,  $X_0 = 0$  y por tanto,  $u_0 = 0$ . Para determinar los coeficientes  $A_n^*$  y  $B_n^*$  utilizamos las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0,$$

y se puede demostrar que estos están dados por:

$$A_n^* = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin(nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx$$

$$A_n^* = \frac{4(-1)^n}{\pi n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$B_n^* = \frac{2}{3n\pi} \int_0^{\pi} u_t(x, 0) \sin(nx) dx = 0$$

por tanto:

$$u(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx) \cos(3nt)$$

o, reemplazando  $n$  por  $2k - 1$  con  $k = 1, 2, 3$ , tenemos:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right) \sin((2k-1)x) \cos(3(2k-1)t).$$

2. Resuelva el problema de la onda unidimensional:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < 5, \\ u(0, t) = 0, \quad u(5, t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x) \quad u_t(x, 0) = g(x) & 0 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

con:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 4 \operatorname{sen}(\pi x) - \operatorname{sen}(2\pi x) - 3 \operatorname{sen}(5\pi x), & b) f(x) = 0, \\ g(x) = 0 & g(x) = 4 \end{array}$$

**Respuesta:**

$$a) u(x, t) = 4 \cos(2\pi t) \operatorname{sen}(\pi x) - \cos(4\pi t) \operatorname{sen}(2\pi x) - 3 \cos(10\pi t) \operatorname{sen}(5\pi x).$$

$$b) u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{80}{2(2n-1)^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{2(2n-1)\pi t}{5} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{5}.$$

3. (**Prueba 2, 2018-B**) Considere una cuerda elástica de longitud  $L = 2\pi$  y  $c = 2$  fija en ambos extremos, la cual ha sido desplazada de su posición de equilibrio y luego soltada. Si al tiempo  $t = 0$ , la posición de la cuerda puede ser descrita por la función:

$$f(x) = \text{sen} \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{3} \text{sen} \left( \frac{3x}{2} \right) + \frac{1}{5} \text{sen} \left( \frac{5x}{2} \right),$$

y si la cuerda parte del reposo:

- Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema (asumiendo que la masa de la cuerda es despreciable, y que no existen fuerzas externas o de rozamiento).
- Utilice el método de separación de variables para encontrar una expresión que describa las vibraciones transversales  $u(x, t)$  que experimenta la cuerda, para todo  $t \geq 0$  y para  $0 \leq x \leq L$ .
- Determine explícitamente los términos no nulos de la serie infinita que define a  $u(x, t)$ . **Hint:** Los coeficientes de la serie pueden ser determinados directamente de las condiciones iniciales sin usar las relaciones:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad B_n = \frac{2}{\lambda_n L} \int_0^L u_t(x, 0) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{con } \lambda_n = \frac{n\pi c}{L}.$$

4. Encuentre una expresión que describa la vibración de una cuerda de longitud  $L$  fija en sus extremos que ha sido sacada de su posición de equilibrio. Considere que la velocidad de todos sus puntos es cero al tiempo  $t = 0$  y que en ese mismo instante la cuerda tiene la forma de un triángulo con vértice en el punto  $(h, a)$ .

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L^2 h}{a(L-a)n^2\pi^2} \text{sen} \left( \frac{n\pi a}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi ct}{L} \right)$$

5. Resuelva la ecuación de la onda sujeta a las condiciones:

$$\begin{aligned} u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \text{sen}(x), \quad x \in [0, L]. \end{aligned}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \frac{2L \text{sen} L}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{L^2 - \pi^2 n^2} \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi ct}{L} \right)$$

6. Hallar la función  $u(x, t)$ , con  $x \in [0, L]$  y  $t > 0$ , que resuelve la ecuación de la onda unidimensional:  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  y satisface las condiciones de frontera e iniciales:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(L-x), \quad u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, L]. \end{cases}$$

**Respuesta:** Usando el método de separación de variables tenemos que la solución para este problema de valores de frontera está dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \left( A_n \text{sen} \left( \frac{nc\pi t}{L} \right) + B_n \cos \left( \frac{nc\pi t}{L} \right) \right) \right]$$

donde

$$A_n = \frac{2}{nc\pi} \int_0^L 0 \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = 0 \quad \text{y} \quad B_n = \frac{2}{L} \int_0^L x(L-x) \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx.$$

Calculando  $B_n$  tenemos

$$B_n = \frac{2}{L} \cdot L \int_0^L x \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx - \frac{2}{L} \cdot \int_0^L x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{4L^2}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1].$$

Finalmente, la solución está dada por:

$$u(x, t) = \frac{4L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n^3} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{nc\pi t}{L} \right).$$

7. Hallar la función  $u(x, t)$ , con  $x \in [0, L]$  y  $t > 0$ , que resuelve la ecuación de la onda unidimensional  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ : y satisface las condiciones:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi x}{2} \right) & u_t(x, 0) = \sum_{j=1}^N \tilde{B}_j \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi x}{2} \right), & x \in [0, L] \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{2}{nc\pi} \tilde{B}_n \operatorname{sen} \left( \frac{nc\pi t}{2} \right) + \tilde{A}_n \cos \left( \frac{nc\pi t}{L} \right) \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2} \right)$$

8. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $I = [0, L]$  dos funciones y  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $\Omega = [0, L] \times [0, +\infty[$ , donde  $L > 0$ . Considere el siguiente problema de valor en la frontera, asociado a la ecuación de la onda unidimensional (**con condiciones de frontera no homogéneas**):

$$(P1) \quad \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in \Omega, \\ u(0, t) = a, & u(L, t) = b, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

- a) (**Examen Remedial, 2018-B**) Demuestre que toda solución  $u$  del problema (P1) puede escribirse en la forma:

$$u(x, t) = w(x, t) + a + \frac{b-a}{L}x, \quad (x, t) \in \Omega,$$

donde  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es solución del problema (**con condiciones de frontera homogéneas**):

$$(P2) \quad \begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx}, & (x, t) \in \Omega, \\ w(0, t) = 0, & w(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x, 0) = f(x) - a - \frac{b-a}{L}x, & w_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, L]. \end{cases}$$

- b) Sea  $\Omega = [0, \pi] \times [0, +\infty[$ . Use el inciso anterior para resolver el siguiente problema de valor en la frontera:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in \Omega, \\ u(0, t) = -3, & u(L, t) = 8, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}(17x), & u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \operatorname{sen}(17x) \cos(17t) - 3 + \frac{11}{\pi}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(3 + 8(-1)^k)}{k\pi} \operatorname{sen}(kx) \cos(kt)$$



9. Sean  $f, g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones. Considere el siguiente problema de valor en la frontera asociado a la ecuación de la onda:

$$(P) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

a) Demuestre que toda solución  $u$  de (P) puede escribirse en la forma:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[,$$

donde  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones de los problemas:

$$(P1) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[, \\ u_1(0, t) = u_1(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u_1(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

y

$$(P2) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[, \\ u_2(0, t) = u_2(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

respectivamente.

b) Use el resultado precedente para resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

donde:

$$f(x) = x(L - x) \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, L/3] \cup [2L/3, L], \\ 1, & \text{si } x \in [L/3, 2L/3]. \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \frac{2L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \left[ \frac{2L}{\pi(2k+1)^3} \cos \left( \frac{k\pi t}{L} \right) + \frac{\cos \left( \frac{(2k+1)\pi}{3} \right) - \cos \left( \frac{2(2k+1)\pi}{3} \right)}{(2k+1)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi t}{L} \right) \right].$$

### CONDICIONES DE FRONTERA DE NEUMANN

10. El objetivo de este ejercicio es el de resolver la ecuación de la onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

con **condiciones de Neumann** homogéneas:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

y con condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L,$$

donde  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función conocida no nula. Nótese que a diferencia del problema usual, las condiciones de frontera se encuentran sobre la derivada parcial  $\frac{\partial u}{\partial x}$  en lugar de sobre la función  $u$ . Para esto, usaremos el método de separación de variables: Asumiremos que existen funciones  $X : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $T : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tales que, para todo  $(x, t)$  se cumple que:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

a) Demuestre que existe una constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que las funciones  $X$  y  $T$  son soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias con restricciones:

$$\begin{cases} c^2 X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ X'(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \geq 0, \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Suponiendo que  $\lambda = 0$ , demuestre que  $X$  y  $T$  son funciones constantes.

c) Demuestre que no es posible que  $\lambda > 0$ .

d) Demuestre que si  $\lambda < 0$ , entonces existe  $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  tal que:

$$\lambda = -\frac{c^2 k^2 \pi^2}{L^2}, \quad X_k(x) = C_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad y \quad T_k(t) = D_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right)$$

para todo  $x \in [0, L]$  y  $t \geq 0$ , donde  $C_k$  y  $D_k$  son constantes.

e) Demuestre que la solución  $u$  del problema de Neumann puede escribirse en la forma:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right),$$

donde para todo  $k \in \mathbb{N}$  se tiene que:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

f) Use los incisos anteriores para resolver el siguiente problema de Neumann asociado a la ecuación de la onda:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty[, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \cos^3(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

**Respuesta:**

a) Sustituyendo  $u_{tt}$  y  $u_{xx}$  con  $u(x, t) = X(x)T(t)$  en la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

se tiene que:

$$XT'' = c^2 X''T,$$

de donde, dividiendo para  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , con  $u \neq 0$  se tiene que:

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X}.$$

El lado izquierdo de esta igualdad es una función que depende solamente de la variable  $t$ , mientras que el derecho depende solamente de la variable  $x$ , por ende ambos términos deben ser iguales a una constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ , así

$$\frac{T''}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = \lambda.$$

De donde podemos obtener dos EDO's, una para  $X(x)$  y otra para  $T(t)$ . Utilizando las condiciones

de frontera:  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ , tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = X'(0)T(t) = 0.$$

Ahora, como  $T(t)$  no puede ser idénticamente nula, se tiene que  $X'(0) = 0$  y similarmente, con la otra condición,  $X'(L) = 0$ . De igual manera se tiene que  $T'(0) = 0$ . Con esto, se tienen las siguientes EDOs con condiciones:

$$\begin{cases} c^2 X''(x) - \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ X'(0) = X'(L) = 0, \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} T''(t) - \lambda T(t) = 0, & t \geq 0, \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Supongamos que  $\lambda = 0$ . Entonces se tiene que  $X'' = 0$  y que  $T'' = 0$ . De la primera ecuación se tiene que:

$$X(x) = c_1 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

de donde,  $X'(x) = c_2$  y dado que  $X'(0) = X'(L) = 0$ , se sigue que  $c_2 = 0$ , por ende  $X(x) = c_1$ , por tanto,  $X(x)$  es una función constante. Con el mismo razonamiento se puede verificar que  $T(t)$  es también una función constante, y por tanto  $u(x, t)$ .

c) Supongamos que  $\lambda > 0$ , entonces se tiene que  $c^2 X'' - \lambda X = 0$ , de donde:

$$X(x) = c_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

de donde:

$$X'(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{c} \left( c_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} - c_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}x} \right).$$

Dado que  $X'(0) = X'(L) = 0$  se tiene que:

$$c_1 - c_2 = 0 \quad y \quad c_1 e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{c}L} - c_2 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{c}L} = 0,$$

lo que implica que  $c_1 = c_2 = 0$ . Por ende  $X(x) = 0$  y así  $u(x, t) = 0$ , lo que no es posible ya que  $f(x)$  es no nula.

d) Supongamos que  $\lambda < 0$ . Entonces, la solución general de la EDO  $c^2 X'' - \lambda X = 0$  está dada por:

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

de donde:

$$X'(x) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} \left( -c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) \right),$$

y como  $X'(0) = 0$ , se tiene que

$$X'(0) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{c} c_2 = 0,$$

con lo cual  $c_2 = 0$ . Así

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right) \quad y \quad X'(x) = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{c} c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}x\right).$$

Para que la solución  $u \neq 0$ , de la condición:

$$X'(L) = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{c} c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L\right) = 0,$$

se tiene que  $c_1 \neq 0$  y por tanto:  $\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L\right) = 0$ , lo que sucede solamente si existe  $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

tal que:

$$\frac{\sqrt{-\lambda}}{c}L = k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

de donde tenemos que, nombrando  $C = c_1$ ,

$$\lambda = -\frac{c^2 k^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{y} \quad X_k(x) = C_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Con este valor de  $\lambda$ , procedemos a resolver la EDO:  $T'' - \lambda T = 0$  con la condición inicial:  $T'(0) = 0$  cuya solución general está dada por:

$$T_k(t) = c_3 \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) + c_4 \operatorname{sen}\left(\frac{ck\pi t}{L}\right), \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

de donde, con la condición  $T'(0) = 0$ , se tiene que  $c_4 = 0$ , así, llamando  $D = c_3$ , se tiene que:

$$T_k(t) = D_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**Observación :** Note que la única ventaja de tomar a la constante  $\lambda$  como  $\lambda = k^2$  o  $\lambda = -k^2$  en los literales  $c$  y  $d$ ) es no tener que tratar con las raíces cuadradas como lo hicimos, sin embargo, el resultado es el mismo.

e) A partir de los literales  $b$ ) y  $d$ ) se tiene que la solución  $u(x, t)$  se puede escribir en la forma:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right).$$

Llamando  $a_0 = 2A_0$  y  $a_k = A_k$ , se tiene que:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{ck\pi t}{L}\right).$$

Ahora, como  $u(x, 0) = f(x)$ , se tiene que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right),$$

por ende, los coeficientes  $a_k$  son los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de coseno de  $f$  en el intervalo  $[0, L]$ , y por ende:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx.$$

f) Utilice los valores correspondientes de  $c$  y  $L$  en la solución encontrada y considere la siguiente identidad trigonométrica:  $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$  para calcular los coeficientes de Fourier, y muestre que:

$$u(x, t) = \frac{3}{4} \cos(x) \cos(2t) + \frac{1}{4} \cos(3x) \cos(6t).$$

## CONDICIONES DE FRONTERA DE ROBIN

11. **(Prueba 2, 2019-A)** Sean  $L > 0$ ,  $c > 0$ ,  $u : [0, L] \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $u \in C^2([0, L] \times [0, +\infty[)$  y  $f \in C([0, L])$ . El objetivo de esta pregunta es hallar la solución de la **ecuación de la onda unidimensional** con las condiciones mixtas (de Dirichlet en  $x = 0$  y de Neumann en  $x = L$ ) siguientes:

$$(P) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

a) Suponga que existen dos funciones  $X : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $T : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  tales que la solución al problema

(P) puede expresarse como:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad \text{para todo } (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[,$$

y por tanto, existe una constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $X$  y  $T$  son soluciones de los problemas:

$$(A) \begin{cases} X''(x) - \alpha X(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X(0) = 0, \\ X'(L) = 0 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} T''(t) - \alpha c^2 T(t) = 0, & t > 0 \\ T'(0) = 0. \end{cases}$$

b) Muestre que para  $\alpha \geq 0$ , la solución  $u(x, t)$  es trivial.

c) Muestre que para  $\alpha < 0$ , existe un número  $k = 0, 1, 2, \dots$  tal que:

$$\alpha = - \left( \frac{(2k+1)\pi}{2L} \right)^2,$$

y además, que  $X$  y  $T$  están dados por:

$$X_k(x) = C_k \operatorname{sen} \left( \frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right), \quad T_k(t) = D_k \cos \left( \frac{(2k+1)c\pi}{2L} t \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

d) Utilice el principio de superposición para mostrar que la solución del problema (P) está dado por:

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen} \left( \frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right) \cos \left( \frac{(2k+1)c\pi}{2L} t \right)$$

donde:

$$c_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2L} x \right) dx,$$

y

$$c_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{(2k+1)\pi}{2L} x \right) dx.$$

(Determine  $c_0$  y  $c_k$  paso a paso utilizando la ortogonalidad de las funciones trigonométricas y el teorema de Sturm-Liouville).

## AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya.



Ejercicios CP: (1, 7), 12, 18

CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET

1. Resuelva el problema de conducción de calor con condiciones de Dirichlet homogéneas:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

2. El calentamiento de una barra metálica de longitud  $L$  está modelado por el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = x(L - x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Determine la temperatura de la barra  $u(x, t)$  en todo punto  $x$  de la barra y todo instante  $t$ .

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{c^2 L^2} t} \operatorname{sen} \left( \frac{(2n+1)\pi x}{L} \right)$$

3. Resuelva el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

donde:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x, & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)^2 t} \operatorname{sen}((2n+1)x)$$

4. Considere una varilla metálica de longitud  $L$  que ha sido sumergida en agua a una temperatura de 100 grados C, y luego de un tiempo retirada y al tiempo  $t = 0$ . Posteriormente, sus extremos han sido colocados en dos recipientes con hielo a 0 grados C. Encuentre una expresión que describa la conducción de calor que se produce en la varilla suponiendo que esta puede ser descrita por la ecuación del calor unidimensional homogénea.

**Respuesta:** Si llamamos  $u(x, t)$  la distribución de temperatura en la varilla, entonces:

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1 - \cos(n\pi)) e^{-\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} t} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

5. Resuelva el problema de conducción de calor:

$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \text{sen}(x) \cos(4x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (e^{-75t} \text{sen}(5x) + e^{-27t} \text{sen}(3x))$$

6. Encontrar la solución  $u(x, t)$  de la ecuación unidimensional de calor dado las condiciones de frontera e iniciales:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (x, t) \in ]0, \pi[ \times ]0, \infty[, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty[, \\ u(x, 0) = f(x), \quad f(0) = f(\pi) = 0, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^{\pi} f(r) \text{sen}(kr) dr \right) \text{sen}(kx) e^{-k^2 t}$$

7. (Examen 2, 2019-A) Transforme el siguiente problema de conducción de calor con **condiciones de frontera no-homogéneas** (para  $u(x, t)$ ):

$$(P) \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty[, \\ u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

en un problema con **condiciones de frontera homogéneas** (para  $w(x, t)$ ). **Hint:** Considere el siguiente ansatz:

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x).$$

Encuentre la EDP para  $w(x, t)$  y sus respectivas condiciones de frontera e iniciales y exprese el respectivo problema como en (P). Encuentre también  $v(x)$  explícitamente suponiendo que satisface la ecuación del calor y que  $v(0) = T_1$  y  $v(L) = T_2$ .

8. En el siguiente problema encuentre la solución  $u(x, t)$  de la ecuación de calor unidimensional, la cual satisface las condiciones de frontera e iniciales:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u(0, t) = k_0, \quad u(L, t) = k_1, & t \geq 0, \quad k_0 \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = k_0 + (k_1 - k_0) \frac{x}{L} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 t}{L^2}} \text{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right) \right)$$

con:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( g(x) - \left( k_0 + (k_1 - k_0) \frac{x}{L} \right) \right) \text{sen} \left( \frac{n \pi x}{L} \right) dx$$

9. Una barra metálica de 100 centímetros de longitud, con difusividad térmica de  $0,01 \text{ cm}^2/\text{s}$  se calienta de modo tal que su extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de 100 C, mientras que su extremo derecho se mantiene a 0 C. La temperatura en el instante en que la barra empieza a calentarse está dada, para cada punto  $x$  de la barra por:

$$f(x) = 100 \cos \left( \frac{\pi x}{200} \right),$$

en donde se considera que  $x$  es la distancia, medida en centímetros, desde el extremo izquierdo de la barra. Halle la temperatura de la barra en todo punto y en todo instante de tiempo.

**Respuesta:**

$$u(x, t) = 100 - x + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4n^2 - 1)} e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{100} \right)$$

10. **(Examen Final, 2018-B)** Considere una varilla metálica de longitud  $L = 1$ ,  $c = 1$  y cuyos extremos izquierdo y derecho se encuentran (a todo tiempo) a las temperaturas constantes  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente. La distribución de temperatura a lo largo de la varilla al tiempo  $t = 0$  está descrita por la función:

$$f(x) = \frac{T_2}{L}x + T_1, \quad 0 \leq x \leq L$$

Si  $u(x, t)$  es la temperatura de la varilla en cualquier punto y para todo tiempo:

- Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.
- Utilice argumentos físicos para transformar este problema con condiciones de frontera no-homogéneas en uno con condiciones homogéneas. **Hint:** Considere que  $u(x, t)$  puede expresarse como la suma de una distribución transiente  $w(x, t)$  y una estacionaria  $v(x)$ , es decir:

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

donde  $w(x, t)$  es la solución de un problema con condiciones homogéneas. Determine explícitamente  $v(x)$  y plantee la ecuación diferencial y condiciones iniciales y/o de frontera para  $w(x, t)$ .

- Utilice el método de separación de variables para resolver el problema encontrado en el literal anterior y encuentre una expresión para  $w(x, t)$  para todo  $x \in [0, L]$  y  $t \geq 0$ .
- Determine explícitamente los coeficientes de la serie que define a  $w(x, t)$ .
- Finalmente, construya la solución  $u(x, t)$  del problema original.

11. Considere una varilla metálica de longitud  $L = 1$  y constante  $c = 1$ . Su extremo izquierdo se encuentra en contacto con una fuente de calor de temperatura constante  $T_1 = 1$  y el derecho con otra fuente de temperatura  $T_2 = 0$ . Además inicialmente la varilla se encuentra a una temperatura constante  $T = 1$ . Si  $u(x, t)$  es la temperatura de la varilla en cualquier punto y para todo tiempo:

- Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.
- Considere el ansatz :

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

para transformar este problema con condiciones de frontera no-homogéneas (para  $u(x, t)$ ) en uno con condiciones de frontera homogéneas (para  $w(x, t)$ ). **HINT:** Esto dignifica que debemos construir el problema de Dirichlet homogéneo para  $w(x, t)$  partiendo del ansatz y exigen do que: *i*)  $w(x, t)$  satisfaga la ecuación del calor y, *ii*)  $w(0, t) = 0$ ,  $w(1, t) = 0$ .

- Encuentre una expresión para  $u(x, t)$  para todo  $x \in [0, 1]$  y  $t \geq 0$ .

**Respuesta:**

$$u(x, t) = (1 - x) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} e^{-n^2 \pi^2 t} \operatorname{sen} (n\pi x)$$



## CONDICIONES DE FRONTERA DE NEUMANN

12. Resuelva el problema de conducción de calor con bordes aislados y sin fuentes de calor:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

**Respuesta:** Tomando  $u(x, t) = X(x)T(t)$  se obtienen las EDO's:

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0, \quad (1)$$

$$T'(t) - \alpha kT(t) = 0, \quad (2)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Resolviendo (1) (para  $\alpha < 0$ , y con  $\alpha = -\gamma^2$ ) tenemos:

$$X(x) = A \cos(\gamma x) + B \sin(\gamma x) \quad (3)$$

de donde  $A$  y  $B$  se determinan a partir de las condiciones de frontera  $u_x(0, t) = 0$ ,  $u_x(L, t) = 0$ :

$$u_x(0, t) = X'(0)T(t) = 0, \quad X'(0) = 0,$$

$$u_x(L, t) = X'(L)T(t) = 0, \quad X'(L) = 0.$$

Derivando (3):

$$X'(x) = -A\gamma \sin(\gamma x) + B\gamma \cos(\gamma x)$$

y evaluando las condiciones  $X'(0) = 0$  y  $X'(L) = 0$ , tenemos:

$$X'(0) = -B\gamma = 0, \quad B = 0$$

$$X'(L) = -A\gamma \sin(\gamma L) = 0, \quad \sin(\gamma L) = 0$$

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y por tanto,

$$X_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

**Nota:** Es importante remarcar que el número  $n$ , en este caso, corre desde cero en lugar que desde 1 (como sucedía en algunos problemas de la onda unidimensional), esto es, porque en dichos casos para  $n = 0$  la solución asociada a  $n = 0$  era  $X_{n=0} = 0$ . Sin embargo, en este caso para  $n = 0$ , tenemos  $X_0 = 1$ .

Resolviendo (2) con  $\alpha = -\gamma^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$  tenemos:

$$T_n(t) = B_n e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

donde  $T_0 \neq 0$ ,  $T_0 = 1$ . A partir de (4) y (5), tenemos que:

$$u_n(x, t) = A_n B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De donde la solución general de nuestro problema se forma de la combinación lineal de estas soluciones, es decir:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n A_n B_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t},$$

y llamando  $c_n = C_n A_n B_n$ , tenemos:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}$$

que también puede ser escrito como:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t},$$

de donde,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y  $a_0 = 2c_0$ .

13. **(Examen Remedial, 2018-B)** Las ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a un cierto problema de conducción de calor son:

$$\begin{aligned} X''(x) - kX(x) &= 0, & X'(0) &= 0, & X'(\pi) &= 0 \\ T'(t) - 4kT(t) &= 0. \end{aligned}$$

- Muestre que para  $k = 0$ , la solución  $u(x, t)$  es constante.
- Muestre que para  $k > 0$ , la solución  $u(x, t)$  es trivial.
- Muestre que para  $k < 0$ , la solución  $u(x, t)$  es no-trivial.

14. Resuelva el problema de conducción de calor:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < L, \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) & 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

donde  $k \in \mathbb{R}$  es una constante.

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \frac{2k}{\pi} \left( 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{-\frac{4n^2\pi^2}{L^2 c^2} t} \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right)$$

15. **(Examen 2, 2018-B)** Considere una varilla metálica de longitud  $L = \pi$ , constante  $c = 2$ , aislada en sus bordes (es decir, sin flujo de calor en los extremos de la varilla) y cuyo perfil de temperatura al tiempo  $t = 0$  está descrito por la función:

$$f(x) = \cos(3x) + \frac{2}{3} \cos(4x) + \frac{3}{5} \cos(5x)$$

Si  $u(x, t)$  es la temperatura de la varilla:

- Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.
- Utilice el método de separación de variables para determinar las EDO's asociadas. Llame  $k$  a la constante arbitraria.
- Muestre que para  $k = 0$  la solución es constante, que para  $k > 0$  la solución es trivial y que para  $k < 0$  es no-trivial y para este último caso, encuentre una expresión que describa la temperatura de la varilla  $u(x, t)$  para todo  $x \in [0, \pi]$  y  $t \geq 0$ .
- Determine explícitamente los coeficientes de la serie infinita que define a  $u(x, t)$ .

16. Resolver el problema de conducción de calor:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 2, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**Hint:** Considere  $u(x, t) = w(x, t) + v(x) + z(t)$ .

**Respuesta:**

$$u(x, t) = 2t + x^2 - \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x) dx$$

17. Resuelva el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 6, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 3x^2 & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

- Usando el método de separación de variables.
- Buscando una solución de la forma  $u(x, t) = X(x) + T(t)$ .
- Las dos soluciones obtenidas, son la misma?

**Respuesta:**  $u(x, t) = 3x^2 + 6t$ .

18. (**Examen 2, 2019-A**) Considere una varilla metálica de longitud  $L$ , constante  $c = 1$ , cuyo borde izquierdo se encuentra aislado y por el borde derecho existe un flujo calor  $J$ . El perfil de temperatura al tiempo  $t = 0$  está descrito por una cierta función  $f(x)$ . Si  $u(x, t)$  es la temperatura de la varilla:

- Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.
- Utilice el método de separación de variables considerando:

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x) + z(t),$$

y **exija** que:

$$w_t - w_{xx} = 0.$$

y que  $w_x(0, t) = 0$ , y  $w_x(L, t) = 0$ . Además considere que  $v(0) = 0$  y  $z(0) = 0$ . Encuentre explícitamente  $v(x)$ ,  $z(t)$  y  $w(x, t)$  y a partir de ellas encuentre una expresión que describa la temperatura de la varilla  $u(x, t)$  para todo  $x \in [0, L]$  y  $t \geq 0$ . No es necesario determinar los coeficientes de la serie infinita que define a  $u(x, t)$ .

19. (**Examen Final, 2019-A**) Considere una varilla metálica delgada (de longitud  $L$ , constante  $c = 1$ ) que se encuentra colocada en **posición vertical** sobre una mesa. El borde inferior se encuentra aislado y por el borde superior existe un flujo calor  $J$ . El perfil de temperatura al tiempo  $t = 0$  está descrito por una cierta función  $f(y)$ . Si  $u(y, t)$  es la temperatura de la varilla:

- Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.
- Utilice el método de separación de variables considerando:

$$u(y, t) = w(y, t) + v(y) + z(t),$$

**exija** que:

$$w_t - w_{yy} = 0.$$

y que  $w_y(0, t) = 0$ , y  $w_y(L, t) = 0$ . Además considere que  $v(0) = 0$  y  $z(0) = 0$ . Encuentre explícitamente  $v(y)$ ,  $z(t)$  y  $w(y, t)$  y a partir de ellas encuentre una expresión que describa la temperatura de la varilla  $u(y, t)$  para todo  $y \in [0, L]$  y  $t \geq 0$ . No es necesario determinar los coeficientes de la serie infinita que define a  $u(y, t)$ .

## CONDICIONES DE FRONTERA DE ROBIN

20. Resuelva el problema de conducción de calor:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi/2, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(\pi/2, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = x(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi/2. \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2 t} \operatorname{sen}((2n-1)x)$$

## AGRADECIMIENTOS

Parte de la presente hoja de ejercicios se elaboró durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya.



**Ejercicios CP: (1a), 5, 8, 11,12**

**CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET**

1. Resuelva el siguiente problema con condiciones de frontera de Dirichlet en el rectángulo:

$$(P) \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < L_1, \quad 0 < y < L_2 \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, L_2) = f_2(x), & 0 \leq x \leq L_1, \\ u(0, y) = g_1(y), \quad u(L_1, y) = g_2(y), & 0 \leq y \leq L_2. \end{cases}$$

para cada uno de los siguientes casos:

- a)  $f_1(x) = f_2(x) = g_2(y) = 0,$
- b)  $f_1(x) = f_2(x) = g_1(y) = 0,$
- c)  $f_2(x) = g_1(y) = g_2(y) = 0,$
- d)  $f_1(x) = g_1(y) = g_2(y) = 0.$

Posteriormente construya la solución general del problema (P) la cual está dada por:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y)$$

donde,  $u_1$  es la solución del literal a),  $u_2$  es la solución del literal b),  $u_3$  es la solución del literal c), y  $u_4$  es la solución del literal d).

**Respuesta:** El procedimiento es similar para todos los literales, consideremos por ejemplo: a)  $f_1(x) = f_2(x) = g_2(y) = 0$ . Buscamos una solución de la forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

de donde derivando y reemplazando en la EDP, tenemos:

$$X''(x) - kX(x) = 0, \tag{1}$$

$$Y''(y) + kY(y) = 0, \tag{2}$$

con  $k \in \mathbb{R}$ . A partir de las condiciones de frontera y como  $f_1(x) = f_2(x) = g_2(y) = 0$ , tenemos que:

$$u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0, \quad Y(0) = 0, \tag{3}$$

$$u(x, L_2) = X(x)Y(L_2) = 0, \quad Y(L_2) = 0, \tag{4}$$

$$u(L_1, y) = X(L_1)Y(y) = 0, \quad X(L_1) = 0. \tag{5}$$

Con esta información resulta conveniente resolver la ecuación (2). Tomado  $k = \gamma^2$ , y  $Y(y) = e^{my}$ , se puede demostrar que la solución de (2) está dada por:

$$Y(y) = A \cos(\gamma y) + B \sen(\gamma y), \quad A, B \in \mathbb{R} \tag{6}$$

en donde, utilizando las condiciones (3) y (4) tenemos:

$$Y(0) = A = 0,$$

$$Y(L_2) = B \sen(\gamma L_2) = 0.$$

Suponiendo  $B$  distinto de cero en la última expresión, entonces:

$$\text{sen}(\gamma L_2) = 0$$

de donde:

$$\gamma_n = \frac{n\pi}{L_2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

y por tanto:

$$Y_n(y) = B_n \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L_2} y \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Por otro lado, debemos también resolver la ecuación:

$$X''(x) - \left( \frac{n\pi}{L_2} \right)^2 X(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

cuya solución está dada por:

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi}{L_2} x} + D_n e^{-\frac{n\pi}{L_2} x}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

de donde resulta complicado obtener un resultado que satisfaga la condición (5), ya que:

$$X_n(L_1) = C_n e^{\frac{n\pi}{L_2} L_1} + D_n e^{-\frac{n\pi}{L_2} L_1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

En estos casos (se puede demostrar) es conveniente tomar una solución de la forma:

$$X_n(x) = C_n \cosh \left( \frac{n\pi}{L_2} (x - L_1) \right) + D_n \sinh \left( \frac{n\pi}{L_2} (x - L_1) \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

que con la condición (5) tenemos que  $C_n = 0$  y por tanto:

$$X_n(x) = D_n \sinh \left( \frac{n\pi}{L_2} (x - L_1) \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

**NOTA:** Se puede tomar una solución de esta forma para en para el litera c), sin embargo, no es la única alternativa. Se recomienda verificar que su solución satisfaga las condiciones iniciales.

Por tanto, con (8) y (12) tenemos que:

$$u_n(x, y) = D_n \sinh \left( \frac{n\pi}{L_2} (x - L_1) \right) * B_n \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L_2} y \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

y por tanto la solución general se forma de la superposición de estas soluciones como:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \sinh \left( \frac{n\pi}{L_2} (x - L_1) \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L_2} y \right). \quad (13)$$

Para determinar los coeficientes  $C_n^*$ , utilizamos la condición  $u(0, y) = g_1(y)$ :

$$u(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \sinh \left( \frac{n\pi}{L_2} (-L_1) \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L_2} y \right) = g_1(y). \quad (14)$$

de donde (se puede demostrar que):

$$C_n^* = \frac{2}{L_2 \sinh \left( \frac{-n\pi L_1}{L_2} \right)} \int_0^{L_2} g_1(y) \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L_2} y \right) dy.$$

De forma similar para los otros literales. Finalmente, la solución al problema (P) está dada por:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y).$$

2. Resuelva la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < 3, \quad 0 < y < 2 \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 2) = 0, & 0 \leq x \leq 3, \\ u(0, y) = 0, \quad u(3, y) = f(y), & 0 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

con:

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2}\right), \quad c_n = \frac{8 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2 \pi^2 \sinh(3n\pi/2)}$$

3. Encuentre una expresión para el potencial  $u(x, y)$  en el interior de una lámina metálica rectangular de 20cm de base, y 40cm de altura, en cuyo lado superior se aplica un potencial de 110V y donde los otros lados están conectados a tierra.

**Respuesta:**

$$u(x, y) = \frac{440}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \sinh(2(2n-1)\pi)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{20}\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi y}{20}\right)$$

4. Encuentre el potencial en el interior de una lámina metálica cuadrada  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$  en cuyo lado superior se aplica un potencial de  $1000 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  y cuyos otros lados están conectados a tierra.

**Respuesta:**

$$u(x, y) = \frac{1000}{\sinh(\pi)} \operatorname{sen}(\pi x/2) \operatorname{sen}(\pi y/2)$$

5. Una membrana rectangular de base  $a$  y altura  $b$  tiene sus bordes inferior y laterales fijos, mientras su borde superior tiene un movimiento (en el eje  $z$ ), descrito por la función:

$$u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right),$$

donde  $u_0$  es una constante. Halle y resuelva el problema de valores de frontera que describe el comportamiento **estacionario** de la membrana.

**Respuesta:** El movimiento de esta membrana está en realidad descrito por la ecuación de la onda bidimensional:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

sin embargo, el comportamiento **estacionario** (es decir, cuando no cambia tiempo  $u_t = 0$ ) está descrito por la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

con las condiciones:

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right), & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Usando el método de separación de variables, podemos buscar una solución de la forma:

$$u(x, y) = X(x)Y(y),$$

por lo tanto la ecuación de Laplace se transforma en

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

de donde obtenemos el problema para  $X(x)$  y para  $Y(y)$ :

$$\begin{aligned} X'' - kX &= 0, & Y'' + kY &= 0, \\ X(0) = X(a) &= 0, & Y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Para  $k = 0$ , la solución está dada por:

$$X(x) = c_1x + c_2,$$

de donde, usando las condiciones de frontera se obtiene que:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & c_2 &= 0, \\ X(a) &= c_1a = 0, & c_1 &= 0, \end{aligned}$$

por tanto,  $X(x) = 0$ , lo cual implica que  $u(x, t) = 0$ . Como buscamos soluciones no triviales, descartamos este caso. Ahora, si  $k > 0$ , con  $k = \gamma^2$ , tenemos:

$$X(x) = A \operatorname{senh}(\gamma x) + B \operatorname{cosh}(\gamma x),$$

que con las condiciones de frontera, tenemos que:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & B &= 0, \\ X(a) &= A \operatorname{senh}(\gamma a) = 0, & A &= 0, \end{aligned}$$

por lo que de nuevo obtenemos  $X(x) = 0$  es decir,  $u(x, t) = 0$ . Finalmente, para  $k < 0$  y con  $k = -\gamma^2$ , tenemos:

$$X(x) = A \operatorname{sen}(\gamma x) + B \operatorname{cos}(\gamma x),$$

y utilizando las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, & B &= 0, \\ X(a) &= A \operatorname{sen}(\gamma a) = 0, & \gamma &= \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

es decir,

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Resolviendo el problema para  $Y(y)$  obtenemos:

$$Y(y) = C \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + D \operatorname{cosh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right),$$

la condición inicial nos lleva a:

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Así, gracias al teorema fundamental de superposición tenemos:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

De la condición inicial que dicta el movimiento del borde superior de la membrana se obtiene:

$$u(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = u_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right),$$

gracias a la ortogonalidad de las funciones  $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$  vemos que  $a_n$  debe ser nulo para todo  $n$  excepto para  $n = 1$ , es decir:

$$a_1 = \frac{u_0}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}$$

por lo tanto la solución al problema es:

$$u(x, y) = \frac{u_0}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{a}y\right).$$



6. Encuentre una expresión para la temperatura acotada de estado estable de la lámina infinita  $R = ]0, L[ \times ]0, +\infty[$ , tal que los bordes verticales se mantienen a una temperatura de 0 grados y el borde horizontal a una temperatura de 100 grados.

**Respuesta:**

$$u(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{-\frac{(2m+1)\pi y}{L}} \operatorname{sen} \left( \frac{(2m+1)\pi x}{L} \right)$$

### CONDICIONES DE FRONTERA DE ROBIN

7. Encuentre una expresión para la temperatura del estado estable de una lámina cuadrada  $\pi \times \pi$ , cuyos bordes (salvo uno) están aislados, de acuerdo a las siguientes condiciones:

$$u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = u(x, \pi) = 0, \quad u(x, 0) = f(x).$$

**Respuesta:**

$$u(x, y) = \frac{a_0}{2\pi}(\pi - y) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\operatorname{sen}(n(\pi - y)) \cos(nx)}{\sinh(n\pi)}, \quad \text{con } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

8. **(Examen 2, 2019-A)** Considere una lámina rectangular metálica de base  $B$  y altura  $H$ . El borde superior se encuentra aislado, mientras que por el borde inferior existe un flujo calor  $-J$ . El borde izquierdo se encuentra a en contacto con una fuente de calor variable descrita por una cierta función  $f(y)$  mientras que el derecho está en contacto con una fuente de calor que mantiene ese borde a una temperatura constante  $T$ . Si  $u(x, y, t)$  es la temperatura en el interior de la lámina, **plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales** que describen este problema.
9. **(Examen 2, 2018-B)** Considere una lámina rectangular metálica de base  $L$  y altura  $M$ . Los bordes inferior y derecho de la lámina se mantienen a una **temperatura** constante de 0 grados C, el borde superior se mantiene aislado (no hay flujo de temperatura) y la temperatura del borde izquierdo puede ser descrita por la función:

$$f(y) = u_0 \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi}{2M} y \right), \quad 0 \leq y \leq M, \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

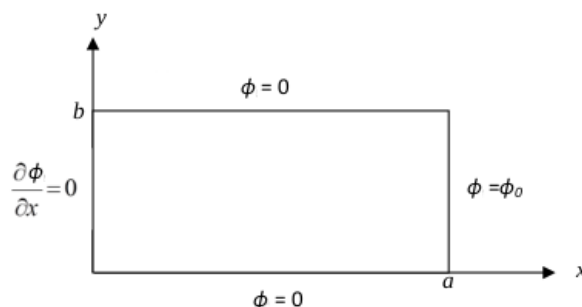
Si  $u$  es la temperatura en el interior de la lámina, determine la temperatura en el **estado estacionario** de la lámina  $u(x, y)$ . Para esto:

- Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.
  - Utilice el método de separación de variables para encontrar las EDO's asociadas al problema, y resuélvalas (puede asumir directamente la positividad o negatividad de la constante arbitraria que aparece en ellas). **Hint:** Para la EDO correspondiente a  $X(x)$  puede considerarse una solución de la forma  $X(x) = C \cosh(\rho x) + D \sinh(\rho x)$ . Aplique la respectiva condición inicial y exprese la constante  $C$  en función de la otra constante (y de la  $\tanh(\rho x)$ ).
  - Encuentre una expresión que describa la temperatura en el interior de la lámina, para todo  $x \in [0, L]$  y  $y \in [0, M]$  y determine explícitamente los coeficientes de la serie infinita que define a  $u(x, y)$ .
10. **(Examen Final, 2018-B)** Considere una lámina rectangular metálica de base  $B$  y altura  $H$ . Los bordes inferior e izquierdo de la lámina se mantienen a una **temperatura** constante de 0 grados C, el borde superior se mantiene aislado (no hay flujo de temperatura) y la temperatura del borde derecho puede ser descrita por la función:

$$f(y) = a_0 \operatorname{sen} \left( \frac{7\pi}{2H} y \right), \quad 0 \leq y \leq H, \quad a_0 \in \mathbb{R}.$$

Si  $u$  es la temperatura en el interior de la lámina, determine la temperatura en el **estado estacionario** de la lámina  $u(x, y)$ . Para esto:

- a) Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.
- b) Utilice el método de separación de variables para encontrar las EDO's asociadas al problema, y resuélvalas (puede asumir directamente la positividad o negatividad de la constante arbitraria que aparece en ellas).
- c) Encuentre una expresión que describa la temperatura en el interior de la lámina, para todo  $x \in [0, B]$  y  $y \in [0, H]$  y determine explícitamente los coeficientes de la serie infinita que define a  $u(x, y)$ .
11. **(Examen 2, 2019-A)** Encuentre una expresión para la temperatura  $u(x, y)$  en el **estado estable (o estacionario)** en el interior de una placa metálica **semi-infinita** con constante  $c^2 = 1$  de base  $\pi$  y que se prolonga indefinidamente en la dirección del eje  $y$ . Los bordes laterales se encuentran aislados y el borde inferior está descrito por la función  $f(x)$ . Suponga que la solución  $u(x, y)$  está acotada cuando  $y \rightarrow \infty$  es decir, la solución no diverge. **Hint:** Deje expresada la solución para  $y$  como una combinación de funciones exponenciales y tome el límite de  $u(x, y)$  cuando  $y \rightarrow \infty$ .
12. **(Examen Final, 2019-A)** Resuelva la ecuación de Laplace para obtener el potencial  $\phi$  en el interior de una lámina metálica rectangular de base  $a$  y altura  $b$ , sujeta a las condiciones de frontera que se muestran en la figura :



donde  $\phi_0$  es constante. No olvide determinar explícitamente los coeficientes de la serie resultante.

### EJERCICIOS ADICIONALES

13. Resuelva la ecuación de Laplace en tres dimensiones:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

en el cubo  $0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi$ , sujeta a las condiciones:

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{para } 0 \leq x, y \leq \pi$$

y tal que  $u(x, y, z)$  tome el valor 0 en las caras restantes del cubo.

**Respuesta:**

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} (\tanh(\pi \sqrt{m^2 + n^2}) \cosh(\sqrt{m^2 + n^2} z) - \sinh(\sqrt{m^2 + n^2} z)) \sin(mx) \sin(ny),$$

donde

$$A_{mn} = \frac{4}{\pi^2 \tanh(\pi \sqrt{m^2 + n^2})} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f(x, y) \sin(mx) \sin(ny) dx dy.$$

14. **Ecuación de Laplace en el disco.** El objetivo de este ejercicio es el de resolver el problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x^2 + y^2 < 1, \\ u(x, y) = f(\theta), & x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

donde  $x = \cos(\theta)$  y  $y = \sin(\theta)$ . Para ello, seguimos el siguiente procedimiento:

a) Utilizando la regla de la cadena y el cambio de variable  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , demostrar que:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

b) Aplicando el método de separación de variables, suponer que  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  y deducir que existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que:

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \quad \text{y} \quad \Theta'' + \lambda \Theta = 0$$

con condiciones  $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ .

c) Demostrar que:

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

con  $\lambda = \lambda_n = n^2$ , son las soluciones del problema:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0, \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) = 0. \end{cases}$$

d) Resolver la EDO:

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y, vía un argumento de continuidad, deducir que:

$$R_n(r) = r^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

son las soluciones posibles para esta EDO.

e) Demostrar que:

$$u_n(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n \cos(n\theta) + B_n r^n \sin(n\theta)],$$

donde

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) ds \quad \text{y} \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) ds$$

f) Demostrar que:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(s(n - \theta)) \right] ds.$$

g) Considere  $z = r \cos(s - \theta) + ir \sin(s - \theta)$ . Use la fórmula de De Moivre y estudie la suma de la serie geométrica:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

para demostrar que:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(s(n - \theta)) = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos(s - \theta) + r^2)}.$$

h) Concluya que:

$$u(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(s)}{(1 - 2r \cos(s - \theta) + r^2)} ds$$

es la solución al problema.

## AGRADECIMIENTOS

Los ejercicios adicionales de la presente hoja de ejercicios fueron elaborados durante el periodo 2018-B gracias al valioso aporte de los matemáticos Carlos Ajila y Leonardo Montoya.



**Ejercicios CP: 9, 3b, 6c, 6d, 10    CD: 1, 2, 3a, 6b, 8**

**CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET**

1. Resuelva la ecuación de la onda en dos dimensiones con condiciones de frontera tipo Dirichlet en un rectángulo  $R$  de base  $a$  y altura  $b$ :

$$(P) \begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), & (x, y) \in R, \quad t > 0 \\ u(x, y, t)|_{\partial R} = 0, & t \geq 0 \\ u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y), & (x, y) \in R \end{cases}$$

**Respuesta:**

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \cos(\lambda_{nm}ct) + B_{nm} \sin(\lambda_{nm}ct)] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right).$$

con

$$\lambda_{nm}^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots$$

2. El problema (P) del ejercicio 1 describe las oscilaciones de una membrana rectangular de base  $a$  y altura  $b$  cuyos bordes se encuentran fijos y donde las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  describen la posición y velocidad inicial de la membrana, respectivamente. Además  $c^2 = T/\rho$ , donde  $T$  es la tensión de la membrana y  $\rho$  su densidad. Utilice los resultados obtenidos en el ejercicio 1 para describir las vibraciones de una membrana rectangular con base  $a = 4$  y altura  $b = 2$ , si la tensión es de 12,5, y su densidad 2,5. La velocidad inicial es 0 y el desplazamiento inicial está dado por:

$$f(x, y) = 0,1(4x - x^2)(2y - y^2).$$

3. Encuentre la deflexión  $u(x, y, t)$  de una membrana cuadrada de lado  $\pi$  y  $c^2 = 1$  para una velocidad inicial nula y una deflexión inicial:

$$a) f(x, y) = \sin(4x) \sin(4y) \quad b) f(x, y) = \sin(x) \sin(y) \quad c) f(x, y) = xy(\pi - x)(\pi - y)$$

**Nota:** Para el literal c) resuelva completamente el ejercicio paso a paso, para los literales a) y b) utilice los resultados encontrados en el ejercicio 1.

4. Describa la deflexión  $u(x, y, t)$  de una membrana (elástica, homogénea y flexible) rectangular de base  $b$  y altura  $h$  cuyos bordes se encuentran fijos, si inicialmente la forma de la membrana puede ser descrita por la función:

$$f(x, y) = xy(x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

y si esta parte del reposo. La tensión de la membrana es constante e igual a 10 y su densidad es 3.

5. Describa la deflexión de una membrana de lados  $a$  y  $b$  y con  $c^2 = 1$  para una deflexión inicial:

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{6\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)$$

6. Represente las siguientes funciones por una **Serie de Fourier Doble**:

- a)  $f(x, y) = 1$  en  $[0, 1] \times [0, 1]$ ,                      b)  $f(x, y) = x$  en  $[0, 1] \times [0, 1]$ ,  
 c)  $f(x, y) = y$  en  $[0, 1] \times [0, 1]$ ,                      d)  $f(x, y) = xy$  en  $[0, a] \times [0, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  
 e)  $f(x, y) = xy(a - x)(b - y)$  en  $[0, a] \times [0, b]$ ,  
 $a, b \in \mathbb{R}$

**NOTA:** De forma vaga: Si  $f(x, y)$  y sus derivadas son continuas en  $R = (0, a) \times (0, b)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ , la representación de  $f(x, y)$  por **Serie de Fourier Dobles** está dada por:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{b} \right), \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b,$$

en donde los coeficientes  $C_{nm}$  están dados por:

$$C_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{b} \right) dx dy, \quad n = 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots$$

7. **(Examen 2, 2019-A)** Considere una membrana (elástica, homogénea y flexible) rectangular de base  $B$  y altura  $H$ , fija en sus bordes y de constante  $c = 1$ . Si se encuentra en reposo en la posición  $F(x, y)$  y luego se suelta. Utilice el método de separación de variables para determinar **las 3 EDO's asociadas al problema y sus respectivas condiciones iniciales**.
8. **(Examen 2, 2018-B)** Considere una membrana (elástica, homogénea y flexible) rectangular de base  $L$  y altura  $H$ , fija en sus bordes y de constante  $c = 1$ . Si se encuentra en reposo en la posición:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

y luego se suelta:

- a) Plantee la ecuación diferencial y las condiciones de frontera e iniciales que describen este problema.  
 b) Utilice el método de separación de variables para determinar las 3 EDO's asociadas al problema y sus respectivas condiciones iniciales.  
 c) Determine las tres constantes arbitrarias asociadas a las EDO's del literal b)
9. **(Examen Remedial, 2018-B)** La solución al problema:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}), & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 3, \\ u(x, y, t)|_{\partial R} = 0, & t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = x^2 + y^2, \quad u_t(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in (0, 2) \times (0, 3). \end{cases}$$

está dada por:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [A_{nm} \cos(\lambda_{nm}t) + B_{nm} \operatorname{sen}(\lambda_{nm}t)] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{3} \right).$$

Determine explícitamente y paso a paso los coeficientes  $A_{nm}$  y  $B_{nm}$ .

10. **(Examen 2, 2019-A)** La solución a un problema en dos dimensiones está dado por:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \cos(\lambda_{nm}t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{b} \right). \quad (1)$$

Determine explícitamente y paso a paso los coeficientes  $A_{nm}$ . Para esto utilice la condición inicial  $u(x, y, 0) = F(x, y)$  en (1) y llame:

$$K_n(y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi y}{b} \right) \quad (2)$$

Muestre que la condición inicial se convierte en:

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(y) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right). \quad (3)$$

Luego determine  $K_n(y)$  de la ecuación (3) y posteriormente  $A_{nm}$  de la ecuación (2) (utilizando las propiedades de ortogonalidad de la función seno). Finalmente, exprese los coeficientes  $A_{nm}$  como una integral doble de  $F(x, y)$ .