1. FUNCIONES

DEFINICIÓN 1: Función

*Dados A y B dos conjuntos, f es una **función** de A en B si:*

- $f \subseteq A \times B$;
- *para todo* $x \in A$, *existe* $y \in B$ *tal que* $(x, y) \in f$;
- *si* $(x, y) \in f$ *y* $(x, z) \in f$, *entonces* $y = z$.

Si f es una función de A en B, se escribirá $f\colon A \to B$. Y, en lugar de $(x, y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$, ya que dado x, y es único.

En otras palabras, una función f de A en B es una relación entre los elementos de A y B de modo que a cada elemento de A, hay un único elemento en B que le corresponde a x en esta relación. A ese elemento y se le llama imagen de x respecto de f y se le representa por $f(x)$.

DEFINICIÓN 2: Dominio

*Dada una función $f\colon A \to B$, el conjunto A se llama **dominio** de f y se le representa por* $\operatorname{dom} f$.

DEFINICIÓN 3: Imagen o recorrido

*Dada una función $f\colon A \to B$, la **imagen o el recorrido** de f es el conjunto*

$$\{f(x) : x \in A\},$$

que se lo representa por $\operatorname{img} f$ *o* $\operatorname{rec} f$.

DEFINICIÓN 4: Función continua por tramos

*Se dice que una función de valor real $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua por tramos** en un intervalo $[a, b]$ si se verifican las siguientes condiciones:*

- *La función f está definida y es continua en todos, excepto un número finito de puntos del intervalo $[a, b]$.*
- *Los límites*

$$f(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h),$$

$$f(x_0^-) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 - h),$$

existen en cada punto x_0 del intervalo $[a, b]$.

La notación $h \to 0^+$ significa que h tiende a 0 sólo a través de valores positivos, y los límites $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ son llamados límites por la derecha e izquierda, respectivamente. Cuando x_0 es un punto de continuidad de f, entonces

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0).$$

DEFINICIÓN 5: Conjunto simétrico

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es simétrico si para todo $x \in A$, se tiene que $-x \in A$.

DEFINICIÓN 6: Función par e impar

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, con A un conjunto simétrico, es:

- ***par** si para todo $x \in A$, $f(x) = f(-x)$;*
- ***impar** si para todo $x \in A$, $f(x) = -f(x)$.*

2. NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIÓN 7: Número Complejo

*Si x y y son números reales, el par ordenado (x, y) se llama **número complejo** si la igualdad, adición y la multiplicación de pares están definidos de la siguiente forma:*

- ***Igualdad:** Si $(x, y) = (u, v)$ entonces $x = u$ y $y = v$;*
- ***Adición:** $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$;*
- ***Multiplicación:** $(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu)$;*

para todo $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 1. Las operaciones de adición y multiplicación de números complejos satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Esto es, si x, y, z son números complejos cualesquiera, tenemos:

- **Ley conmutativa**: $x + y = y + x$, $xy = yx$.
- **Ley asociativa**: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x(yz) = (xy)z$.
- **Ley distributiva**: $x(y + z) = xy + xz$.

DEFINICIÓN 8: Unidad imaginaria

El número complejo $(0, 1)$ *se llama* ***unidad imaginaria*** *y se denota por:*

$$i = (0, 1).$$

La unidad imaginaria i *tiene la propiedad* $i^2 = -1$.

El número complejo $z = (x, y)$ también se puede denotar por: $z = x + iy$. A x se le llama **parte real** y se denota $\operatorname{Re} z$, mientras que a y se le llama **parte imaginaria**, y se denota $\operatorname{Im} z$.

DEFINICIÓN 9: Complejo conjugado

Si $z = x + iy$ *es un número complejo, se define el* ***complejo conjugado*** *de* z *denotado por* $\bar{z}$ *por:*

$$\bar{z} = x - iy.$$

DEFINICIÓN 10: Forma polar de los números complejos

Si el número complejo $(x, y) \neq (0, 0)$*, entonces los números* x *y* y *pueden expresarse en coordenadas polares:*

$$x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta,$$

de donde $z = x + iy$ *toma la* ***forma polar****:*

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

El número positivo r *se llama* ***valor absoluto*** *o* ***módulo*** *de* z*, se denota por* $|z|$ *y está dado por:*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

θ *es el* ***argumento*** *de* z *y se denota por* $\arg z$*, es decir* $\theta = \arg z$ *y* $\tan\theta = y/x$.

DEFINICIÓN 11: Desigualdad triangular

Si z_1 *y* z_2 *son dos números complejos, estos verifican la siguiente desigualdad llamada* ***triangular****:*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En general, para n *numeros complejos,* $z_1, z_2, ..., z_n$ *con* $n \in \mathbb{Z}^+$ *se verifica la desigualdad:*

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|.$$

DEFINICIÓN 12: Función exponencial compleja

Si $z = x + iy$ *es un número complejo, la* ***función exponencial compleja*** e^z *se define por:*

$$\begin{aligned} e^z : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) \end{aligned}.$$

PROPOSICIÓN 2 (Fórmula de Euler)**.** Para todo número real θ se cumple la siguiente relación:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

PROPOSICIÓN 3 (Teorema de Moivre)**.** Para todo número real θ y para todo entero positivo n se cumple la siguiente relación:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

PROPOSICIÓN 4. Todo número complejo $z \neq 0$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$z = |z|e^{i\theta},$$

donde $\theta = \arg z + 2n\pi$, y $n \in \mathbb{Z}^+$.

DEFINICIÓN 13: Funciones seno y coseno complejas

Para todo numero complejo z, las funciones ***seno y coseno*** *se definen de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \operatorname{sen}\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 14: Funciones hiperbólicas complejas

Para todo numero complejo z, las funciones ***seno y coseno hiperbólicos*** *se definen de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \cosh\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \\ \sinh\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

3. SUCESIONES Y SERIES

DEFINICIÓN 15: Sucesión infinita

Si a cada entero positivo n está asociado un número real x_n, entonces se dice que el conjunto ordenado

$$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\},$$

*define una **sucesión infinita**. Esta sucesión se denota indistintamente por $\{x_n\}$ o por $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

DEFINICIÓN 16: Función sucesión infinita

Una sucesión infinita es una función definida por:

$$\begin{aligned} x_n : \ \mathbb{Z}^+ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto x_n \end{aligned}.$$

DEFINICIÓN 17: Sucesión convergente

*Una sucesión x_n **converge** hacia el límite L si para cada número ϵ positivo, existe otro número positivo N, tal que:*

$$|x_n - L| < \epsilon,$$

*para todo $n \geq N$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ y se denota $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ o $x_n \to L$. Una sucesión que no converge se llama **divergente**.*

PROPOSICIÓN 5. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$, con $z_n = x_n + iy_n$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ converge al límite $c = a + ib$ si y solo si $\{x_n\}$ converge al límite a y $\{y_n\}$ converge al límite b.

PROPOSICIÓN 6 (Límite algebraico de sucesiones)**.** Si el $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y el $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, entonces:

- $\lim_{n\to\infty} cx_n = ca$ para todo número $c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b$ con $b \neq 0$

DEFINICIÓN 18: Sucesiones monótonas de números reales

Una sucesión $\{x_n\}$, con $x_n \in \mathbb{R}$, es:

- ***creciente** si $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$;*
- ***decreciente** si $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$;*
- ***monotona** cuando es creciente o decreciente.*

A una sucesión creciente se la denota por $\{x_n\} \nearrow$ y una decreciente por $\{x_n\} \searrow$.

DEFINICIÓN 19: Sucesiones acotadas

*Una sucesión $\{x_n\}$, con $x_n \in \mathbb{R}$, es **acotada** si existe un número positivo M tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.*

PROPOSICIÓN 7. Una sucesión real y monótona converge si y solo si es acotada.

DEFINICIÓN 20: Sucesión de sumas parciales

Una sucesión de sumas parciales denotada por $\{s_n\}$ *se forma a partir de la sucesión* $\{x_n\}$*, con* $x_n \in \mathbb{R}$*, donde* s_n *está definida por:*

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

DEFINICIÓN 21: Series infinitas

La sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ *se llama* ***serie infinita*** *o simplemente* ***serie****, y se indica por:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + ...$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ***representa*** *la sucesión* $\{s_n\}$.

DEFINICIÓN 22: Series convergentes

Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ***converge*** *si existe un número real* S *tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S,$$

y en este caso se escribe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S.$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ *diverge, entonces la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *diverge.*

! La suma S de une serie convergente no se obtiene por una adición ordinaria, sino como el límite de una sucesión de sumas parciales.

PROPOSICIÓN 8 (Linealidad de las series convergentes)**.** Si $\sum x_n$ y $\sum y_n$ son dos series infinitas convergentes de términos complejos y, α y β son constantes complejas, entonces la serie $\sum(\alpha x_n + \beta y_n)$ también converge, y su suma viene dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

PROPOSICIÓN 9 (Propiedad telescópica)**.** Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de números complejos tales que satisfacen la propiedad telescópica:

$$x_n = y_n - y_{n+1},$$

para todo número $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, la serie $\sum x_n$ converge si y solo si la sucesión $\{y_n\}$ converge, en cuyo caso tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y_1 - L,$$

donde $L = \lim_{n\to\infty} y_n$.

DEFINICIÓN 23: Serie geométrica

*Sea x un número real fijo, se define como una **serie geométrica** a aquella serie que es generada a partir de adiciones sucesivas de los términos de una progresión geométrica, es decir, aquella que tiene la forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

donde el enésimo término x^n es la potencia enésima del número x.

PROPOSICIÓN 10. Si x es un número complejo con $|x| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge y tiene suma 1/(1-x), es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}.$$

Si $x \geq 1$, la serie diverge.

DEFINICIÓN 24: Condición necesaria de convergencia de series

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, el término enésimo tiende a O, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Si el término enésimo no tiende a O, la serie es divergente.

DEFINICIÓN 25: Criterio de comparación

Sean las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ con $x_n \geq 0$ y $y_n \geq 0$. Si existe una constante positiva c tal que:

$$x_n \leq c y_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ garantiza la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

DEFINICIÓN 26: Sucesiones asintóticamente iguales

*Dos sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ de números complejos son **asintóticamente iguales** si*

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1,$$

y se denota por:

$$x_n \sim y_n,$$

para $n \to \infty$.

PROPOSICIÓN 11. Si dos series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ cuyos elementos son positivos y asintótica ente iguales, o ambas convergen o ambas divergen.

DEFINICIÓN 27: Criterio Integral de convergencia

Sea la función $f\colon [1,\infty] \to \mathbb{R}^+$ decreciente. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, sea:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

y

$$t_n = \int_1^n f(x)dx$$

entonces o ambas sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen o ambas divergen.

DEFINICIÓN 28: Criterio del Cociente

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de términos positivos tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$$

- ***Si** $L < 1$, la serie converge.*
- ***Si** $L > 1$, la serie diverge.*
- ***Si** $L = 1$, el criterio no decide.*

DEFINICIÓN 29: Criterio de la Raíz

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de términos positivos tales que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = R$$

- ***Si** $R < 1$, la serie converge.*
- ***Si** $R > 1$, la serie diverge.*
- ***Si** $R = 1$, el criterio no decide.*

DEFINICIÓN 30: Series de Potencias

Una serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_o)^n = a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)^2 + ...$$

*donde los números x, x_0 y los coeficientes a_n son complejos, se llama **serie de potencias** de $(x-x_0)$. Cada serie de potencias está asociada a un círculo de convergencia de centro x_0 y* *radio $|x - x_0|$, tal que la serie converge para todo x interior al mismo, y diverge para todo x exterior.*

DEFINICIÓN 31: Series de Taylor y McLaurin

Dada una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, infinitamente derivable en un intervalo abierto alrededor del punto x_0, la serie de potencias:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

*se llama **serie de Taylor** generada por f en x_0. El término k representa la k-ésima derivada de la función f. Una serie de McLaurin es una serie de Taylor con centro $x_0 = 0$.*

1. INTRODUCCIÓN

DEFINICIÓN 1: Función periódica

Una función $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice ***periódica*** *con periodo $p > 0$ si,*

$$f(x+p) = f(x),$$

para todo $x \in I$.

Si p es el periodo de f, también lo es cualquier múltiplo entero de p, es decir:

$$f(x+np) = f(x),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. El periodo más pequeño, es decir para $n = 1$, se llama **fundamental**.

DEFINICIÓN 2: Producto de funciones periódicas

Sean f y g dos funciones periódicas de periodo $p > 0$, el producto de estas funciones fg o cualquier combinación lineal de ellas $c_1 f + c_2 g$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, es también una función periódica de periodo p.

DEFINICIÓN 3: Producto interno de funciones

Dadas dos funciones f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, su ***producto interno*** *se denota por (f, g), y se define como:*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

para todo $x \in I = [a, b]$.

DEFINICIÓN 4: Funciones ortogonales

Dos funciones f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se dicen ***ortogonales*** *en el intervalo I, si el producto interno de f y g es cero, es decir si:*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

para todo $x \in I = [a, b]$.

DEFINICIÓN 5: Funciones mutuamente ortogonales

*A un conjunto de funciones se le denomina **mutuamente ortogonal**, si cada diferente par de funciones de ese conjunto son ortogonales entre sí.*

DEFINICIÓN 6: Ortogonalidad de las funciones seno y coseno

Las funciones $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ *y* $\cos(m\pi x/L)$ *constituyen una familia de funciones mutuamente ortogonales sobre el intervalo* $[-L, L]$. *De hecho, estas satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad:*

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n; \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = 0 \qquad \text{para todo } m, n;$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

2. FÓRMULAS DE EULER-FOURIER

DEFINICIÓN 7

Supongamos que la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

converge y tiene suma $f(x)$ *para cada* x *en el intervalo* $[-L, L]$, *es decir,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad -L \leq x \leq L.$$

Entonces los coeficientes de Fourier a_n *y* b_n *están relacionados con la función* f *mediante las siguientes **fórmulas de Euler-Fourier**:*

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx, \qquad n = 0, 1, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

3. Convergencia de Series de Fourier

Teorema 1

Sea f una función continua por tramos definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$, tal que f' es también continua por tramos en el mismo intervalo. Si f está definida fuera del intervalo de tal manera que sea periódica con periodo 2π, entonces la expansión en serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx))$$

converge a $f(x)$ para todo x donde f es continua y converge a

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en todo x donde f no es continua.

4. Cambio de intervalo

Sea $p \in \mathbb{R}^+$, es fácil probar que las funciones :

$$1, \cos\left(\frac{\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{p}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{p}\right), \ldots$$

son ortogonales, lo que sugiere una expansión en serie de Fourier para funciones definidas en el intervalo $[-p, p]$ con respecto de esta base. Teniendo en cuenta que:

$$\int_{-p}^{p} dx = 2p \ \text{ y } \int_{-p}^{p} \cos^2\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx = \int_{-p}^{p} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx = p,$$

tenemos que una función f definida en el intervalo $[-p, p]$ tendrá la expansión en series de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{p}\right)\right),$$

donde

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx \ \text{ y } \ b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx.$$

Si tomamos ahora $2p = b - a$, una función f definida en el intervalo $[a, b]$ tendrá la expansión en serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right)\right),$$

donde

$$a_k = \frac{2}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) dx \ \text{ y } \ b_k = \frac{2}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi x}{b-a}\right) dx.$$

5. Simplificaciones: Funciones pares e impares

Si $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ es una **función par**, esto es, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$, la serie de Fourier se reduce a una **serie de Fourier de cosenos**, es decir:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L,$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Si $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ es una **función impar**, esto es, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$, la serie de Fourier se reduce a una **serie de Fourier de senos**, es decir

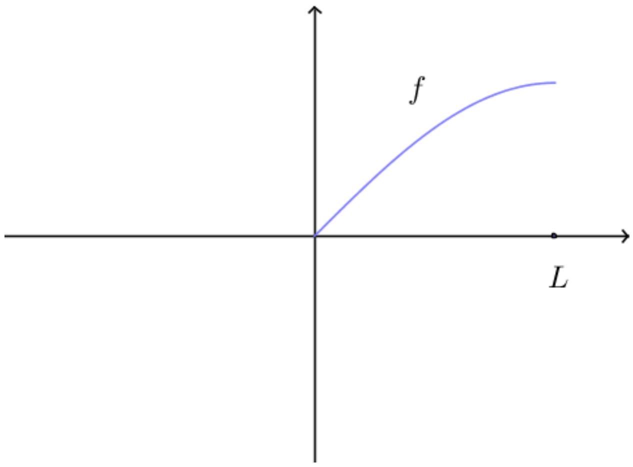
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L,$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

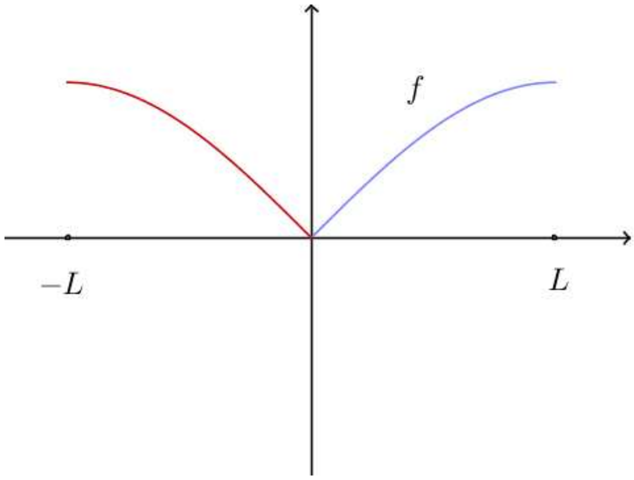
6. Expansión de medio rango

En muchos casos, y dependiendo de su aplicación, interesa representar mediante una serie de Fourier una función definida en el intervalo $[0, L]$.

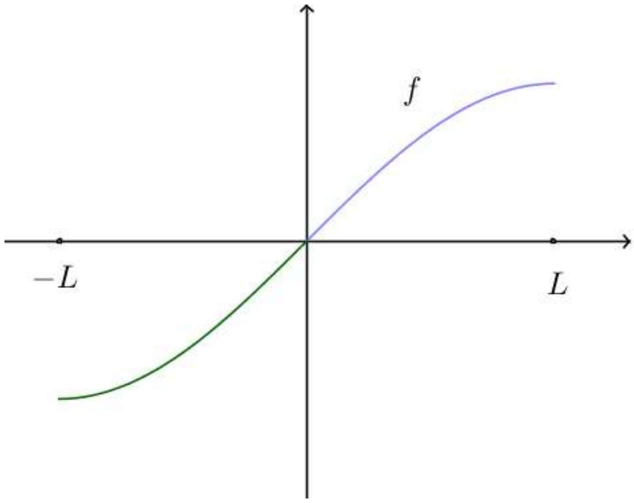


Para lograrlo se podría definir a la función en el intervalo $[-L, 0]$. Existen muchas formas para hacerlo, siendo las más importantes:

a) Reflejar a la función respecto del eje y en el intervalo $[-L, 0]$. La función es ahora par en el intervalo $[-L, L]$.



b) Reflejar la gráfica de la función respecto del origen en el intervalo $[-L, 0]$. La función ahora es impar en el intervalo $[-L, L]$.



7. Problema de Sturm-Liouville

Definición 8

Dadas las funciones $y_1, y_2, \cdots$, de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se dice que estas funciones son **ortogonales** *en el intervalo I* **con respecto a la función peso** *$r > 0$, si para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$ se tiene:*

$$(y_m, y_n) = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

para todo $x \in I = [a, b]$. La norma de la función y_m se denota por $||y_m||$, y se define como:

$$||y_m|| = \sqrt{(y_m, y_m)} = \sqrt{\int_a^b r(x) y_m^2(x) dx}.$$

DEFINICIÓN 9

Las funciones $y_1, y_2, \cdots$, de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se llaman ***ortonormales*** *(con respecto a la función peso r) si son ortogonales en I y si todas ellas tienen norma 1. Esto se puede representar a través de la* ***delta de Kronecker*** *$\delta_{m,n}$ de la siguiente manera:*

$$(y_m, y_n) = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad m = n \\ 0 & \text{if} \quad m \neq n \end{cases}$$

para todo $x \in I = [a, b]$. Para el caso particular donde $r(x) = 1$ tenemos:

$$(y_m, y_n) = \int_a^b y_m(x) y_n(x) dx = 0 \ \ m \neq n, \quad ||y_m|| = \sqrt{(y_m, y_n)} = \sqrt{\int_a^b y_m^2(x) dx}.$$

Ejemplo: Las funciones $y_m = \text{sen}(mx), m = 1, 2, \cdots$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, porque para $m \neq n$ obtenemos por integración:

$$(y_m, y_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \,\text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\right] dx$$

$$(y_m, y_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}((m-n)x)}{m-n} - \frac{\text{sen}((m+n)x)}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n.$$

En la última expresión vemos claramente que los enteros $m - n$ y $m + n$, permiten que las dos integrales se anulen. Para la norma tenemos:

$$||y_m||^2 = (y_m, y_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2mx)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\text{sen}(mx)}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

para todo $m = 1, 2, \cdots$. En consecuencia, el conjunto ortonormal correspondiente, se obtiene de la división de cada función para su respectiva norma:

$$\left\{ \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{\pi}}, \cdots \right\}$$

El siguiente teorema demuestra que para cualquier problema de Sturm - Liouville, las funciones propias asociadas son ortogonales. Es decir, en la práctica, si es posible formular un problema tipo Sturm - Liouville, entonces este teorema nos garantiza la ortogonalidad de dichas funciones propias.

8. ORTOGONALIDAD DE LAS FUNCIONES PROPIAS PARA PROBLEMAS DE STURM - LIOUVILLE

DEFINICIÓN 10: Ecuación de Sturm - Liouville

Dadas las funciones p, r positivas y la función q real, la ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma:

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

para todo $x \in [a, b]$ con las condiciones:

$$\begin{cases} k_1 y + k_2 y' = 0 & en \quad x = a \\ l_1 y + l_2 y' = 0 & en \quad x = b \end{cases}$$

con $\lambda, k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, se conoce como ***problema de Sturm - Liouville****.*

TEOREMA 2

Supongamos que las funciones p, q, r (con $r(x) > 0$) y p' en la ecuación de Sturm - Liouville son contínuas y de valores reales en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ para todo $x \in I = [a, b]$. Además, sean $y_m(x)$ y $y_n(x)$ funciones propias del problema de Sturm - Liouville asociadas a los valores propios λ_m y λ_n, respectivamente. Entonces $y_m(x)$ y $y_n(x)$ son ortogonales en ese intervalo con respecto a la función peso r, esto es,

$$(y_m, y_n) = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n.$$

9. Series Ortogonales de Polinomios: Series de Fourier Generalizadas

DEFINICIÓN 11: Serie de Fourier generalizada

Sean $y_0, y_1, y_2, \cdots$ funciones ortogonales con respecto a la función peso $r(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$, y sea $f(x)$ una función que puede representarse por medio de la serie convergente,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) + \cdots \tag{1}$$

a esta se le llama serie ortogonal, expansión ortogonal, o ***serie de Fourier generalizada****. Si las funciones y_m son funciones propias del problema de Sturm - Liouville, entonces llamamos a esta serie* ***expansión en funciones propias****.*

Dada la función $f(x)$, para determinar los coeficientes de Fourier a_m de $f(x)$ con respecto a y_0, $y_1, \cdots$, multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $r(x) y_n(x)$ para un n fijo, y luego integramos ambos lados con respecto a $x \in [a, b]$, es decir:

$$(f, y_n) = \int_a^b r f y_n dx = \int_a^b r \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m \right) y_n dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_a^b r y_m y_n dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (y_m, y_n)$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones, todas las integrales de la derecha son cero, excepto para $m = n$. Entonces tenemos,

$$(f, y_n) = a_n (y_n, y_n) = a_n ||y_n||^2.$$

Si asumimos que todas las funciones y_m tienen normas no nulas, entonces los coeficientes de Fourier toman la forma:

$$a_m = \frac{(f, y_m)}{||y_m||^2} = \frac{1}{||y_m||^2} \int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

1. Integral de Fourier

DEFINICIÓN 1: Función absolutamente integrable

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice ***absolutamente integrable*** *si la integral de Riemann impropia*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

es convergente.

DEFINICIÓN 2: Integral de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función absolutamente integrable. Para cada $w \geq 0$ se define

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv)\, dv \qquad y \qquad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv)\, dv.$$

A la expresión

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos(wx) + B(w)\operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

se la llama la ***representación de $f(x)$ por una integral de Fourier****, y a la integral que aparece en esta expresión se la llama* ***integral de Fourier****.*

!

La expresión

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos(wx) + B(w)\operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

en la definición anterior no debe entenderse como una igualdad. Se trata de un abuso de lenguaje para indicar que

$$\int_0^{\infty} [A(w)\cos(wx) + B(w)\operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

es la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier.

TEOREMA 1: Existencia de la integral de Fourier

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente integrable continua por tramos en todo intervalo acotado y si f admite derivadas por izquierda y derecha en todo punto, entonces $f(x)$ admite una representación por una integral de Fourier para todo $x \in \mathbb{R}$. La integral de Fourier *converge a $f(x)$ en los puntos $x \in \mathbb{R}$ donde f es continua y hacia*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en los puntos $x \in \mathbb{R}$ donde f es discontinua.

2. Integrales Fourier de seno y coseno

Cuando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par que admite una representación por una integral de Fourier, se tiene, para $w \geq 0$, que

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv) \, dv = 0$$

y

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv) \, dv = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(v) \cos(wv) \, dv,$$

gracias a la imparidad y paridad, respectivamente, de los integrandos.

Definición 3: Integral de Fourier de Coseno

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par absolutamente integrable y si para cada $w \geq 0$,

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(v) \cos(wv) \, dv,$$

a la expresión

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} A(w) \cos(wx) \, dx$$

se la llama la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier de coseno *y a la integral en dicha expresión se la denomina* ***integral de Fourier de coseno****.*

Análogamente, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar, para $w \geq 0$ se tiene que

$$A(w) = 0 \qquad \text{y} \qquad B(w) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(vw) \, dv.$$

Definición 4: Integral de Fourier de Seno

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar absolutamente integrable y si para cada $w \geq 0$,

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv) \, dv,$$

a la expresión

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} B(w) \operatorname{sen}(wx) \, dx$$

se la llama la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier de seno *y a la integral en dicha expresión se la denomina* ***integral de Fourier de seno****.*

3. Transformada de Fourier Coseno y Seno

Definición 5: Transformada de Fourier Coseno

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par, la **transformada de Fourier coseno** de $f(x)$ *se define por:*

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\cos(wx)dx$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $w \geq 0$. Por otro lado, la **transformada de Fourier coseno inversa** de $\hat{f}_c(w)$ *se define por:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(w)\cos(wx)dw$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $w \geq 0$.

Definición 6: Transformada de Fourier Seno

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impar, la **transformada de Fourier seno** de $f(x)$ *se define por:*

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(wx)dx$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $w \geq 0$. Por otro lado, la **transformada de Fourier seno inversa** de $\hat{f}_s(w)$ *se define por:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(w)\operatorname{sen}(wx)dw$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $w \geq 0$.

Otras notaciones para las transformadas de seno y coseno son:

$$\mathscr{F}_c(f) = \hat{f}_c, \quad \mathscr{F}_s(f) = \hat{f}_s,$$

y para sus inversas: $\mathscr{F}_c^{-1}$ y $\mathscr{F}_s^{-1}$.

Teorema 2: Existencia de las transformada de Fourier de cosenos y senos

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente integrable sobre $[0, +\infty[$ y continua por partes sobre cada intervalo acotado, entonces la transformada de Fourier de cosenos y senos de f existe.

Teorema 3: Linealidad de la transformada de Fourier de cosenos y senos

Si las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tienen transformada de Fourier de cosenos y senos, también la tiene $af + bg$ para cualquier valor de las constantes a y b. Además:

$$\mathscr{F}_c(af + bg) = a\mathscr{F}_c(f) + b\mathscr{F}_c(g) \qquad y \qquad \mathscr{F}_s(af + bg) = a\mathscr{F}_c(f) + b\mathscr{F}_s(g).$$

En efecto, basta notar que:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_c(af+bg)(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty [af(x)+bg(x)]\cos(wx)\,dx \\ &= a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(wx)\,dx + b\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(x)\cos(wx)\,dx \\ &= a\mathscr{F}_c(f)(w)+b\mathscr{F}_c(f)(w),\end{aligned}$$

y de manera similar se prueba para la transformada de seno.

TEOREMA 4: Transformada de coseno y seno de la derivada

Sea f una función continua y absolutamente integrable tal que f' es continua por partes sobre cualquier intervalo finito y tal que $f(x)\to 0$ cuando $x\to\infty$. Entonces

a) $\mathscr{F}_c\{f'(x)\} = w\mathscr{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$.

b) $\mathscr{F}_s\{f'(x)\} = -w\mathscr{F}_c\{f(x)\}$.

c) $\mathscr{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathscr{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$.

d) $\mathscr{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathscr{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0)$.

Los literales **c)** y **d)** pueden obtenerse al calcular $\mathscr{F}_c\{f''\}$ asumiendo que f' y f'' obedecen los literales **a)** y **b)**:

$$\mathscr{F}_c\{f''(x)\} = w\mathscr{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0).$$

4. TRANSFORMADA DE FOURIER

DEFINICIÓN 7: Forma compleja de la integral de Fourier

La representación en integral de Fourier de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ puede expresarse también por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{iw(x-v)}\,dv\,dw,$$

*que es llamada la **forma compleja de la integral de Fourier**.*

La integral de Fourier está dada por:

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos(wx)+B(w)\operatorname{sen}(wx)]\,dw$$

, donde

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv.$$

Si substituimos los valores de A y B tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v)[\cos(wv)\cos(wx) + \operatorname{sen}(wv)\operatorname{sen}(wx)]\,dv\,dw \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx - wu)\,dv\right] dw. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\cos(wx - wu) = \cos(wu - wx),$$

de donde la integral entre corchetes es una función par de w y tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos(wx - wu)\,dv\right] dw.$$

Como el $\operatorname{sen}(wx - wv)$ es una función impar de w tenemos que:

$$\int_{-\infty}^\infty f(v)\operatorname{sen}(wx - wu)\,dv$$

es una función impar de w, lo que implica que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(v)\operatorname{sen}(wx - wu)\,dv\right] dw = 0.$$

Así, podemos expresar a $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty [f(v)\cos(wx - wu) + if(v)\operatorname{sen}(wx - wu)]\,dv\,dw$$

y haciendo uso de la fórmula de Euler tenemos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(v)e^{iw(x-v)}\,dv\,dw$$

que es llamada la **forma compleja de la integral de Fourier**. Esta última expresión puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(v)e^{-iwv}\,dv\right] e^{iwx}\,dw.$$

donde la expresión entre corchetes es una función de w que notaremos por $\hat{f}(w)$ y es llamada la **transformada de Fourier**.

DEFINICIÓN 8: Transformada de Fourier y Transformada de Fourier Inversa

La ***transformada de Fourier*** *de la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *está definida como*

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-iwx}\,dx.$$

Con esto la fórmula anterior se escribe como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(w)e^{iwx}\,dw,$$

que es llamada la ***transformada inversa de Fourier*** *de* $\hat{f}(w)$.

TEOREMA 5: Existencia de la Transformada de Fourier

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable y contínua a trozos en cada intervalo finito, entonces la transformada de Fourier $\hat{f}(w)$ de $f(x)$ existe.

Ejemplo 1.- Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x)$ definida por,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Solución: Reemplazando la función en la formula de la transformada de Fourier tenemos:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iwx}}{-iw}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{e^{-iw} - e^{iw}}{-iw\sqrt{2\pi}}.$$

Teniendo en cuenta que $e^{iw} - e^{-iw} = 2i \operatorname{sen} w$ obtenemos,

$$\hat{f}(w) = \frac{-2i \operatorname{sen} w}{-iw\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} w}{w}.$$

Ejemplo 2.- Calcular la transformada de Fourier de la función $f(x)$ definida por,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x > 0, \quad a > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución: Reemplazando la función en la formula de la transformada de Fourier tenemos:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ax} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-(a+iw)x} dx = \frac{e^{-(a+iw)x}}{\sqrt{2\pi}(a+iw)x}\bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+iw)x}.$$

4. INTERPRETACIÓN FÍSICA: ESPECTRO

Como sabemos, la inversa de la transformada de Fourier de $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(w)\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{iwx} dx \tag{1}$$

La naturaleza esta ecuación queda aclarada si la entendemos como una superposición de oscilaciones sinusoidales de todas las posibles frecuencias, llamada ***representación espectral***. Este nombre proviene de la óptica en donde la luz es una superposición de diferentes colores o ***frecuencias***. En esta ecuación, $\hat{f}(w)$ mide la intensidad de $f(x)$ en el intervalo de frecuencias entre comprendido entre w y $w + dw$. Visto como un sistema de osciladores de diferentes frecuencias w, en los que mw^2A^2 representa la energía total del sistema proveniente de la frecuencia w, entonces la integral

$$\int_a^b |\hat{f}(w)|^2 dw,$$

viene a representar justamente la ***energía total del sistema*** físico en el intervalo de las frecuencias comprendidas desde a hasta b.

TEOREMA 6: Linealidad de la Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una transformación lineal, es decir para toda función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y para* $a, b \in \mathbb{R}$*:*

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración: Reemplazamos el argumento del lado izquierdo de la útima expresión, en la definición de transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{af(x) + bg(x)\} e^{-iwx} dx,$$

desarrollando el integrando obtenemos,

$$\mathcal{F}\{af(x)+bg(x)\} = a\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx\right\} + b\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx\right\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}$$

TEOREMA 7: Transformada de Fourier de Derivadas

Si $f\colon R \to R$ *es una función contínua tal que,* $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ *y además, si* $f'(x)$ *absolutamente integrable, entonces:*

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*, y* $w \geq 0$.

Demostración: Partiendo de la definición de transormada de Fourier, tenemos:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx} dx.$$

Integrando por partes:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x)e^{-iwx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx \right].$$

La naturaleza de la función anula el primer termino (por hipótesis), entonces obtenemos,

$$\mathcal{F}\{f'(x)\}(w) = iw\mathcal{F}\{f(x)\}(w).$$

Ahora, si aplicamos dos veces sucesivas el teorema, obtenemos

$$\mathcal{F}\{f''(x)\}(w) = iw\mathcal{F}\{f'(x)\}(w) = (iw)^2\mathcal{F}\{f(x)\}(w) = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}(w).$$

Esta idea puede seguir aplicándose de manera similar para derivadas superiores para obtener,

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\}(w) = (iw)^{(n)}\mathcal{F}\{f(x)\}(w).$$

Ejemplo 1.- Encontrar la transformada de Fourier de la función $f(x) = xe^{-x^2}$

Solución: Aplicando la definición de transformada de Fourier tenemos,

$$\mathcal{F}\{xe^{-x^2}\} = \mathcal{F}\left\{\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)'\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left\{\left(e^{-x^2}\right)'\right\} = -\frac{1}{2}iw\mathcal{F}\left\{e^{-x^2}\right\}. \quad (*)$$

Por otro lado, si calculamos la transformada de Fourier de e^{-x^2} tenemos,

$$\mathcal{F}\left\{e^{-x^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-iwx}dx.$$

Trabajando con el argumento $-x^2 - iwx$ tenemos,

$$-x^2 - iwx = -(x^2 + iwx) = -\left[x^2 + 2\left(\frac{1}{2}iw\right)x + \frac{1}{4}i^2w^2 - \frac{1}{4}i^2w^2\right] = -\left(x + \frac{1}{2}iw\right)^2 - \frac{1}{4}w^2,$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\left\{e^{-x^2}\right\} = \frac{e^{-\frac{1}{4}w^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x+\frac{1}{2}iw\right)^2}dx = \frac{e^{-\frac{1}{4}w^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt.$$

En donde hemos hecho el cambio de variable $t = x + \frac{1}{2}iw$. Recordando que la distribución normal standar obedece la condición de normalización,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}ds = 1 \quad \text{con} \quad t = \frac{s}{\sqrt{2}} \quad \text{tenemos} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Reemplazando en la expresión anterior obtenemos,

$$\mathcal{F}\left\{e^{-x^2}\right\} = \frac{e^{-\frac{1}{4}w^2}}{\sqrt{2}}.$$

Finalmente, reemplazando en la ecuación (*) tenemos,

$$\mathcal{F}\{xe^{-x^2}\} = -\frac{1}{2}iw\mathcal{F}\left\{e^{-x^2}\right\} = -\frac{iw}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}w^2}.$$

DEFINICIÓN 9: Convolución

La **convolución** *de dos funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por,*

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 8: Teorema de Convolución

Si las funciones f y g son contínuas a trozos, acotadas, y absolutamente integrables, entonces

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\}(w) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}(w) \cdot \mathcal{F}\{g\}(w) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w).$$

Demostración: Por definición tenemos,

$$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dpe^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)e^{-iwx}dxdp.$$

Si tomamos el cambio de variable $x = p + q, dx = dq$ obtenemos,

$$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(q)e^{-iw(p+q)} dq dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-iwp} dp \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(q)e^{-iwq} dq \right],$$

y pot tanto,

$$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}(w) \right] \cdot \left[\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{g\}(w) \right] = \sqrt{2\pi}\hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w)$$

! Aplicando la transformada de Fourier inversa en ambos lados de la ecuación obtenemos un resultado muy importante,

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx} dw,$$

que será usado mas adelante en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Ejemplo.- Dadas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$,respectivamente. Calcular su producto de convolición en el intervalo $[0, t]$ con t fijo y $t \in \mathbb{R}$. **Solución:** Aplicando la definición de convolución,

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{0}^{t} f(p)g(x-p)dp = \int_{0}^{t} e^{-p} \operatorname{sen}(x-p)dp.$$

Resolviendo la última integral por partes tenemos,

$$I = \int e^{-p} \operatorname{sen}(x-p)dp = e^{-p}\cos(x-p) + \int e^{-p}\cos(x-p)dp$$

$$I = e^{-p}\cos(x-p) + \left(-e^{-p}\operatorname{sen}(x-p) - \int e^{-p}\operatorname{sen}(x-p)dp \right).$$

de donde tenemos que,

$$I = \frac{e^{-p}}{2}[\cos(x-p) - \operatorname{sen}(x-p)].$$

Evaluando en los límites del intervalo obtenemos,

$$(f*g)(x) = \int_{0}^{t} e^{-p}\operatorname{sen}(x-p)dp = \frac{1}{2}\left[e^{-t}(\cos(x-t) - \operatorname{sen}(x-t)) + \operatorname{sen} x - \cos x \right].$$

TRANSFORMADAS de FOURIER DE COSENO

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = \mathcal{F}_c(f)$	
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$	
2	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{a\pi}{2}$	($\Gamma(a)$ see App. A3.1.)
3	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right)$	
4	$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$	
5	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}$	
6	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Re}(a + iw)^{n+1}$	Re = Real part
7	$\begin{cases} \cos x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} + \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$	
8	$\cos(ax^2) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right)$	
9	$\sin(ax^2) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right)$	
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - u(w - a))$	(See Sec. 6.3.)
11	$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{2}{w^2}$	
12	$J_0(ax) \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - w^2}} (1 - u(w - a))$	(See Secs. 5.5, 6.3.)

	$f(x)$	$\hat{f}_s(w) = \mathscr{F}_s(f)$	
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{1-\cos aw}{w}\right]$	
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$	
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$	
4	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Gamma(a)}{w^a}\sin\frac{a\pi}{2}$	($\Gamma(a)$ see App. A3.1.)
5	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{w}{a^2+w^2}\right)$	
6	$\frac{e^{-ax}}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\arctan\frac{w}{a}$	
7	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n!}{(a^2+w^2)^{n+1}}\operatorname{Im}(a+iw)^{n+1}$	Im = Imaginary part
8	$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$	
9	$xe^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}}e^{-w^2/4a}$	
10	$\begin{cases} \sin x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} - \frac{\sin a(1+w)}{1+w}\right]$	
11	$\frac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,u(w-a)$	(See Sec. 6.3.)
12	$\arctan\frac{2a}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{\sin aw}{w}e^{-aw}$	

TRANSFORMADAS de FOURIER DE SENO

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathscr{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{if } 0 < x < b \\ 2x - b & \text{if } b < x < 2b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{-2ibw}}{\sqrt{2\pi}w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iax} & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin b(w - a)}{w - a}$
8	$\begin{cases} e^{iax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a - w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}\,e^{-w^2/4a}$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ if $\|w\| < a$; $\quad 0$ if $\|w\| > a$

TRANSFORMADAS de FOURIER

Kreyszig Erwin, Advanced engineering mathematics, 2011

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

DEFINICIÓN 1: Ecuación diferencial ordinaria

Sea $I \subseteq R$ un intervalo abierto y $k \in \mathbb{N}^*$. Una ecuación diferencial ordinaria de orden k *es un expresión de la forma*

$$F(u^{(k)}(x), u^{(k-1)}(x), \ldots, u'(x), u(x), x) = 0, \quad x \in I,$$

donde

$$F : \mathbb{R}^{k+1} \times I \to \mathbb{R}$$

es una función conocida y $u : I \to \mathbb{R}$ es una función a ser determinada.

DEFINICIÓN 2: Solución de una ecuación diferencial ordinaria

Con las mismas notaciones de la definición anterior, una función $u_0 : I \to \mathbb{R}$ se dice que es una solución *de la ecuación diferencial*

$$F(u^{(k)}(x), u^{(k-1)}(x), \ldots, u'(x), u(x), x) = 0, \quad x \in I,$$

si u_0 es k veces derivable en I y si la igualdad

$$F(u_0^{(k)}(x), u_0^{(k-1)}(x), \ldots, u_0'(x), u_0(x), x) = 0$$

se verifica para todo $x \in I$.

2. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función k veces diferenciable en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se denotará su diferencial de k-ésimo orden por $D^k u : \Omega \to \mathbb{R}^{n^k}$.

DEFINICIÓN 3: Ecuación en derivadas parciales

Sean $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, y $\Omega \subseteq R^n$ un conjunto abierto. Una ecuación en derivadas parciales de orden k *es un expresión de la forma*

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega$$

donde

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times R^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

es un campo escalar conocido y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es un campo escalar a ser determinado.

DEFINICIÓN 4: Solución de una ecuación en derivadas parciales

Con las mismas notaciones de la definición anterior, un campo escalar $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es una solución *de la ecuación diferencial*

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

si u_0 es k veces diferenciable en Ω y si la igualdad

$$F(D^k u_0(x), D^{k-1}u_0(x), \ldots, Du_0(x), u_0(x), x) = 0$$

se verifica para todo $x \in \Omega$.

3. SISTEMAS DE EDP'S

DEFINICIÓN 5

Sistema de EDP's de orden k Sean $k \in \mathbb{N}^*$, $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq 2$, y $\Omega \subseteq R^n$ un conjunto abierto. Una sistema de ecuaciones en derivadas parciales de orden *k es un expresión de la forma*

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(x), D^{k-1}\mathbf{u}(x), \ldots, D\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x), x) = 0, \quad x \in \Omega$$

donde

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \cdots \times R^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}$$

es un campo vectorial conocida y $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ es un campo vectorial a ser determinado.

DEFINICIÓN 6: Solución de un sistema de EDP's

Con las mismas notaciones de la definición anterior, un campo vectorial $\mathbf{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es una solución *del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(x), D^{k-1}\mathbf{u}(x), \ldots, D\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x), x) = 0, \quad x \in \Omega$$

si $\mathbf{u}_0$ es k veces diferenciable en Ω y si la igualdad

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}_0(x), D^{k-1}\mathbf{u}_0(x), \ldots, D\mathbf{u}_0(x), \mathbf{u}_0(x), x) = 0$$

se verifica para todo $x \in \Omega$.

! Recordemos que si $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial (escalar si $m = 1$) diferenciable en el punto $x_0 \in \Omega$, el diferencial de $\mathbf{u}$ en el punto x_0 es una aplicación lineal $D\mathbf{u}(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, de donde $D\mathbf{u}(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. En particular, si $\mathbf{u}$ es diferenciable en cada punto de Ω, esto nos permite definir una aplicación $D : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Ahora, dado que los espacios vectoriales $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $\mathbb{R}^{mn}$ son isomorfos, podemos considerar que $D\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^{mn}$.

! De manera análoga, se tiene que $D^k\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^{mn^k}$ cuando $\mathbf{u}$ es un campo vectorial k veces diferenciable.
Este razonamiento justifica la elección del dominio para los campos F y $\mathbf{F}$ en las dos definiciones precedentes.

DEFINICIÓN 7

Una ecuación en derivadas parciales se llama ***lineal****, si esta es lineal respecto a la función buscada y todas sus derivadas que forman parte de la ecuación. En caso contrario se llama no lineal. La ecuación más general en derivadas parciales de segundo orden lineal tiene la forma*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0$$

donde al menos uno de los coeficientes $a_{jk}(x)$ es diferente de cero.

DEFINICIÓN 8

Una ecuación no lineal con la parte principal lineal se la conoce como ***semilineal****. La ecuación general en derivadas parciales de segundo orden semilineal tiene la forma:*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, + \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

DEFINICIÓN 9: Ecuación Homogénea

Cuando cada término de la ecuación diferencial contiene la función o sus derivadas esta ecuación se dice homogénea.

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) = 0,$$

es decir $d(x) = 0$, mientras que la ecuación

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0$$

es no homogénea.

4. CLASIFICACIÓN DE EDP'S DE SEGUNDO ORDEN

DEFINICIÓN 10: Clasificación de EDP's lineales de segundo orden

La ecuación diferencial

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x,y)$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales se dice:

- Hiperbólica *si* $B^2 - 4AC > 0$;
- Parabólica *si* $B^2 - 4AC = 0$;
- Elíptica *si* $B^2 - 4AC < 0$.

Por ejemplo:

1. La ecuación de la onda unidimensional
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
es una ecuación hiperbólica.

2. La ecuación del calor unidimensional
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
es una ecuación parabólica.

3. La ecuación de Laplace en dos dimensiones
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
es una ecuación elíptica.

4. Método de Separación de Variables

Las condiciones de frontera o contorno en conjunto con las condiciones iniciales determinarán de manera única el movimiento de la cuerda, que esta determinado por su deflección y la manera como ésta evoluciona en el espacio y en el tiempo. En términos matemáticos, la solución esta definida por su función de onda $u(x,t)$ con $x \in [0, L]$, y $t \geq 0$.

Definición 11: Condiciones de Frontera

Dado que la cuerda esta firmemente sujetada en los puntos $x = 0$ y $x = L$ se concluye que, $\forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ la función de onda $u(x,t)$ debe ser cero en esos puntos, es decir,

$$u(x,t)|_{x=0} = u(0,t) = 0 \quad \textit{para el extremo fijo en } x = 0, \forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0$$
$$u(x,t)|_{x=L} = u(L,t) = 0 \quad \textit{para el extremo fijo en } x = L, \forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

Deben existir 2 condiciones de frontera porque la ecuación es de grado 2 en la variable espacial x.

Definición 12: Condiciones Iniciales

Además, la forma del movimiento inicial, esto es la solución al tiempo $t = 0$, esta definida en cualquier punto x por:

$$u(x,t)|_{t=0} = u(x,0) = f(x) \quad \textit{para el tiempo } t = 0, \forall x \in [0.L]$$
$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{t=0} = u_t(0,t) = g(x) \quad \textit{para el tiempo } x = 0, \forall x \in [0.L]$$

Aquí, $f(x)$ representan la deflección inicial y $g(x)$ la velocidad de la deflección inicial. Ambas deben ser conocidas como dato inicial para la resolución del problema. Deben existir 2 condiciones iniciales porque la ecuación es de grado 2 en la variable temporal t.

4.1 Método de Separación de Variables

Nuestro problema es resolver la ecuación de onda homogénea,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

Sujeto a las condiciones de frontera $BCs : \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ e iniciales $ICs : \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_t(0,t) = 0 \end{cases}$

Este método consiste los siguientes tres pasos:

PASO 1.- Asumir que la solución se puede prescribir (ansatz) como el producto de 2 funciones: la primera función que dependa solo de la variable x y la segunda función que dependa solo de la variable t. Es decir, para la solución de la ecuación de onda tenemos el ansatz,

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{2}$$

Reemplazamos en la ecuación (1) y al resultado lo dividimos para el ansatz origuinal (2). Acomodamos solo la variable espacial x a la izquierda, y la constante junto a la variable temporal a la derecha. Puesto que tenemos una igualdad en la que el 1er lado depende solo de x y el 2do depende solo de t, entonces para que ambos lados sean iguales, se requiere que sean iguales a una constante, llamemos k. Esto nos permite formar 2 EDOs una para $X(x)$ y otra para $T(t)$.

PASO 2.- Resolvemos la EDO espacial sujeto a las condiciones de frontera $BCs : \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

PASO 3.- Finalmente, usando series de Fourier y el principio de superposición, ensamblamos las soluciones espaciales y temporales obtenidas en el paso 2, asegurandonos de que nuestra solución cumpla con las condiciones iniciales.

$$ICs : \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_t(0,t) = 0 \end{cases}$$

que serviran para definir totalmente a la solución temporal.

Verificación.-

Consiste en comprobar que la solución encontrada satisface no solo la ecuación de onda (1), sino también, debe satistacer las condiciones de frontera e iniciales.

TEOREMA 1: Teorema Fundamental de Superposición

Si u_1 y u_2, dos funciones de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, son soluciones de una EDP lineal y homogénea en Ω, entonces la combinación lineal de ellas u, con:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ también es solución (de esa EDP en Ω).