1. FUNCIONES

DEFINICIÓN 1: Función

Dados A y B dos conjuntos, f es una **función** *de A en B si:*

- $f \subseteq A \times B$;
- *para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$;*
- *si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.*

Si f es una función de A en B, se escribirá $f : A \to B$. Y, en lugar de $(x, y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$, ya que dado x, y es único.

En otras palabras, una función f de A en B es una relación entre los elementos de A y B de modo que a cada elemento de A, hay un único elemento en B que le corresponde a x en esta relación. A ese elemento y se le llama imagen de x respecto de f y se le representa por $f(x)$.

DEFINICIÓN 2: Dominio

Dada una función $f : A \to B$, el conjunto A se llama **dominio** *de f y se le representa por* $\operatorname{dom} f$.

DEFINICIÓN 3: Imagen o recorrido

Dada una función $f : A \to B$, la **imagen o el recorrido** *de f es el conjunto*

$$\{f(x) : x \in A\},$$

que se lo representa por $\operatorname{img} f$ o $\operatorname{rec} f$.

DEFINICIÓN 4: Función continua por tramos

Se dice que una función de valor real $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua por tramos** *en el intervalo $I = [a, b]$ si se verifican las siguientes condiciones:*

- *La función f está definida y es continua en todos, excepto un número finito de puntos del intervalo $[a, b]$.*
- *Los límites laterales:*

$$f(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h),$$

$$f(x_0^-) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 - h),$$

existen en cada punto x_0 del intervalo $[a,b]$.

La notación $h \to 0^+$ significa que h tiende a 0 sólo a través de valores positivos, y los límites $f(x_0^+)$ y $f(x_0^-)$ son llamados límites por la derecha e izquierda, respectivamente. Cuando x_0 es un punto de continuidad de f, entonces

$$f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0).$$

DEFINICIÓN 5: Conjunto simétrico

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es simétrico si para todo $x \in A$, se tiene que $-x \in A$.

DEFINICIÓN 6: Función par e impar

Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, con A un conjunto simétrico, es:

- ***par** si para todo $x \in A$, $f(x) = f(-x)$;*
- ***impar** si para todo $x \in A$, $f(x) = -f(x)$.*

2. NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIÓN 7: Número Complejo

*Si x y y son números reales, el par ordenado (x,y) (denotado por $z = (x,y)$) se llama **número complejo** si la igualdad, adición y la multiplicación de pares están definidos de la siguiente forma:*

- ***Igualdad:** Si $(x,y) = (u,v)$ entonces $x = u$ y $y = v$;*
- ***Adición:** $(x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)$;*
- ***Multiplicación:** $(x,y)(u,v) = (xu - yv, xv + yu)$;*

para todo $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Al conjunto de todos los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

PROPOSICIÓN 1. Las operaciones de adición y multiplicación de números complejos satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Es decir:

- **Ley conmutativa**: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1.$
- **Ley asociativa**: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \qquad z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3.$
- **Ley distributiva**: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$

para todo $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Además, los números complejos cuentan con **neutro aditivo:** $(0,0)$ y **neutro multiplicativo:** $(1,0)$.

DEFINICIÓN 8: Unidad imaginaria

El número complejo $(0,1)$ *se llama* ***unidad imaginaria*** *y se denota por:*

$$i = (0,1).$$

La unidad imaginaria i *tiene la propiedad* $i^2 = -1$.

El número complejo $z = (x, y)$ también se puede denotar por:

$$z = x + iy.$$

A x se le llama **parte real** y se denota $\operatorname{Re} z$, mientras que a y se le llama **parte imaginaria**, y se denota $\operatorname{Im} z$.

DEFINICIÓN 9: Complejo conjugado

El ***complejo conjugado*** *de* $z = x + iy$ *denotado por* $\bar{z}$ *se define como:*

$$\bar{z} = x - iy.$$

Es fácil demostrar que las partes real e imaginaria de z se pueden expresar como:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

DEFINICIÓN 10: Forma polar de los números complejos

Dado el número complejo $z = (x, y)$, *con* $(x, y) \neq (0,0)$, *sus componentes* x *y* y *pueden expresarse en coordenadas polares como:*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

El número positivo r *se llama* ***valor absoluto*** *o* ***módulo*** *de* z, *(también denotado por* $|z|$*) y está dado por:*

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

θ *es el* ***argumento*** *de* z *y se denota por* $\arg z$, *es decir* $\theta = \arg z$ *y se obtiene de* $\tan\theta = y/x$. *Por tanto,* $z = x + iy$ *toma la* ***forma polar***:

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta).$$

DEFINICIÓN 11: Desigualdad triangular

Si z_1 *y* z_2 *son dos números complejos, estos verifican la siguiente desigualdad llamada* ***triangular***:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

En general, para n *numeros complejos,* $z_1, z_2, ..., z_n$ *con* $n \in \mathbb{Z}^+$ *se verifica la desigualdad:*

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|.$$

DEFINICIÓN 12: Función exponencial compleja

*Si $z = x + iy$ es un número complejo, la **función exponencial compleja** e^z se define por:*

$$\begin{aligned} e^z\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \end{aligned}.$$

PROPOSICIÓN 2 (Fórmula de Euler)**.** Para todo número real θ se cumple la siguiente relación:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta.$$

PROPOSICIÓN 3 (Teorema de Moivre)**.** Para todo número real θ y para todo entero positivo n se cumple la siguiente relación:

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

PROPOSICIÓN 4. Todo número complejo $z \neq 0$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$z = |z|e^{i\theta},$$

donde $\theta = \arg z + 2n\pi$, y $n \in \mathbb{Z}^+$.

DEFINICIÓN 13: Funciones seno y coseno complejas

*Para todo numero complejo z, las funciones **seno y coseno** se definen de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 14: Funciones hiperbólicas complejas

*Para todo numero complejo z, las funciones **seno y coseno hiperbólicos** se definen de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} \cosh\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

3. Sucesiones y Series

Definición 15: Sucesión infinita

Si a cada entero positivo n está asociado un número real o complejo x_n, entonces se dice que el conjunto ordenado

$$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\},$$

*define una **sucesión infinita**. Esta sucesión se denota indistintamente por:*

$$\{x_n\}, \qquad ó \qquad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

.

Definición 16: Función sucesión infinita

Una sucesión infinita es una función definida por:

$$\begin{aligned} x_n : \ \mathbb{Z}^+ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto x_n \end{aligned}.$$

Definición 17: Sucesión convergente

*Una sucesión x_n **converge** hacia el límite L si para cada número ϵ positivo, existe otro número positivo N, tal que:*

$$|x_n - L| < \epsilon,$$

*para todo $n \geq N$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ y se denota $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ o $x_n \to L$. Una sucesión que no converge se llama **divergente**.*

Proposición 5 (Límite algebraico de sucesiones)**.** Si el $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ y el $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

- $\lim_{n\to\infty} cx_n = ca$ para todo número $c \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a/b$ con $b \neq 0$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm iy_n = a + ib$

Definición 18: Sucesiones monótonas de números reales

Una sucesión $\{x_n\}$, con $x_n \in \mathbb{R}$, es:

- ***creciente*** *si $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$;*

- ***decreciente*** *si* $x_n \geq x_{n+1}$*, para todo* $n \geq 1$*;*
- ***monotona*** *cuando es creciente o decreciente.*

A una sucesión creciente se la denota por $\{x_n\} \nearrow$ *y una decreciente por* $\{x_n\} \searrow$.

Definición 19: Sucesiones acotadas

Una sucesión $\{x_n\}$*, con* $x_n \in \mathbb{R}$*, es* ***acotada*** *si existe un número positivo* M *tal que* $|x_n| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$.

Proposición 6. Una sucesión real y monótona converge si y solo si es acotada.

Definición 20: Sucesión de sumas parciales

Una sucesión de sumas parciales denotada por $\{s_n\}$ *se forma a partir de la sucesión* $\{x_n\}$*, con* $x_n \in \mathbb{R}$*, donde* s_n *está definida por:*

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Definición 21: Series infinitas

La sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ *se llama* ***serie infinita*** *o simplemente* ***serie****, y se indica por:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ***representa*** *la sucesión* $\{s_n\}$.

Definición 22: Series convergentes

Se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ***converge*** *si existe un número real* S *tal que:*

$$\lim_{n \to \infty} s_n = S,$$

y en este caso se escribe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S.$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ *diverge, entonces la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *diverge.*

! La suma S de une serie convergente no se obtiene a partir de la adición (ordinaria) de sus términos, sino como el límite de una sucesión de sumas parciales.

PROPOSICIÓN 7 (Linealidad de las series convergentes). Si $\sum x_n$ y $\sum y_n$ son dos series infinitas convergentes de términos complejos y, α y β son constantes complejas, entonces la serie $\sum(\alpha x_n + \beta y_n)$ también converge, y su suma viene dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

TEOREMA 8: Propiedad telescópica

Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ dos sucesiones de números complejos tales que satisfacen la propiedad telescópica:

$$x_n = y_n - y_{n+1},$$

para todo número $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces, la serie $\sum x_n$ converge si y solo si la sucesión $\{y_n\}$ converge, en cuyo caso tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y_1 - L,$$

donde $L = \lim_{n\to\infty} y_n$.

DEFINICIÓN 23: Serie geométrica

*Sea x un número real fijo, se define como una **serie geométrica** a aquella serie que es generada a partir de adiciones sucesivas de los términos de una progresión geométrica, es decir, aquella que tiene la forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

donde el enésimo término x^n es la potencia enésima del número x.

TEOREMA 9: Convergencia de series geométricas

Si x es un número complejo con $|x| < 1$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge y tiene suma 1/(1-x), es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}.$$

Si $x \geq 1$, la serie diverge.

DEFINICIÓN 24: Condición necesaria de convergencia de series

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, el término enésimo tiende a O, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Si el término enésimo no tiende a O, la serie es divergente.

DEFINICIÓN 25: Criterio de comparación

Sean las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *con* $x_n \geq 0$ *y* $y_n \geq 0$*. Si existe una constante positiva* c *tal que:*

$$x_n \leq c y_n,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$*, entonces la convergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *garantiza la convergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

DEFINICIÓN 26: Sucesiones asintóticamente iguales

Dos sucesiones $\{x_n\}$ *y* $\{y_n\}$ *de números complejos son* ***asintóticamente iguales*** *si*

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1,$$

y se denota por:

$$x_n \sim y_n,$$

para $n \to \infty$.

TEOREMA 10: Convergencia de series asintóticamente iguales

Si dos series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *cuyos elementos son positivos y asintótica ente iguales, o ambas convergen o ambas divergen.*

DEFINICIÓN 27: Criterio integral de convergencia

Sea la función $f\colon [1, \infty] \to \mathbb{R}^+$ *decreciente. Para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$*, sea:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

y

$$t_n = \int_1^n f(x) dx$$

entonces o ambas sucesiones $\{s_n\}$ *y* $\{t_n\}$ *convergen o ambas divergen.*

DEFINICIÓN 28: Criterio del Cociente

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *de términos positivos tales que:*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$$

- ***Si*** $L < 1$*, la serie converge.*
- ***Si*** $L > 1$*, la serie diverge.*
- ***Si*** $L = 1$*, el criterio no decide.*

DEFINICIÓN 29: Criterio de la Raíz

Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *de términos positivos tales que:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = R$$

- ***Si*** $R < 1$*, la serie converge.*
- ***Si*** $R > 1$*, la serie diverge.*
- ***Si*** $R = 1$*, el criterio no decide.*

DEFINICIÓN 30: Series de Potencias

Una serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_o)^n = a_1(x-x_o) + a_2(x-x_o)^2 + ...$$

donde los números x, x_0 *y los coeficientes* a_n *son complejos, se llama **serie de potencias** de* $(x-x_0)$*. Cada serie de potencias está asociada a un círculo de convergencia de centro* x_0 *y radio* $|x-x_0|$*, tal que la serie converge para todo* x *interior al mismo, y diverge para todo* x *exterior.*

DEFINICIÓN 31: Series de Taylor y McLaurin

Dada una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, infinitamente derivable en un intervalo abierto alrededor del punto* x_0*, la serie de potencias:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

*se llama **serie de Taylor** generada por* f *en* x_0*. El término* k *representa la k-ésima derivada de la función* f*. Una serie de McLaurin es una serie de Taylor con centro* $x_0 = 0$*.*

CRÉDITOS

La presente hoja de resúmenes constituye una segunda versión revisada de la realizada durante el periodo 2018-B por los miembros de la cátedra de Análisis de Fourier: Mat. Carlos Ajila, Mat. Leonardo Montoya, Fis. Marcelo Arias, Fis. Anibal Cruz, Ing. Byron Montenegro y mi persona.

1. Introducción

Definición 1: Función periódica

Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice ***periódica*** *con periodo $p > 0$ si,*

$$f(x+p) = f(x),$$

para todo $x \in I$.

Si p es el periodo de f, también lo es cualquier múltiplo entero de p, es decir:

$$f(x+np) = f(x),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. El periodo más pequeño, es decir para $n = 1$, se llama **fundamental**.

Definición 2: Producto de funciones periódicas

Sean f y g dos funciones periódicas de periodo $p > 0$, el producto de estas funciones fg o cualquier combinación lineal de ellas $c_1 f + c_2 g$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, es también una función periódica de periodo p.

Definición 3: Producto interno de funciones

Dadas dos funciones f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, su ***producto interno*** *se denota por (f, g), y se define como:*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

para todo $x \in I = [a, b]$.

Definición 4: Funciones ortogonales

Dos funciones f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se dicen ***ortogonales*** *en el intervalo I, si el producto interno de f y g es cero, es decir si:*

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

para todo $x \in I = [a, b]$.

Definición 5: Funciones mutuamente ortogonales

A un conjunto de funciones se le denomina ***mutuamente ortogonal****, si cada diferente par de funciones de ese conjunto son ortogonales entre sí.*

Definición 6: Ortogonalidad de las funciones seno y coseno

Las funciones $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ *y* $\cos(m\pi x/L)$ *constituyen una familia de funciones mutuamente ortogonales sobre el intervalo* $[-L, L]$*. De hecho, estas satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad:*

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n; \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = 0 \qquad \text{para todo } m, n;$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

2. Series de Fourier

Definición 7: Fórmulas de Euler - Fourier

Supongamos que la serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

converge y tiene suma $f(x)$ *para cada* x *en el intervalo* $[-L, L]$*, es decir,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right), \quad -L \leq x \leq L.$$

Entonces los coeficientes de Fourier a_n *y* b_n *están relacionados con la función* f *mediante las siguientes* ***fórmulas de Euler-Fourier****:*

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx, \qquad n = 0, 1, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Obviamente esto no es válido para toda función si no para las que cumplan las características del siguiente teorema.

TEOREMA 1: Series de Fourier 1

*Sea $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica con periodo $p = 2L$. La **expansión en series de Fourier** de $f(x)$ está dada por:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right), \quad -L \leq x \leq L,$$

donde $m = 1, 2, \ldots$ y los coeficientes de Fourier a_0, a_m y b_m están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \qquad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx, \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx.$$

TEOREMA 2: Convergencia de Series de Fourier

Sea f una función continua por tramos definida en el intervalo $[-L, L]$, tal que f' es también continua por tramos en el mismo intervalo y f está definida fuera del intervalo de tal manera que sea periódica con periodo $2L$, entonces la expansión en serie de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right))$$

converge a $f(x)$ para todo x donde f es continua y converge a:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en todo x donde f no es continua.

3. CAMBIO DE INTERVALO

TEOREMA 3: Series de Fourier 2

*Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y periódica con periodo $p = 2L = b - a$. La **expansión en series de Fourier** de $f(x)$ está dada por:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) \right), \quad a \leq x \leq b,$$

donde $m = 1, 2, \ldots$ y los coeficientes de Fourier a_0, a_m y b_m están dados por:

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)\, dx,$$

$$a_m = \frac{2}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) \cos\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right)\, dx,$$

$$b_m = \frac{2}{b-a} \int_{a}^{b} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right)\, dx.$$

4. Simplificaciones: Funciones pares e impares

Teorema 4: Serie de Fourier de cosenos

*Si $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ es una **función par**, (esto es, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$) su serie de Fourier se reduce a una **serie de cosenos**, es decir:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L,$$

donde

$$a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Teorema 5: Serie de Fourier de senos

*Si $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ es una **función impar**, (esto es, $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$) la serie de Fourier se reduce a una **serie de senos**, es decir:*

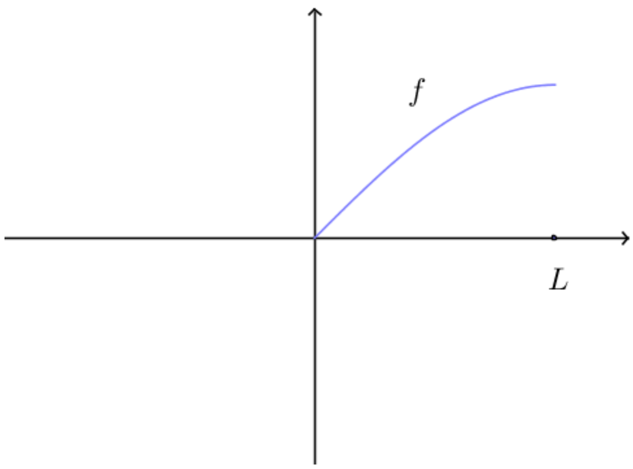
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L,$$

donde

$$b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

5. Expansión de medio rango

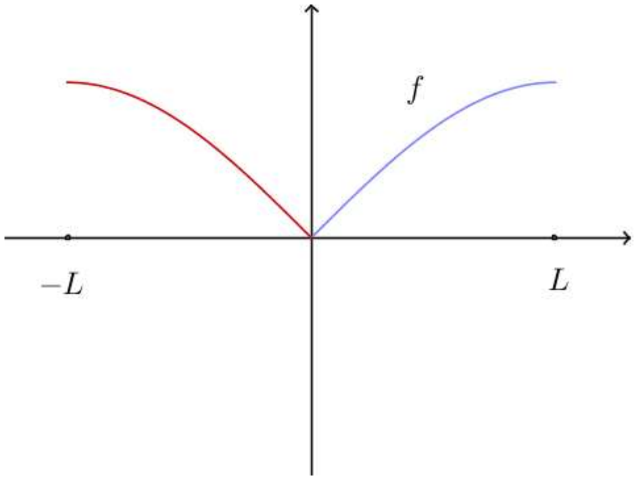
A partir de una función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ (como se muestra en la figura)



es posible construir la extensión par de la función f es decir, $f_{\text{par}} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ que estaría definida por:

$$f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad -L < x < 0 \\ f(x) & \text{si} \quad 0 < x < L, \end{cases}$$

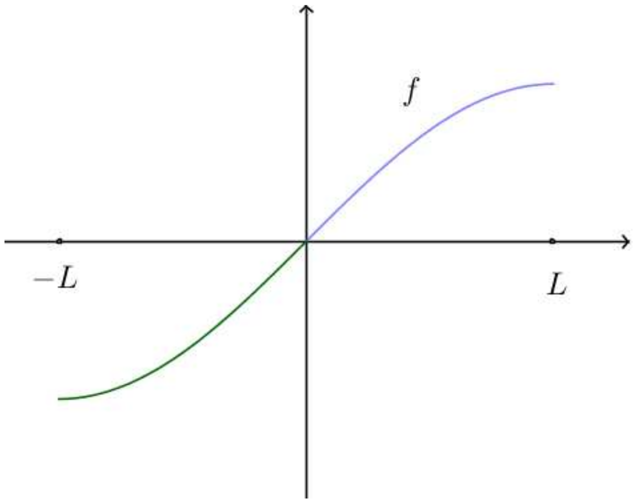
Gráficamente esto se hace reflejando a la función con respecto del eje y.



Del mismo modo es posible construir la extensión impar de la función f es decir, $f_{\text{impar}} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_{\text{impar}}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad -L < x < 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad 0 < x < L, \end{cases}$$

Gráficamente esto se logra reflejando la función respecto al eje x y luego respecto al eje y.



6. Problema de Sturm-Liouville

Definición 8

Dadas las funciones $y_1, y_2, \cdots$ de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se dice que estas funciones son **ortogonales** *en el intervalo I* **con respecto a la función peso** *$r > 0$, si para todo $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \neq n$ se tiene:*

$$(y_m, y_n) = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

para todo $x \in I = [a, b]$. La norma de la función y_m se denota por $||y_m||$, y se define como:

$$||y_m|| = \sqrt{(y_m, y_m)} = \sqrt{\int_a^b r(x) y_m^2(x) dx}.$$

DEFINICIÓN 9

Las funciones $y_1, y_2, \cdots$ de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se llaman ***ortonormales*** *(con respecto a la función peso r) si son ortogonales en I y si todas ellas tienen norma 1. Esto se puede representar a través de la* ***delta de Kronecker*** *$\delta_{m,n}$ de la siguiente manera:*

$$(y_m, y_n) = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & if \quad m = n \\ 0 & if \quad m \neq n \end{cases}$$

para todo $x \in I = [a, b]$. Para el caso particular donde $r(x) = 1$ tenemos:

$$(y_m, y_n) = \int_a^b y_m(x) y_n(x) dx = 0 \;\; m \neq n, \quad ||y_m|| = \sqrt{(y_m, y_n)} = \sqrt{\int_a^b y_m^2(x) dx}.$$

Ejemplo: Las funciones $y_m = \text{sen}(mx), m = 1, 2, \cdots$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, porque para $m \neq n$ obtenemos por integración:

$$(y_m, y_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \,\text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]\, dx$$

$$(y_m, y_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}((m-n)x)}{m-n} - \frac{\text{sen}((m+n)x)}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n.$$

En la última expresión vemos claramente que los enteros $m - n$ y $m + n$, permiten que las dos integrales se anulen. Para la norma tenemos:

$$||y_m||^2 = (y_m, y_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2mx)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\text{sen}(mx)}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

para todo $m = 1, 2, \cdots$. En consecuencia, el conjunto ortonormal correspondiente, se obtiene de la división de cada función para su respectiva norma:

$$\left\{ \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{\pi}}, \cdots \right\}$$

El siguiente teorema demuestra que para cualquier problema de Sturm - Liouville, las funciones propias asociadas son ortogonales. Es decir, en la práctica, si es posible formular un problema tipo Sturm - Liouville, entonces este teorema nos garantiza la ortogonalidad de dichas funciones propias.

7. Ortogonalidad de las Funciones Propias para Problemas de Sturm - Liouville

Definición 10: Ecuación de Sturm - Liouville

Dadas las funciones p, r positivas y la función q real, la ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma:

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

para todo $x \in [a, b]$ con las condiciones:

$$\begin{cases} k_1 y + k_2 y' = 0 & en \quad x = a \\ l_1 y + l_2 y' = 0 & en \quad x = b \end{cases}$$

*con $\lambda, k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, se conoce como **problema de Sturm - Liouville**.*

Teorema 6

Supongamos que las funciones p, q, r (con $r(x) > 0$) y p' en la ecuación de Sturm - Liouville son contínuas y de valores reales en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ para todo $x \in I = [a, b]$. Además, sean $y_m(x)$ y $y_n(x)$ funciones propias del problema de Sturm - Liouville asociadas a los valores propios λ_m y λ_n, respectivamente. Entonces $y_m(x)$ y $y_n(x)$ son ortogonales en ese intervalo con respecto a la función peso r, esto es,

$$(y_m, y_n) = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n.$$

8. Series Ortogonales de Polinomios: Series de Fourier Generalizadas

Definición 11: Serie de Fourier generalizada

Sean $y_0, y_1, y_2, \cdots$ funciones ortogonales con respecto a la función peso $r(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$, y sea $f(x)$ una función que puede representarse por medio de la serie convergente,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) + \cdots \tag{1}$$

*a esta se le llama serie ortogonal, expansión ortogonal, o **serie de Fourier generalizada**. Si las funciones y_m son funciones propias del problema de Sturm - Liouville, entonces llamamos a esta serie **expansión en funciones propias**.*

Dada la función $f(x)$, para determinar los coeficientes de Fourier a_m de $f(x)$ con respecto a y_0, $y_1, \cdots$, multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $r(x)y_n(x)$ para un n fijo, y luego integramos ambos lados con respecto a $x \in [a, b]$, es decir:

$$(f, y_n) = \int_a^b r f y_n dx = \int_a^b r \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m \right) y_n dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_a^b r y_m y_n dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (y_m, y_n)$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones, todas las integrales de la derecha son cero, excepto para $m = n$. Entonces tenemos,

$$(f, y_n) = a_n (y_n, y_n) = a_n ||y_n||^2.$$

Si asumimos que todas las funciones y_m tienen normas no nulas, entonces los coeficientes de Fourier toman la forma:

$$a_m = \frac{(f, y_m)}{||y_m||^2} = \frac{1}{||y_m||^2} \int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

CRÉDITOS

La presente hoja de resúmenes constituye una segunda versión revisada de la realizada durante el periodo 2018-B por los miembros de la cátedra de Análisis de Fourier: Mat. Carlos Ajila, Mat. Leonardo Montoya, Fis. Marcelo Arias, Fis. Anibal Cruz, Ing. Byron Montenegro y mi persona.

1. INTEGRAL DE FOURIER

DEFINICIÓN 1: Función absolutamente integrable

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice ***absolutamente integrable*** *si la integral de Riemann impropia*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

es convergente.

DEFINICIÓN 2: Integral de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función absolutamente integrable. Para cada $w \geq 0$ se define:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv)\, dv \qquad y \qquad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv)\, dv.$$

A la expresión

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

se la llama la ***representación de $f(x)$ por una integral de Fourier****, y a la integral que aparece en esta expresión se la llama* ***integral de Fourier****.*

La expresión

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

en la definición anterior no debe entenderse como una igualdad. Se trata de un abuso de lenguaje para indicar que

$$\int_0^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

es la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier.

TEOREMA 1: Integral de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no necesariamente periódica y absolutamente integrable. La ***representación en integral de Fourier*** *de $f(x)$ está dada por:*

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw,$$

para cada $w \geq 0$. Donde $A(w)$ y $B(w)$ están dados por:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\, dv \qquad y \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{sen}(wv)\, dv.$$

Teorema 2: Existencia (y convergencia) de la integral de Fourier

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente integrable continua por tramos en todo intervalo acotado y si f admite derivadas por izquierda y derecha en todo punto, entonces $f(x)$ admite una representación por una integral de Fourier para todo $x \in \mathbb{R}$. La integral de Fourier converge a $f(x)$ en los puntos $x \in \mathbb{R}$ donde f es continua y hacia:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en los puntos $x \in \mathbb{R}$ donde f es discontinua.

2. Integrales Fourier de seno y coseno

Cuando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par que admite una representación por una integral de Fourier, se tiene, para $w \geq 0$, que

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,\mathrm{sen}(wv)\, dv = 0$$

y

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\, dv = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(v)\cos(wv)\, dv,$$

gracias a la imparidad y paridad, respectivamente, de los integrandos.

Definición 3: Integral de Fourier de Coseno

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par absolutamente integrable y si para cada $w \geq 0$,

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(v)\cos(wv)\, dv,$$

a la expresión

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} A(w)\cos(wx)\, dx$$

se la llama la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier de coseno *y a la integral en dicha expresión se la denomina* ***integral de Fourier de coseno****.*

Análogamente, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar, para $w \geq 0$ se tiene que

$$A(w) = 0 \qquad \text{y} \qquad B(w) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(v)\,\mathrm{sen}(vw)\, dv.$$

DEFINICIÓN 4: Integral de Fourier de Seno

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función impar absolutamente integrable y si para cada* $w \geq 0$,

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv)\, dv,$$

a la expresión

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \operatorname{sen}(wx)\, dx$$

se la llama la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier de seno *y a la integral en dicha expresión se la denomina* ***integral de Fourier de seno****.*

CRÉDITOS

La presente hoja de resúmenes constituye una segunda versión revisada de la realizada durante el periodo 2018-B por los miembros de la cátedra de Análisis de Fourier: Mat. Carlos Ajila, Mat. Leonardo Montoya, Fis. Marcelo Arias, Fis. Anibal Cruz, Ing. Byron Montenegro y mi persona.

1. TRANSFORMADA DE FOURIER COSENO Y SENO

DEFINICIÓN 1: Transformada de Fourier Coseno

Dada la función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***par****, la* ***transformada de Fourier coseno*** *de $f(x)$ se define por:*

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(wx)dx$$

para todo $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ y $w \geq 0$. Por otro lado, la ***transformada de Fourier coseno inversa*** *de $\hat{f}_c(w)$ se define por:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(w)\cos(wx)dw$$

para todo $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ y $w \geq 0$.

DEFINICIÓN 2: Transformada de Fourier Seno

Dada la función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***impar****, la* ***transformada de Fourier seno*** *de $f(x)$ se define por:*

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}(wx)dx$$

para todo $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ y $w \geq 0$. Por otro lado, la ***transformada de Fourier seno inversa*** *de $\hat{f}_s(w)$ se define por:*

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(w)\,\mathrm{sen}(wx)dw$$

para todo $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ y $w \geq 0$.

Otras notaciones para las transformadas de seno y coseno son:

$$\mathscr{F}_c(f) = \hat{f}_c, \quad \mathscr{F}_s(f) = \hat{f}_s,$$

y para sus inversas: $\mathscr{F}_c^{-1}$ y $\mathscr{F}_s^{-1}$.

TEOREMA 1: Existencia de la Transformada de Fourier de Cosenos y Senos

Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente integrable sobre I y continua por partes sobre cada intervalo acotado, entonces la transformada de Fourier de cosenos y senos de f existe.

TEOREMA 2: Linealidad

Si existe la transformada de Fourier de cosenos o senos para las funciones $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, también existe la transformada para cualquier combinación lineal de estas funciones, es decir:

$$\mathscr{F}_c(af \pm bg) = a\mathscr{F}_c(f) \pm b\mathscr{F}_c(g) \qquad y \qquad \mathscr{F}_s(af \pm bg) = a\mathscr{F}_s(f) \pm b\mathscr{F}_s(g).$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$.

En efecto, basta notar que:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_c(af \pm bg)(w) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [af(x) \pm bg(x)] \cos(wx)\, dx \\
&= a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(wx)\, dx \pm b\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(x) \cos(wx)\, dx \\
&= a\mathscr{F}_c(f)(w) \pm b\mathscr{F}_c(f)(w),
\end{aligned}$$

y de manera similar se prueba para la transformada de seno.

TEOREMA 3: Transformada de la Derivada de una Función

Sea f una función continua y absolutamente integrable tal que f' es continua por partes sobre cualquier intervalo finito y tal que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Entonces:

a) $\mathscr{F}_c\{f'(x)\} = w\mathscr{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0).$

b) $\mathscr{F}_s\{f'(x)\} = -w\mathscr{F}_c\{f(x)\}.$

c) $\mathscr{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathscr{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0).$

d) $\mathscr{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathscr{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} wf(0).$

Los literales **c)** y **d)** pueden demostrarse fácilmente a partir de $\mathscr{F}_c\{f''\}$ una vez mostrado que f' y f'' satisfacen los literales **a)** y **b)**:

$$\mathscr{F}_c\{f''(x)\} = w\mathscr{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0).$$

2. Transformada de Fourier

Definición 3: Forma Compleja de la Integral de Fourier

La representación en integral de Fourier de una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede expresarse también por:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iw(x-v)}\, dv\, dw,$$

*que es llamada la **forma compleja de la integral de Fourier**.*

De hecho, si consideramos la integral de Fourier de f, está dada por:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(w)\cos(wx) + B(w)\operatorname{sen}(wx)]\, dw,$$

donde:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\, dv, \qquad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\, dv.$$

Si substituimos los valores de $A(w)$ y $B(w)$ tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)[\cos(wv)\cos(wx) + \operatorname{sen}(wv)\operatorname{sen}(wx)]\, dv\, dw$$

que puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wx - wu)\, dv \right] dw.$$

Notemos además que:

$$\cos(wx - wu) = \cos(wu - wx),$$

y que la integral entre corchetes es una función par de w por lo que tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wx - wu)\, dv \right] dw.$$

Por otro lado, como el $\operatorname{sen}(wx - wv)$ es una función impar de w tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(wx - wu)\, dv$$

lo que implica que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(wx - wu)\, dv \right] dw = 0.$$

Así, podemos expresar a $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(v)\cos(wx - wu) + if(v)\operatorname{sen}(wx - wu)]\, dv\, dw.$$

Finalmente, haciendo uso de la fórmula de Euler tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{iw(x-v)}\, dv\, dw$$

que es llamada la **forma compleja de la integral de Fourier**. Esta última expresión puede escribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iwv} \, dv \right] e^{iwx} \, dw.$$

donde la expresión entre corchetes es una función de w que notaremos por $\hat{f}(w)$ y es llamada la **Transformada de Fourier** de f.

DEFINICIÓN 4: Transformada de Fourier y Transformada de Fourier Inversa

La ***transformada de Fourier*** *de la función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define por:*

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \, dx.$$

y su ***inversa*** *está dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} \, dw.$$

TEOREMA 4: Existencia de la Transformada de Fourier

Si $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable y contínua a trozos en cada intervalo finito, entonces la transformada de Fourier $\hat{f}(w)$ de $f(x)$ existe.

Ejemplo 1.- Calcular la transformada de Fourier de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Solución: A partir de la definición de la transformada de Fourier tenemos para $f(x)$ tenemos:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iwx}}{-iw} \bigg|_{-1}^{1} = \frac{e^{-iw} - e^{iw}}{-iw\sqrt{2\pi}}.$$

Teniendo en cuenta que $e^{iw} - e^{-iw} = 2i \operatorname{sen} w$ podemos reescribir la última ecuación como:

$$\hat{f}(w) = \frac{-2i \operatorname{sen} w}{-iw\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sen} w}{w}.$$

Ejemplo 2.- Calcular la transformada de Fourier de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x > 0, \quad a > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución: A partir de la definición de la transformada de Fourier tenemos para $f(x)$ tenemos:

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ax} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-(a+iw)x} dx = \frac{e^{-(a+iw)x}}{\sqrt{2\pi}(a+iw)x} \bigg|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+iw)x}.$$

2. Interpretación Física: Espectro

Como sabemos, la inversa de la transformada de Fourier de $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(w)\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{iwx} dx \tag{1}$$

La naturaleza esta ecuación queda aclarada si la entendemos como una superposición de oscilaciones sinusoidales de todas las posibles frecuencias, llamada ***representación espectral***. Este nombre proviene de la óptica en donde la luz es una superposición de diferentes colores o ***frecuencias***. En esta ecuación, $\hat{f}(w)$ mide la intensidad de $f(x)$ en el intervalo de frecuencias entre comprendido entre w y $w + dw$. Visto como un sistema de osciladores de diferentes frecuencias w, en los que mw^2A^2 representa la energía total del sistema proveniente de la frecuencia w, entonces la integral

$$\int_a^b |\hat{f}(w)|^2 dw,$$

viene a representar justamente la ***energía total del sistema*** físico en el intervalo de las frecuencias comprendidas desde a hasta b.

Teorema 5: Linealidad de la Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una transformación lineal, es decir para toda función $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\},$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in I$.

Demostración: A partir de la definición de transformada de Fourier tenemos:

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]\, e^{-iwx} dx,$$

de donde,

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx\right] + b\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx\right]$$

$$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\,[f(x)] + b\mathcal{F}\{g(x)$$

Teorema 6: Transformada de Fourier de Derivadas

Si $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función contínua y tal que, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ y además, $f'(x)$ es absolutamente integrable, entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, y $w \geq 0$:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\},$$

$$\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\},$$

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\}(w) = (iw)^{(n)}\mathcal{F}\{f(x)\}(w).$$

Demostración: A partir de la definición de transformada de Fourier, tenemos:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-iwx} dx.$$

Integrando por partes:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \right].$$

de donde el primer término es nulo, y por tanto:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\}(w) = iw\mathcal{F}\{f(x)\}(w).$$

Además, aplicando nuevamente el teorema, tenemos:

$$\mathcal{F}\{f''(x)\}(w) = iw\mathcal{F}\{f'(x)\}(w) = (iw)^2\mathcal{F}\{f(x)\}(w) = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}(w).$$

Tras la aplicación sucesiva del teorema se puede obtener:

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\}(w) = (iw)^{(n)}\mathcal{F}\{f(x)\}(w).$$

Definición 5: Convolución

La **convolución** *de dos funciones* $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $g\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se define por:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x-p) dp,$$

o alternativamente, como:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p) g(p) dp,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo.- Dadas las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, respectivamente, calcular su convolución en el intervalo $I = [0, t]$ y donde $t \in \mathbb{R}$.

Solución: A partir de la definición de convolución para f y g tenemos:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x-p) dp = \int_0^t f(p) g(x-p) dp = \int_0^t e^{-p} \operatorname{sen}(x-p) dp.$$

Resolviendo la última integral por partes tenemos,

$$I = \int e^{-p} \operatorname{sen}(x-p) dp = e^{-p} \cos(x-p) + \int e^{-p} \cos(x-p) dp$$

$$I = e^{-p} \cos(x-p) + \left(-e^{-p} \operatorname{sen}(x-p) - \int e^{-p} \operatorname{sen}(x-p) dp \right).$$

de donde tenemos que,

$$I = \frac{e^{-p}}{2} [\cos(x-p) - \operatorname{sen}(x-p)].$$

Evaluando en los límites del intervalo obtenemos,

$$(f * g)(x) = \int_0^t e^{-p} \operatorname{sen}(x-p) dp = \frac{1}{2}\left[e^{-t}(\cos(x-t) - \operatorname{sen}(x-t)) + \operatorname{sen} x - \cos x\right].$$

TEOREMA 7: Teorema de Convolución

Si las funciones $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son contínuas a trozos, acotadas, y absolutamente integrables, entonces:

$$\mathcal{F}\{(f * g)(x)\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\} = \sqrt{2\pi}\hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w).$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

!

Aplicando la transformada de Fourier inversa en ambos lados de la ecuación obtenemos un resultado muy importante,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx} dw,$$

que será usado mas adelante en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

CRÉDITOS

La presente hoja de resúmenes constituye una segunda versión revisada de la realizada durante el periodo 2018-B por los miembros de la cátedra de Análisis de Fourier: Mat. Carlos Ajila, Mat. Leonardo Montoya, Fis. Marcelo Arias, Fis. Anibal Cruz, Ing. Byron Montenegro y mi persona.

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

DEFINICIÓN 1: Ecuación Diferencial Ordinaria

Sea $I \subseteq R$ un intervalo abierto y $k \in \mathbb{N}^*$. Una ecuación diferencial ordinaria de orden k *es un expresión de la forma:*

$$F(u^{(k)}(x), u^{(k-1)}(x), \ldots, u'(x), u(x), x) = 0, \quad x \in I,$$

donde

$$F : \mathbb{R}^{k+1} \times I \to \mathbb{R}$$

es una función conocida y $u : I \to \mathbb{R}$ es una función a ser determinada.

DEFINICIÓN 2: Solución de una EDO

Con las mismas notaciones de la definición anterior, una función $u_0 : I \to \mathbb{R}$ se dice que es una solución *de la ecuación diferencial*

$$F(u^{(k)}(x), u^{(k-1)}(x), \ldots, u'(x), u(x), x) = 0, \quad x \in I,$$

si u_0 es k veces derivable en I y si la igualdad

$$F(u_0^{(k)}(x), u_0^{(k-1)}(x), \ldots, u_0'(x), u_0(x), x) = 0$$

se verifica para todo $x \in I$.

2. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función k veces diferenciable en el abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se denotará su diferencial de k-ésimo orden por $D^k u : \Omega \to \mathbb{R}^{n^k}$.

DEFINICIÓN 3: Ecuación en Derivadas Parciales

Sean $k \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, y $\Omega \subseteq R^n$ un conjunto abierto. Una ecuación en derivadas parciales de orden k *es un expresión de la forma*

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega$$

donde

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times R^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

es un campo escalar conocido y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es un campo escalar a ser determinado.

DEFINICIÓN 4: Solución de una EDP

Un campo escalar $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es una solución *de la ecuación diferencial*

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

si u_0 es k veces diferenciable en Ω y si la igualdad

$$F(D^k u_0(x), D^{k-1}u_0(x), \dots, Du_0(x), u_0(x), x) = 0$$

se verifica para todo $x \in \Omega$.

DEFINICIÓN 5: Sistema de EDP's

Sean $k \in \mathbb{N}^*$, $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq 2$, y $\Omega \subseteq R^n$ un conjunto abierto. Una sistema de ecuaciones en derivadas parciales de orden k *es un expresión de la forma:*

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(x), D^{k-1}\mathbf{u}(x), \dots, D\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x), x) = 0, \quad x \in \Omega$$

donde

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \cdots \times R^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}$$

es un campo vectorial conocido y $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ es un campo vectorial a ser determinado.

DEFINICIÓN 6: Solución de un Sistema de EDP's

Un campo vectorial $\mathbf{u}_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es una solución *del sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(x), D^{k-1}\mathbf{u}(x), \dots, D\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x), x) = 0, \quad x \in \Omega$$

si $\mathbf{u}_0$ es k veces diferenciable en Ω y si la igualdad

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}_0(x), D^{k-1}\mathbf{u}_0(x), \dots, D\mathbf{u}_0(x), \mathbf{u}_0(x), x) = 0$$

se verifica para todo $x \in \Omega$.

!

Recordemos que si $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial (escalar si $m = 1$) diferenciable en el punto $x_0 \in \Omega$, el diferencial de $\mathbf{u}$ en el punto x_0 es una aplicación lineal $D\mathbf{u}(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, de donde $D\mathbf{u}(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. En particular, si $\mathbf{u}$ es diferenciable en cada punto de Ω, esto nos permite definir una aplicación $D : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Ahora, dado que los espacios vectoriales $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $\mathbb{R}^{mn}$ son isomorfos, podemos considerar que $D\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^{mn}$.
De manera análoga, se tiene que $D^k\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^{mn^k}$ cuando $\mathbf{u}$ es un campo vectorial k veces diferenciable. Este razonamiento justifica la elección del dominio para los campos F y $\mathbf{F}$ en las dos definiciones precedentes.

DEFINICIÓN 7: EDP Lineal

Una ecuación en derivadas parciales se llama ***lineal****, si esta es lineal respecto a la función buscada y todas sus derivadas que forman parte de la ecuación. En caso contrario se llama no lineal. La ecuación más general en derivadas parciales de segundo orden lineal tiene la forma:*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0$$

donde al menos uno de los coeficientes $a_{jk}(x)$ es diferente de cero.

DEFINICIÓN 8: EDP Semi-Lineal

Una ecuación no lineal con la parte principal lineal se la conoce como ***semilineal****. La ecuación general en derivadas parciales de segundo orden semilineal tiene la forma:*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., + \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

DEFINICIÓN 9: EDP Homogénea

Cuando cada término de la ecuación diferencial contiene la función o sus derivadas esta ecuación se dice homogénea:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) = 0,$$

es decir $d(x) = 0$, mientras que la ecuación:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u(x) + d(x) = 0$$

es no homogénea.

DEFINICIÓN 10: Clasificación de EDP's Lineales de Segundo Orden

La ecuación diferencial:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x,y)$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales se dice:

- Hiperbólica *si $B^2 - 4AC > 0$;*
- Parabólica *si $B^2 - 4AC = 0$;*
- Elíptica *si $B^2 - 4AC < 0$.*

Por ejemplo:

1. La ecuación de la onda unidimensional:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
es una ecuación hiperbólica.

2. La ecuación del calor unidimensional:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
es una ecuación parabólica.

3. La ecuación de Laplace en dos dimensiones:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
es una ecuación elíptica.

TEOREMA 1: Teorema Fundamental de Superposición

Si u_1 y u_2, dos funciones de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, son soluciones de una EDP lineal y homogénea en Ω, entonces la combinación lineal de ellas u, con:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ también es solución (de esa EDP en Ω).

DEFINICIÓN 11: Operador Laplaciano

Dada una función $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se define el ***operador Laplaciano*** *como:*

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Si consideramos una función $u(x,t)$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ representa a la variable espacial y $t \in [0, +\infty[$ la variable temporal, consideraremos Δu como la aplicación del operador laplaciano a la variable espacial, es decir:
$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j},$$
Así, para una función $u(x,t)$ con $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$
y **NO**
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

DEFINICIÓN 12: Operador D'Alambert

Dada una función $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$*, con* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$*,* $u = u(x,t)$*,* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *se define el* ***operador D'Alambert*** *como:*

$$\square = \partial_{tt} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

es decir:

$$\square = \partial_{tt} - \Delta.$$

Las ecuaciones en derivadas parciales clásicas, son aquellas que debido a su importancia dentro de la matemática y en otros campos han sido (y siguen siendo) estudiadas por generaciones de matemáticos y otros científicos, a continuación se presentan unas cuantas de ellas, aquí $u(x,t)$ se considera una función con $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ denotando la variable espacial y $t \geq 0$ la variable temporal

3. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CLÁSICAS

3.1 Ecuación de Poisson

Está dada por:

$$\Delta u = h(x),$$

donde $u = u(x)$, $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, y $h(x)$ es una función real no nula. Si $h(x) = 0$, entonces la EDP se llama:

$$\Delta u = 0,$$

se llama **Ecuación de Laplace**.

3.2 Ecuación de la Onda

Está dada por:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,$$

donde $c \in \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

3.3 Ecuación del Calor

Está dada por:

$$u_t - c^2 \Delta u = 0,$$

donde $c \in \mathbb{R}$, y $u = u(x,t)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

3.4 Ecuación de Schrodinger

Está dada por:

$$iu_t = -\frac{\hbar}{2m}\Delta u + vu,$$

donde $m > 0$ es la masa del electrón, $u = u(x,y,z,t)$, v es una función potencial y $\hbar$ es la constante de Planck.

DEFINICIÓN 13: Condiciones de Frontera

Se refiere al valor que tiene la función u. Por ejemplo para una cuerda esta firmemente sujetada en sus extremos (es decir, en $x = 0$ y $x = L$) se concluye que, para todo $t \geq 0$ las oscilaciones de la cuerda deben ser nulas en los extremos, es decir:

$$u(x,t)|_{x=0} = u(x = 0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x,t)|_{x=L} = u(x = L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

Si u está definida en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, la frontera de Ω se suele denotar por: $\partial\Omega$ y si $f(u)$ el valor que toma u en la frontera de Ω, se suele denotar por:

$$u|_{\partial\Omega} = f(u)$$

DEFINICIÓN 14: Condiciones Iniciales

Las condiciones iniciales se refieren al valor que toma la función o su derivada al tiempo $t = 0$. Por ejemplo, para una cuerda se refiere a su forma o posición inicial y su velocidad inicial, es decir:

$$u(x,t)|_{t=0} = u(x, t = 0) = f(x), \quad x \in [0.L]$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{t=0} = u_t(x, t = 0) = g(x), \quad x \in [0.L]$$

3. MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Ejemplo: El siguiente problema describe las vibraciones transversales $u(x,t)$ de una cuerda elástica de longitud $L = \pi$ fija en ambos extremos, la cual ha sido desplazada de su posición de equilibrio levantándola en su centro y luego soltada al tiempo $t = 0$ (su velocidad inicial es cero):

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 & t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi/2. \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Vamos a utilice el **método de separación de variables** para encontrar una expresión que describa las vibraciones transversales $u(x,t)$ en todo punto $x \in [0,\pi]$ de la cuerda y para todo tiempo t. Para esto buscamos una solución de la forma:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{1}$$

la cual al derivar

$$u_{tt} = X(x)T''(t)$$

$$u_{xx} = X''(x)T(t)$$

y reemplazar u_{tt} y u_{xx} en nuestra EDP: $u_{tt} = 9u_{xx}$, tenemos:

$$X(x)T''(t) = 9X''(x)T(t)$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

El lhs de la ecuación depende solamente de t y el rhs solamente de x, esto es posible si ambos son igual a una constante k (arbitraria), es decir:

$$\frac{T''(t)}{9T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = k.$$

de donde podemos obtener las EDO's:

$$X''(x) - kX(x) = 0 \tag{2}$$

$$T''(t) - 9kT(t) = 0. \tag{3}$$

con las condiciones de frontera:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \qquad X(0) = 0$$

$$u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0, \qquad X(\pi) = 0$$

Como k es una constante arbitraria, esta puede ser positiva, negativa o incluso cero, y por tanto esto las soluciones de las ecuaciones (2) y (3) serán diferentes. Se puede demostrar que para valores de $k > 0$ o $k = 0$ las soluciones de las ecuaciones (2) y (3) corresponden a la solución trivial $u(x,t) = 0$.

Para $k < 0$ y tomando $k = -\gamma^2$ tenemos la ecuación:

$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0 \tag{4}$$

con las condiciones de frontera que obtuvimos previamente:

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0$$

Para resolverla, buscamos una solución de la forma:

$$X(x) = e^{mx}, \tag{5}$$

que derivando y reemplazando $X'(x)$ y $X''(x)$ en (4) tenemos:

$$m^2 e^{mx} + \gamma^2 e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(m^2 + \gamma^2) = 0$$

de donde:

$$m = \pm i\gamma.$$

Reemplazando m en (5),

$$X(x) = e^{\pm i\gamma x}. \tag{6}$$

Se puede verificar que la solución general de (4) está dada por:

$$X(x) = A\cos(\gamma x) + B\,\mathrm{sen}(\gamma x). \tag{7}$$

Las constantes A y B se determinan a partir de las condiciones $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$.

$$X(0) = A\cos(\gamma 0) + B\,\mathrm{sen}(\gamma 0) = 0, \qquad A = 0. \tag{8}$$

$$X(\pi) = B\,\mathrm{sen}(\gamma\pi) = 0. \tag{9}$$

El $\mathrm{sen}(\gamma\pi)$ es 0 si el argumento $\gamma\pi$ es igual a $n\pi$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, ...$ es decir:

$$\gamma\pi = n\pi$$

y por tanto,

$$\gamma_n = n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Como $X(x) = B\,\mathrm{sen}(\gamma x)$ y existen un infinito número de valores de γ, existen también un infinito número de soluciones para la ecuación (4) (denotadas por el subíndice n), es decir:

$$X_n(x) = B_n\,\mathrm{sen}(\gamma_n x)$$

reemplazando $\gamma_n = n$ y tomando $B_n = 1$, tenemos:

$$X_n(x) = B_n\,\mathrm{sen}(nx). \tag{10}$$

Como habíamos considerado $k = -\gamma^2$, la ecuación (3) se convierte en:

$$T''(t) + 9n^2T(t) = 0. \tag{11}$$

cuya resolucón es similar a la ecuación (4). Se puede verificar que la solución a (11) está dada por:

$$T_n(t) = C_n\cos(3nt) + D_n\cos(3nt) \tag{12}$$

para $n = 1, 2, 3, ...$ Reemplazando las ecuaciones (10) y (12) en (1), tenemos:

$$u_n(x,t) = B_n\,\mathrm{sen}(nx)\left[C_n\cos(3nt) + D_n\cos(3nt)\right] \tag{13}$$

Por el teorema fundamental de superposición, la solución general está dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[B_n\,\mathrm{sen}(nx)\left[C_n\cos(3nt) + D_n\cos(3nt)\right]\right] \tag{14}$$

o simplemente por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}(nx)\left[A_n^*\cos(3nt) + B_n^*\cos(3nt)\right] \tag{15}$$

donde, para determinar los coeficientes A_n^* y B_n^* utilizamos las condiciones iniciales: $u(x,0) = f(x)$

y $u_t(x,0) = 0$, y se puede demostrar que estas están dadas por:

$$A_n^* = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,\text{sen}(nx)dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\,\text{sen}(nx)dx = \frac{4}{\pi n^2}\,\text{sen}(\frac{n\pi}{2})$$

$$B_n^* = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} u_t(x,0)\,\text{sen}(nx)dx = 0$$

por tanto:

$$u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2}\,\text{sen}(\frac{n\pi}{2})\,\text{sen}(nx)\cos(3nt)$$

o

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k-1)^2}\,\text{sen}\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}\right)\text{sen}((2k-1)x)\cos(3(2k-1)t).$$

CRÉDITOS

La presente hoja de resúmenes constituye una segunda versión revisada de la realizada durante el periodo 2018-B por los miembros de la cátedra de Análisis de Fourier: Mat. Carlos Ajila, Mat. Leonardo Montoya, Fis. Marcelo Arias, Fis. Anibal Cruz, Ing. Byron Montenegro y mi persona.