1. INTRODUCCIÓN

DEFINICIÓN 1: Función Periódica

Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice ***periódica*** *con periodo $p > 0$ si,*

$$f(x+p) = f(x),$$

para todo $x \in I$.

Si p es el periodo de f, también lo es cualquier múltiplo entero de p, es decir:

$$f(x+np) = f(x),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. El periodo más pequeño, es decir para $n = 1$, se llama **fundamental**.

DEFINICIÓN 2: Producto de Funciones Periódicas

Sean f y g dos funciones periódicas de periodo $p > 0$, el producto de estas funciones fg o cualquier combinación lineal de ellas $c_1 f + c_2 g$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, es también una función periódica de periodo p.

DEFINICIÓN 3: Producto Interno de Funciones

Dadas dos funciones f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, su ***producto interno*** *en $I = [a, b]$ se denota por $\langle f, g \rangle$ y se define como:*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

para todo $x \in I$.

DEFINICIÓN 4: Funciones Ortogonales

Dos funciones f y g de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se dicen ***ortogonales*** *en el intervalo $I = [a, b]$, si el producto interno de f y g es cero, es decir si:*

$$\langle f, g \rangle = 0,$$

para todo $x \in I$.

DEFINICIÓN 5: Funciones Mutuamente Ortogonales

A un conjunto de funciones se le denomina ***ortogonal****, si cada diferente par de funciones de ese conjunto son ortogonales entre sí.*

TEOREMA 1: Ortogonalidad de las Funciones Seno y Coseno

Las funciones $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ *y* $\cos(m\pi x/L)$ *con* $m = 1, 2, 3, ..., L \in \mathbb{R}$ *constituyen una familia de funciones mutuamente ortogonales sobre el intervalo* $[-L, L]$*. De hecho, estas satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad:*

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n; \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = 0 \qquad \text{para todo } m, n;$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\, dx = \begin{cases} L & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

2. SERIES DE FOURIER

DEFINICIÓN 6: Fórmulas de Euler - Fourier

Supongamos que la serie infinita (llamada de Fourier):

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

converge y tiene como suma a $f(x)$ *(donde* $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$ *es una función periódica de periodo* $p = 2L$*) para cada* x *en el intervalo* $[-L, L]$*, es decir:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] = f(x), \quad -L \leq x \leq L.$$

Entonces los coeficientes de Fourier a_0*,* a_n *y* b_n *están relacionados con la función* f *mediante las siguientes* ***fórmulas de Euler-Fourier****:*

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \qquad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx, \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\, dx.$$

Es importante notar que esto no es válido para toda función si no para las que cumplan las características del siguiente teorema.

TEOREMA 2: Series de Fourier I

*Sea $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$ una función continua por tramos y periódica con periodo $p = 2L$. La **expansión en series de Fourier** de $f(x)$ está dada por:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right], \quad -L \leq x \leq L,$$

donde los coeficientes de Fourier a_0, a_m y b_m están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx, \qquad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \qquad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

TEOREMA 3: Convergencia de Series de Fourier

Sea f una función continua por tramos definida en el intervalo $[-L, L]$, tal que f' es también continua por tramos en el mismo intervalo y f está definida fuera del intervalo de tal manera que sea periódica con periodo $2L$, entonces la expansión en serie de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]$$

converge a $f(x)$ para todo x donde f es continua y converge a:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en todo x donde f no es continua.

TEOREMA 4: Series de Fourier II

*Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua por tramos y periódica con periodo $p = 2L = b - a$. La **expansión en series de Fourier** de $f(x)$ está dada por:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) \right], \quad a \leq x \leq b,$$

donde los coeficientes de Fourier a_0, a_m y b_m están dados por:

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx,$$

$$a_m = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) dx,$$

$$b_m = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{b-a}\right) dx.$$

3. Simplificaciones para Funciones Pares e Impares

Teorema 5: Serie de Fourier de Cosenos

*Si $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$ es una **función par** (y periódica), (esto es, si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$) su serie de Fourier se reduce a una **serie de cosenos**, es decir:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L,$$

donde:

$$a_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx, \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Teorema 6: Serie de Fourier de Senos

*Si $f\colon [-L, L] \to \mathbb{R}$ es una **función impar** (y periódica), (esto es, si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$) la serie de Fourier se reduce a una **serie de senos**, es decir:*

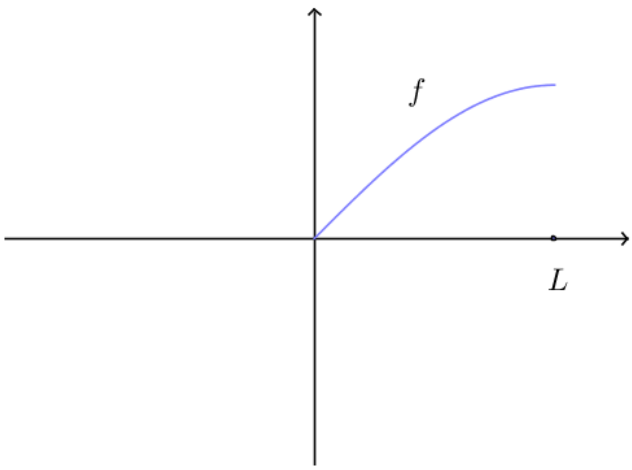
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad -L \leq x \leq L,$$

donde:

$$b_m = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

4. Expansión de Medio Rango (o Medio Intervalo)

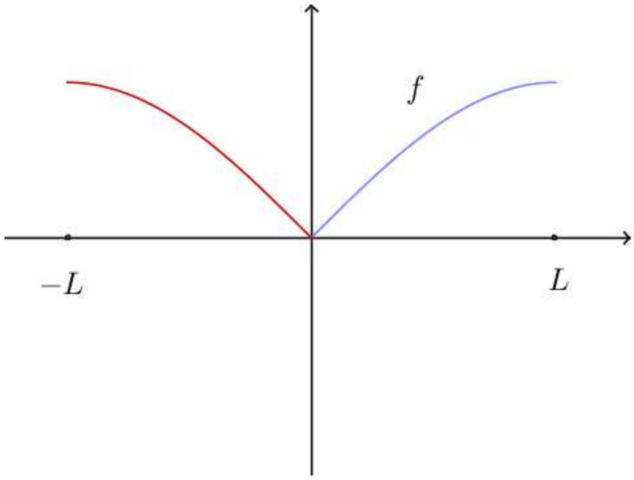
A partir de la función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ (como se muestra en la figura):



es posible construir la **extensión par** de la función f es decir, $f_{\text{par}} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ que está definida por:

$$f_{\text{par}}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad -L \leq x < 0 \\ f(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

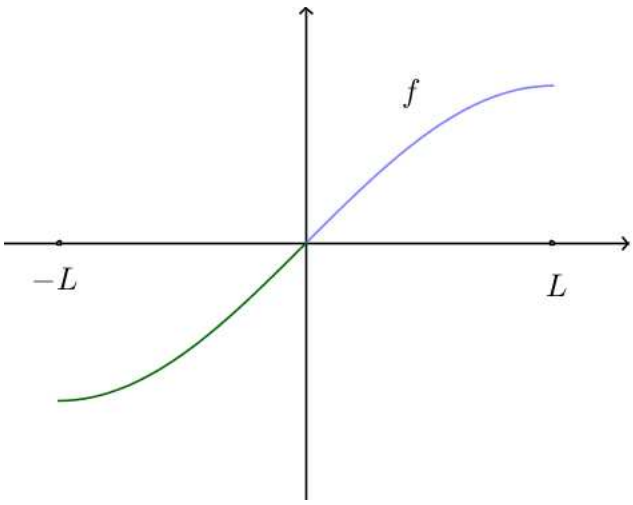
Gráficamente esto se hace reflejando a la función con respecto del eje y.



Del mismo modo, también es posible construir su **extensión impar**, $f_{\text{impar}} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_{\text{impar}}(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si} \quad -L \leq x < 0 \\ f(x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

Gráficamente esto se logra reflejando la función respecto al eje x y luego respecto al eje y.



5. Problema de Sturm-Liouville

Definición 7

Dadas las funciones $y_1, y_2, \cdots$ de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se dice que estas funciones son **ortogonales** *en el intervalo I* **con respecto a la función peso** *$r > 0$, si para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$ con $m \neq n$ se tiene:*

$$< y_m, y_n >= \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

para todo $x \in I = [a,b]$. La norma de la función y_m se denota por $||y_m||$, y se define como:

$$||y_m|| = \sqrt{< y_m, y_m >} = \sqrt{\int_a^b r(x) y_m^2(x) dx}.$$

DEFINICIÓN 8

Las funciones $y_1, y_2, \cdots$ de $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se llaman ***ortonormales*** *(con respecto a la función peso r) si son ortogonales en I y si todas ellas tienen norma 1. Esto se puede representar a través de la* ***delta de Kronecker*** *$\delta_{m,n}$ de la siguiente manera:*

$$< y_m, y_n >= \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & if \quad m = n \\ 0 & if \quad m \neq n \end{cases}$$

para todo $x \in I = [a,b]$. Para el caso particular donde $r(x) = 1$ tenemos:

$$< y_m, y_n >= \int_a^b y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n, \quad ||y_m|| = \sqrt{< y_m, y_n >} = \sqrt{\int_a^b y_m^2(x) dx}.$$

Ejemplo: Las funciones $y_m = \text{sen}(mx), m = 1, 2, \cdots$ forman un conjunto ortogonal en el intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, porque para $m \neq n$ obtenemos por integración:

$$(y_m, y_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \, \text{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)] \, dx$$

$$(y_m, y_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{sen}((m-n)x)}{m-n} - \frac{\text{sen}((m+n)x)}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n.$$

En la última expresión vemos claramente que los enteros $m - n$ y $m + n$, permiten que las dos integrales se anulen. Para la norma tenemos:

$$||y_m||^2 = (y_m, y_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2mx)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\text{sen}(mx)}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

para todo $m = 1, 2, \cdots$. En consecuencia, el conjunto ortonormal correspondiente, se obtiene de la división de cada función para su respectiva norma:

$$\left\{ \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen}(3x)}{\sqrt{\pi}}, \cdots \right\}$$

El siguiente teorema demuestra que para cualquier problema de Sturm - Liouville, las funciones propias asociadas son ortogonales. Es decir, en la práctica, si es posible formular un problema tipo Sturm - Liouville, entonces este teorema nos garantiza la ortogonalidad de dichas funciones propias.

6. Ortogonalidad de las Funciones Propias para Problemas de Sturm - Liouville

Definición 9: Ecuación de Sturm - Liouville

Dadas las funciones p, r positivas y la función q real, la ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma:

$$[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$$

para todo $x \in [a, b]$ con las condiciones:

$$\begin{cases} k_1 y + k_2 y' = 0 & \text{en} \quad x = a \\ l_1 y + l_2 y' = 0 & \text{en} \quad x = b \end{cases}$$

con $\lambda, k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, se conoce como ***problema de Sturm - Liouville****.*

Teorema 7

Supongamos que las funciones p, q, r (con $r(x) > 0$) y p' en la ecuación de Sturm - Liouville son contínuas y de valores reales en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ para todo $x \in I = [a, b]$. Además, sean $y_m(x)$ y $y_n(x)$ funciones propias del problema de Sturm - Liouville asociadas a los valores propios λ_m y λ_n, respectivamente. Entonces $y_m(x)$ y $y_n(x)$ son ortogonales en ese intervalo con respecto a la función peso r, esto es:

$$< y_m, y_n > = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad m \neq n.$$

7. Series Ortogonales de Polinomios: Series de Fourier Generalizadas

Definición 10: Serie de Fourier Generalizada

Sean $y_0, y_1, y_2, \cdots$ funciones ortogonales con respecto a la función peso $r(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$, y sea $f(x)$ una función que puede representarse por medio de la serie convergente,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) + \cdots \tag{1}$$

a esta se le llama serie ortogonal, expansión ortogonal, o ***serie de Fourier Generalizada****. Si las funciones y_m son funciones propias del problema de Sturm - Liouville, entonces llamamos a esta serie* ***expansión en funciones propias****.*

Dada la función $f(x)$, para determinar los coeficientes de Fourier a_m de $f(x)$ con respecto a y_0, $y_1, \cdots$, multiplicamos ambos lados de la ecuación anterior por $r(x)y_n(x)$ para un n fijo, y luego integramos ambos lados con respecto a $x \in [a, b]$, es decir:

$$< f, y_n >= \int_a^b rfy_n dx = \int_a^b r\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m\right) y_n dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_a^b r y_m y_n dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m < y_m, y_n >$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones, todas las integrales de la derecha son cero, excepto para $m = n$. Entonces tenemos:

$$< f, y_n >= a_n < y_n, y_n >= a_n ||y_n||^2.$$

Si asumimos que todas las funciones y_m tienen normas no nulas, entonces los coeficientes de Fourier toman la forma:

$$a_m = \frac{< f, y_m >}{||y_m||^2} = \frac{1}{||y_m||^2} \int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^+$.

CRÉDITOS

La presente hoja de resúmenes constituye una tercera versión revisada de la realizada durante el periodo 2018-B por los miembros de la cátedra de Análisis de Fourier: Mat. Carlos Ajila, Mat. Leonardo Montoya, Fis. Marcelo Arias, Fis. Anibal Cruz, Ing. Byron Montenegro y mi persona.

1. INTEGRAL DE FOURIER

DEFINICIÓN 1: Función absolutamente integrable

*Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **absolutamente integrable** si la integral de Riemann impropia*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$$

es convergente.

DEFINICIÓN 2: Integral de Fourier

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función absolutamente integrable. Para cada $w \geq 0$ se define:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(wv)\, dv \qquad y \qquad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \operatorname{sen}(wv)\, dv.$$

A la expresión:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

*se la llama la **representación de $f(x)$ por una integral de Fourier**, y a la integral que aparece en esta expresión se la llama **integral de Fourier**.*

!

La expresión

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

en la definición anterior no debe entenderse como una igualdad. Se trata de un abuso de lenguaje para indicar que:

$$\int_{0}^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw$$

es la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier.

TEOREMA 1: Integral de Fourier

*Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función no necesariamente periódica y absolutamente integrable. La **representación en integral de Fourier** de $f(x)$ está dada por:*

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \operatorname{sen}(wx)]\, dw,$$

para cada $w \geq 0$. Donde $A(w)$ y $B(w)$ están dados por:

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv \qquad y \qquad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(wv)\,dv.$$

TEOREMA 2: Existencia (y convergencia) de la integral de Fourier

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente integrable continua por tramos en todo intervalo acotado y si f admite derivadas por izquierda y derecha en todo punto, entonces $f(x)$ admite una representación por una integral de Fourier para todo $x \in \mathbb{R}$. La integral de Fourier converge a $f(x)$ en los puntos $x \in \mathbb{R}$ donde f es continua y hacia:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

en los puntos $x \in \mathbb{R}$ donde f es discontinua.

2. INTEGRALES FOURIER DE SENO Y COSENO

Cuando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par que admite una representación por una integral de Fourier, se tiene, para $w \geq 0$, que

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(wv)\,dv = 0$$

y

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv,$$

gracias a la imparidad y paridad, respectivamente, de los integrandos.

DEFINICIÓN 3: Integral de Fourier de Coseno

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par absolutamente integrable y si para cada $w \geq 0$,

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv,$$

a la expresión:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} A(w)\cos(wx)\,dx$$

se la llama la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier de coseno *y a la integral en dicha expresión se la denomina* ***integral de Fourier de coseno***.

Análogamente, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar, para $w \geq 0$ se tiene que

$$A(w) = 0 \qquad \text{y} \qquad B(w) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(v)\operatorname{sen}(vw)\,dv.$$

DEFINICIÓN 4: Integral de Fourier de Seno

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función impar absolutamente integrable y si para cada* $w \geq 0$*,*

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(v) \operatorname{sen}(wv)\, dv,$$

a la expresión:

$$f(x) = \int_0^\infty B(w) \operatorname{sen}(wx)\, dx$$

se la llama la representación de $f(x)$ por una integral de Fourier de seno *y a la integral en dicha expresión se la denomina* ***integral de Fourier de seno****.*

CRÉDITOS

La presente hoja de resúmenes constituye una tercera versión revisada de la realizada durante el periodo 2018-B por los miembros de la cátedra de Análisis de Fourier: Mat. Carlos Ajila, Mat. Leonardo Montoya, Fis. Marcelo Arias, Fis. Anibal Cruz, Ing. Byron Montenegro y mi persona.