Semestre 2020B

Prueba 1

1. Sean X un conjunto y $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos de X tal que verifica las siguientes propiedades:

   (a) $X \in \mathscr{A}$.

   (b) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A}$.

   Demuestre que $\mathscr{A}$ es un álgebra en X.

2. Sean X un conjunto, $Y \subseteq X$ y $\mathscr{A}$ una σ-álgebra sobre X.

   (a) Demuestre que la familia $\mathscr{A}_0 = \{A \cap Y \mid A \in \mathscr{A}\}$ es una σ-álgebra sobre Y.

   (b) ¿Es la familia $\mathscr{B}_0 = \{A \cup Y \mid A \in \mathscr{A}\}$ una σ-álgebra sobre Y? ¿Sobre X? Justifique su respuesta.

3. Sean X un conjunto, $\mathscr{A}$ una σ-álgebra sobre X y $m : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ una función aditiva y numerablemente subaditiva sobre $\mathscr{A}$. Demuestre que m es una función numerablemente aditiva sobre $\mathscr{A}$.

Semestre 2020B

Examen 1

1. **(3 ptos.)** Sea $(X, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espacio probabilizado. Demuestre que

$$\mathscr{B} = \{A \in \mathscr{A} \mid \mathbb{P}(A) = 0 \vee \mathbb{P}(A) = 1\}$$

es una $\sigma-$álgebra sobre X.

2. a) **(2 ptos.)** Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Si $A, B \in \mathscr{A}$, muestre que:

$$\mu(A \Delta B) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B).$$

b) **(1 pto.)** Exponga **dos** contraejemplos en **dos** espacios medidos $(X, \mathscr{A}, \mu)$ **distintos** para demostrar la falsedad de:

$$\mu(A) = \mu(B) \Rightarrow \mu(A \Delta B) = 0.$$

3. Sean X un conjunto, $Y \subseteq X$ y $\mathscr{E}$ una σ-álgebra sobre X.

a) **(1 pto.)** Demuestre que la familia $\mathscr{E}_0 = \{A \cap Y \mid A \in \mathscr{E}\}$ es una σ-álgebra sobre Y.

b) **(1 pto.)** Considerando $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K})$ y $\mathscr{K}_0 = \{A \cap Y \mid A \in \mathscr{K}\}$ para $\mathscr{K} \subseteq \mathcal{P}(X)$, utilice el literal anterior para demostrar que $\sigma(\mathscr{K}_0) \subseteq \mathscr{E}_0$.

c) **(1 pto.)** Muestre que la familia $\mathscr{F} = \{A \in \mathscr{E} \mid A \cap Y \in \sigma(\mathscr{K}_0)\}$ es una σ-álgebra sobre X que contiene a $\mathscr{K}$.

d) **(1 pto.)** Utilice el literal anterior para demostrar que $\mathscr{E}_0 \subseteq \sigma(\mathscr{K}_0)$ (y así concluir que $\mathscr{E}_0 = \sigma(\mathscr{K}_0)$).

Prueba 1

1. Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

   (a) Demuestre que u es Lebesgue medible.

   (b) Demuestre que u' es Lebesgue medible.

2. Demuestre que las siguientes funciones son Lebesgue medibles:

   (a) Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estricatamente creciente.

   (b) Una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \text{ es racional,} \\ \cos(x) & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

3. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas en X sobre $\mathbb{R}$, todas ellas $\mathscr{A}-$medibles. Demuestre que el conjunto

$$A = \{x \in X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión de Cauchy}\}$$

   es $\mathscr{A}-$medible.

4. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sean $f : X \to \mathbb{R}$ una función medible y $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualesquiera. Demuestre que si $f = g$ $\mu - c.t.p$, entonces $\Phi \circ f = \Phi \circ g$ $\mu - c.t.p.$

Examen Segundo Bimestre

1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas sobre $[0,\pi]$ a valores en $\mathbb{R}$, tal que $f_0(x)=0$, $f_1(x)=1$, y para cada $n\geq 2$, $f_n(x)=\dfrac{n\sin(x)}{\sqrt{n^2-2n\cos(x)+1}}$.

   (a) Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue.

   (b) Verifique que se satisface la tesis del Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, es decir:
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f_n(x)\,dx=\int_0^{\pi}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx.$$

2. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\arctan(n)}\left(e^{-n^2\cos(x)}+\frac{1+n^2x}{\pi n^2}\right)dx.$

3. Demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx=1.$

   Sugerencia: Recuerde que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$, y que $\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathbb{1}_{[0.n]}(x)\,dx$