Teoría de la Medida

*Semestre 2020B*

# Trabajo en Clase 1

1. Sea $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de álgebras sobre $X$. Demuestre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ es un álgebra sobre $X$.

2. Sea $m : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{R}_+$ una aplicación que satisface las siguientes propiedades:

   (i) $m(\varnothing) = 0$;

   (ii) Para todo $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$, se tiene que $m(A) \leq m(B)$;

   (iii) Para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ se tiene la estimación:

   $$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n).$$

   Se define la familia,

   $$\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R} \mid m(A) = m(A \cap E) + m(A \cap E^c),\ \forall A \subseteq \mathbb{R}\}.$$

   (a) Muestre que para todo $A, B, C \subset \mathbb{R}$

   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C \cap B^c).$$

   (b) Muestre que para probar que $E \in \mathcal{M}$, basta probar que

   $$m(A) \geq m(A \cap E) + m(A \cap E^c),\ \forall A \subseteq \mathbb{R}.$$

   (c) Muestre que $\mathcal{M}$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$.

Teoría de la Medida

*Semestre 2020B*

# Trabajo en Clase 2

1. Sea $X$ un conjunto infinito. Se dice que $A$ es un conjunto cofinito si su complemento es un conjunto finito. Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos finitos y cofinitos de $X$.

    1. Demuestre que $\mathscr{A}$ es un álgebra sobre $X$.
    2. Demuestre que $\mathscr{A}$ es una $\sigma-$álgebra sobre $X$ si y solo si $X$ es finito.

2. Sea $X$ un conjunto no numerable; se define la siguiente familia de conjuntos:

$$\mathscr{A} = \{A \subset X \mid A \text{ es a lo más numerable o } A^c \text{ es a lo más numerable}\}.$$

Demuestre que $\mathscr{A}$ es una $\sigma-$álgebra.

# Trabajo en Clase 3

1. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $A \subseteq X$. Pruebe que $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ es $(\mathscr{A}, Bor(\mathbb{R}))-$medible si y solo si $A$ es $\mathscr{A}-$medible.

2. Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -e^{-\frac{x^2}{2}} < \alpha \right\}$

   (a) Muestre que si $-1 < \alpha < 0$, entonces $A = \left]-\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}, \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}\right[$.

   (b) Utilice el resultado anterior para probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}}$ es $(Bor(\mathbb{R}), Bor(\mathbb{R}))-$medible.

3. Sea $X$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial. Si $(X, \mathscr{A})$ es un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función $(\mathscr{A}, Bor(\mathbb{R}))$-medible y lineal demuestre que, para todo $y \in X$ y para todo $r \in \mathbb{R}$, la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(rx + y)$ es $(\mathscr{A}, Bor(\mathbb{R}))$-medible.

Teoría de la Medida

*Semestre 2020B*

# Trabajo en Clase 4

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ \arctan(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

   Muestre que $f$ es una función medible.

2. Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $X$ en $\mathbb{R}$, todas ellas $\mathscr{A}-$medibles. Demuestre que los siguientes conjuntos son $\mathscr{A}-$medibles:

$$A = \{x \in X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada inferiormente}\},$$

$$B = \{x \in X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada superiormente}\}.$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Muestre que si el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces $f$ es medible.