Teoría de la Medida

Semestre 2020B - Segundo Bimestre

Trabajo en Grupo 2 (Grupo 1)

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -e^{-(x+2)^2/2} + 3$. Demuestre de **DOS** maneras diferentes que f es una función Lebesgue medible.

2. Sean $X = [\frac{1}{5}, 9]$, $\mathscr{A} = \mathcal{B}or([\frac{1}{5}, 9])$, y μ la medida de Lebesgue. Sea la función

$$
\begin{aligned}
f : X &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} 3 & \text{si } x < \frac{3}{4}, \\ \lfloor x + \frac{1}{4} \rfloor & \text{si } x \geq \frac{3}{4}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

donde $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es la función piso, definida por $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.

   (a) Dibuje la gráfica de f

   (b) Muestre que $f \in \mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$.

   (c) Calcule $\displaystyle\int_X f(x)\, d\mu(x)$.

3. Sea f una función medible a valores reales, no negativa y definida sobre un espacio medido $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Suponga que $\displaystyle\int_E f\, d\mu = 0$ para todo $E \in \mathscr{A}$. Muestre que $f = 0$ c.t.p.

Teoría de la Medida

Semestre 2020B

Trabajo en Grupo 1 (Grupo 1)

1. Sea μ la medida de Dirac en un punto arbitario $a \in \mathbb{R}$. Indique, justificando su respuesta, el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

   a) $\forall\, F \subseteq \mathbb{R}$ finito, $\mu(F) = 0$,

   b) $\forall\, K \subseteq \mathbb{R}$ compacto, $\mu(K) < +\infty$,

   c) $\exists\, C \subseteq \mathbb{R}$ conexo diferente de vacío tal que $\mu(C) = 0$.

2. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, dando una justificación detallada para su respuesta.

   a) Si $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ es la función indicatriz de $A \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{1}_B : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, es la función indicatriz de $B \subset \mathbb{R}$, entonces $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

   b) La unión de conjuntos de medida nula es también de medida nula.

   c) La medida de conteo en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es una medida no-atómica.

3. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Demuestre que la siguiente familia es una $\sigma-$álgebra sobre X:

   $$\mathscr{A}_\mu = \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\, \text{Existen } B,\, C \in \mathscr{A} \text{ con } \mu(C) = 0 \text{ tales que } A \Delta B \subseteq C\}\,.$$

Semestre 2020B - Segundo Bimestre

Trabajo en Grupo 2 (Grupo 2)

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-(x-4)^2/2} + \pi$. Demuestre de **DOS** maneras diferentes que f es una función Lebesgue medible.

2. Sea $X = [-6, 8]$, $\mathscr{A} = \mathscr{B}or([-6, 8])$, y μ la medida de Lebesgue. Sea la función

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 5 & \text{si } x < \frac{1}{4}, \\ \lfloor x + \frac{3}{4} \rfloor & \text{si } x \geq \frac{1}{4}, \end{cases} \end{aligned}$$

donde $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es la función piso, definida por $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.

   1. Dibuje la gráfica de f
   2. Muestre que $f \in \mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$.
   3. Calcule $\displaystyle\int_X f(x)\, d\mu(x)$.

3. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función simple definida por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} \quad \text{donde} \quad A_i = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) = a_i\}.$$

Demuestre que ϕ es medible si y solo si A_i es medible para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teoría de la Medida

Semestre 2020B

Trabajo en Grupo 1 (Grupo 2)

1. Sea μ la medida de conteo sobre los borelianos de $\mathbb{R}$. Indique, justificando su respuesta, el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

   a) $\forall\, F \subseteq \mathbb{R}$ finito, $\mu(F) = 0$,

   b) $\forall\, K \subseteq \mathbb{R}$ compacto, $\mu(K) < +\infty$,

   c) $\exists\, C \subseteq \mathbb{R}$ conexo diferente de vacío tal que $\mu(C) = 0$.

2. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, dando una justificación detallada para su respuesta.

   a) Si X es un conjunto y $\mathscr{A}$ una $\sigma-$álgebra definida sobre X, la aplicación $\mu : \mathscr{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ en la cual $\mu(\varnothing) = 0$ y $\mu(A) = 1$ si $A \neq \varnothing$, es una medida sobre X.

   b) Si $A \subset \mathbb{R}$ es un boreliano de medida de Lebesgue finita, entonces A es acotado.

   c) Si $\mathscr{A}$ es una $\sigma-$álgebra, entonces $\mathscr{A} \subsetneq \sigma(\mathscr{A})$.

3. Sean X un conjunto y $\mathscr{C}$ una familia de subconjuntos de X. El objetivo de este ejercicio es mostrar que para cada $A \in \sigma(\mathscr{C})$ existe una sub-familia numerable $\mathscr{C}_A$ de $\mathscr{C}$ tal que $A \in \sigma(\mathscr{C}_A)$.

   a) Sea $\mathscr{B}$ la familia de todos los subconjuntos A de X para los cuales existe una sub-familia numerable $\mathscr{C}_{\mathscr{A}}$ de $\mathscr{C}$ tal que $A \in \sigma(\mathscr{C}_A)$. Muestre que $\mathscr{B}$ es una $\sigma-$álgebra sobre X tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$.

   b) Concluya.

Trabajo en Grupo 2 (Grupo 3)

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -e^{-(x-1)^2/2} - 2$. Demuestre de **DOS** maneras diferentes que f es una función Lebesgue medible.

2. Sea $X = [-1; 8{,}5]$, $\mathscr{A} = \mathcal{B}or([-1; 8{,}5])$, y μ la medida de Lebesgue. Sea la función

$$\begin{aligned} f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \pi & \text{si } x < \frac{3}{2}, \\ \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor & \text{si } x \geq \frac{3}{2}, \end{cases} \end{aligned}$$

   donde $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ es la función piso, definida por $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.

   1. Dibuje la gráfica de f
   2. Muestre que $f \in \mathcal{S}^+(X, \mathscr{A}, \mu)$.
   3. Calcule $\displaystyle\int_X f(x)\, d\mu(x)$.

3. Sea f una función medible a valores reales extendidos definida sobre un conjunto medible D. Suponga que f es integrable en D. Muestre que el conjunto $\{x \in D \mid f(x) \neq 0\}$ es σ-finito.

Semestre 2020B

Trabajo en Grupo 1 (Grupo 3)

1. Sea μ la medida de Lebesgue sobre los borelianos de $\mathbb{R}$. Indique, justificando su respuesta, el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

   a) $\forall\, F \subseteq \mathbb{R}$ finito, $\mu(F) = 0$,

   b) $\forall\, K \subseteq \mathbb{R}$ compacto, $\mu(K) < +\infty$,

   c) $\exists\, C \subseteq \mathbb{R}$ conexo diferente de vacío tal que $\mu(C) = 0$.

2. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, dando una justificación detallada para su respuesta.

   a) Si $(X, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ es un espacio probabilístico, entonces para todo $A, B \subset \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

   b) La unión de dos $\sigma-$álgebras es también una $\sigma-$álgebra.

   c) Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ es un espacio medido y A, $B \in \mathscr{A}$ son tales que $A \subseteq B$ entonces $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

3. Sea $\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}^n \,|\, K \text{ es compacto}\}$ y sea $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la $\sigma-$álgebra boreliana sobre $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{K})$.
   Sugerencia: Para demostrar la inclusión $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(\mathcal{K})$ es preciso demostrar que todo conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse como unión numerable de conjuntos compactos. Para ello, dado un abierto U, considere la familia

$$\mathcal{B}_U = \{\overline{B(x,r)} \,|\, x \in U \cap \mathbb{Q}^n,\, r \in \mathbb{Q}^+ \text{ y } \overline{B(x,r)} \subset U\}.$$