1. Dados los planos
$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}, \quad M = \{P + sA + tB : s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\},$$
donde $P = (1,1,3)$, $A = (1,1,1)$ y $B = (1,4,-1)$, y el campo escalar
$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto \operatorname{sen}(xyz), \end{aligned}$$
encontrar la derivada direccional de f en cualquier punto (x,y,z) en la dirección unitaria de la intersección de los planos M y N.

Solución. Tomemos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(x,y,z) \in M$ y $(x,y,z) \in N$, se tiene que
$$x = y \tag{1}$$
y que
$$(x,y,z) = (1,1,3) + s(1,1,1) + t(1,4,-1)$$
para algún $s \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, es decir,
$$x = 1 + s + t, \tag{2}$$
$$y = 1 + s + 4t, \tag{3}$$
$$z = 3 + s - t \tag{4}$$
para algún $s, t \in \mathbb{R}$. Utilizando (1), (2) y (3), tenemos que $t = 0$, de donde, se tiene que
$$\begin{aligned} x &= 1 + s, \\ y &= 1 + s, \\ z &= 3 + s. \end{aligned}$$
Con esto, se tiene que la intersección es
$$\{(1,1,3) + s(1,1,1) : s \in \mathbb{R}\} = L((1,1,3);(1,1,1)).$$
Por lo tanto, la dirección unitaria es
$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
Finalmente, la derivada de f en cualquier punto (x,y,z) en dirección solicitada es
$$\begin{aligned} f'\left((x,y,z); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) &= \nabla f(x,y,z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= (yz\cos(xyz), xz\cos(xyz), xy\cos(xyz)) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(yz + xz + xy)\cos(xyz). \end{aligned}$$
Otra respuesta admisible es
$$f'\left((x,y,z); \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}(yz + xz + xy)\operatorname{sen}(xyz),$$
pues $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ también es un vector unitario. □

2. Hallar la ecuación del plano osculador de la trayectoria
$$\begin{aligned} r\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (1, \cos t, \operatorname{sen} t) \end{aligned}$$
en el punto $(1,1,0)$.

Solución. Es claro que la curva pasa por el punto $(1,1,0)$ cuando $t=0$. Debemos hallar el vector tangente unitario y el normal unitario. Puesto que cada componente de r es derivable, se tiene que

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \\ &= \frac{(0,-\operatorname{sen}(t),\cos(t))}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(t)+\cos^2(t)}} \\ &= (0,-\operatorname{sen}(t),\cos(t)) \end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned} T'(t) &= (0,-\cos(t),-\operatorname{sen}(t)) \\ &= -(0,\cos(t),\operatorname{sen}(t)) \end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \\ &= \frac{-(0,\cos(t),\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)}} \\ &= T'(t). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$T(0) = (0,0,1) \qquad \text{y} \qquad N(0) = T'(0) = (0,-1,0).$$

Por tanto, el plano osculador de la trayectoria r en el punto $(1,1,0)$ es el plano que pasa por $(1,1,0)$ y tiene direcciones $T(0)$ y $N(0)$, entonces

$$\begin{aligned} P &= \{(1,1,0)+\lambda T(0)+\mu N(0) : \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1,1,0)+\lambda(0,0,1)-\mu(0,1,0) : \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1,1-\mu,\lambda) : \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1,s,t) : s,t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Podemos determinar la ecuación cartesiana de este plano a través del producto

$$\begin{aligned} T(0)\times N(0) &= (0,0,1)\times(0,-1,0) \\ &= (1,0,0). \end{aligned}$$

Luego, la ecuación del plano es

$$1(x-1)+0(y-1)+0(z-0)=0;$$

es decir,

$$x-1=0.$$

□

3. El movimiento de dos partículas A y B está dado mediante las trayectorias

$$\begin{aligned} r_A\colon [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (e^t\operatorname{sen}(2t), e^t\cos(2t)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_B\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,1-t) \end{aligned}$$

que describen el vector posición de A y B, respectivamente. ¿Cuál de las dos partículas recorre una distancia mayor?

Solución. Para determinar la distancia recorrida, vamos a hallar la longitud de cada trayectoria.

- Como r_A es derivable, se tiene que

  $$r_A'(t) = (e^t(\operatorname{sen}(2t)+2\cos(2t)), e^t(\cos(2t)-2\operatorname{sen}(2t)))$$

  para cada $t \in]0,2\pi[$. Así,

  $$\|r_A'(t)\|^2 = e^{2t}((\operatorname{sen}(2t)+2\cos(2t))^2+(\cos(2t)-2\operatorname{sen}(2t))^2) = e^{2t}(1+4) = 5e^{2t},$$

de donde

$$\|r_A'(t)\| = \sqrt{5}e^t$$

para cada $t \in]0, 2\pi[$. Así, la distancia recorrida por la partícula A es

$$\int_0^{2\pi} \|r_A'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}e^t\, dt = \sqrt{5}(e^{2\pi} - 1).$$

- De igual manera, como r_B es derivable, se tiene que

$$r_B'(t) = (1, -1)$$

para cada $t \in]0, 1\pi[$. Así,

$$\|r_B'(t)\| = \sqrt{2}$$

para cada $t \in]0, 1[$. Así, la distancia recorrida por la partícula B es

$$\int_0^1 \|r_B'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{2} dt = \sqrt{2}.$$

Dado que $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2$ y $e \approx 2,7$, se tiene que la partícula A recorrió una mayor distancia que la partícula B. □

4. Sea el campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^4 + (y + x^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

¿Es f continua en $(0,0)$?

Solución. Debemos analizar el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$. Para esto, analicemos el límite por la curva de ecuación $y = x^2$. Una parametrización de esta curva es

$$\begin{aligned} r\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto r(t) = (t, t^2), \end{aligned}$$

además, $r(0) = (0,0)$, por lo tanto, debemos calcular

$$\lim_{t \to 0} f(r(t)).$$

Tenemos que

$$\lim_{t \to 0} f(r(t)) = \lim_{t \to 0} f(t, t^2) = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{t^4 + (t^2 + t^2)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{5t^4} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{5t}.$$

Dado que este último límite no existe, tenemos que el límite por la curva de ecuación $y = x^2$ no existe y por lo tanto, el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ no existe. Así, se concluye que la función no es continua en $(0,0)$. □

5. Sea

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2\|x\|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Determinar para qué vectores a y y de $\mathbb{R}^n$ existe $f'(a; y)$ y calcular el gradiente de f.

Solución. Recordemos que si φ es un campo escalar definido sobre un conjunto abierto S de $\mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ y g es la función definida por

$$g(t) = \varphi(a + ty)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $a + ty \in S$, entonces existe $\varphi'(a; y)$ si existe g' y, además, se tiene que

$$\varphi'(a + ty; y) = g'(t)$$

para todo t en el dominio de g.

Sean $a \in \mathbb{R}^n$ y $y \in \mathbb{R}^n$; para el caso de f, tenemos que

$$g(t) = f(a + tv)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\|a+ty\|^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left([(a+ty)\cdot(a+ty)]^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\,[(a+ty)\cdot(a+ty)]^{\frac{1}{4}} \\
&= 2\left[a\cdot a+2ta\cdot y+t^2y\cdot y\right]^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, la función g es derivable para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $a + ty \neq 0$ y su derivada es:

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{1}{2}\left[a\cdot a+2ta\cdot y+t^2y\cdot y\right]^{-\frac{3}{4}}\left(a\cdot a+2ta\cdot y+t^2y\cdot y\right)' \\
&= \frac{1}{2}\left[\|a+ty\|^2\right]^{-\frac{3}{4}}(2(a\cdot y)+2t(y\cdot y)) \\
&= \frac{1}{2}\|a+ty\|^{-\frac{3}{2}}\left(2(a\cdot y)+2t\|y\|^2\right).
\end{aligned}
$$

Luego, g es derivable en 0 siempre que $a \neq 0$; y, en ese caso, tenemos que

$$
\begin{aligned}
g'(0) &= \frac{1}{2}\|a\|^{-\frac{3}{2}}(2(a\cdot y)) \\
&= \|a\|^{-\frac{3}{2}}(a\cdot y).
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$f'(a;y) = \|a\|^{-\frac{3}{2}}(a\cdot y)$$

si $a \neq 0$ y para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

Por definición, el gradiente de f es el vector de las n derivadas parciales de f:

$$\nabla f(x) = (D_1f(x), D_2f(x), \ldots, D_nf(x))$$

para todo $x \neq 0$.

Ahora bien, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $x \neq 0$, tenemos que

$$D_if(x) = f(x; e^i),$$

donde e^i es el i–ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Luego,

$$
\begin{aligned}
D_if(x) &= f(x;e^i) \\
&= \|x\|^{-\frac{3}{2}}(x\cdot e^i) \\
&= \|x\|^{-\frac{3}{2}}x_i
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$\nabla f(x) = \|x\|^{-\frac{3}{2}}x. \qquad \square$$

Escuela Politécnica Nacional

Cálculo Vectorial • Examen del Primer Bimestre

Miércoles 6 de junio de 2018. **Duración**: 120 minutos *Departamento de Formación Básica*

1. Dada la trayectoria

$$\begin{aligned} r\colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (-t, \cos t, -\operatorname{sen} t), \end{aligned}$$

   a) Calcular la distancia entre sus dos extremos (punto inicial y punto final).
   b) Calcular la longitud de la trayectoria (la distancia que recorrería una partícula si se moviera a lo largo de esta trayectoria).

Solución. En primer lugar, los puntos extremos de esta trayectoria son $r(0)$ y $r(\pi)$; es decir, son los puntos

$$(-0, \cos 0, -\operatorname{sen} 0) = (0,1,0) \qquad \text{y} \qquad (-\pi, \cos\pi, -\operatorname{sen}\pi) = (-\pi,-1,0).$$

a) La distancia entre los extremos es

$$\sqrt{(0+\pi)^2 + (1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{\pi^2+4}.$$

b) La longitud de la trayectoria es

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \|r'(t)\|\,dt &= \int_0^\pi \|(-1, -\operatorname{sen} t, -\cos t)\|\,dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2} \\ &= \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

□

2. Sea

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(1,2)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^4+(y-2)^2}. \end{aligned}$$

Calcular el límite de la función cuando (x,y) tiende a $(1,2)$ por la trayectoria de ecuación $y-2=(x-1)^2$.

Solución. Definamos la trayectoria r por

$$\begin{aligned} r\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto r(t) = (t, 2+(t-1)^2). \end{aligned}$$

Determinemos el valor t tal que $r(t) = \big(t, 2+(t-1)^2\big) = (1,2)$, en este caso, $t=1$. Ahora, calculemos el límite de f a través de la trayectoria definida por r,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1} f(r(t)) &= \lim_{t\to 1} f\left(t, 2+(t-1)^2\right) \\ &= \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)^2(2+(t-1)^2-2)}{(t-1)^4+(2+(t-1)^2-2)^2} \\ &= \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)^4}{2(t-1)^4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

3. Considere el siguiente campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{2x-\operatorname{sen}(xy)}{y}. \end{aligned}$$

   a) Calcular $\nabla f(x,y)$ para $(x,y)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\smallsetminus\{0\})$.
   b) Comprobar que $\left(\frac{1}{2},\pi\right) \in L_0(f)$.

c) Calcular $\nabla f\left(\frac{1}{2},\pi\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\pi\right)$.

d) Explique por qué el resultado anterior no contradice la propiedad: el gradiente es normal a las curvas de nivel.

Solución.

a) Calculando las derivadas parciales, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2-y\cos(xy)}{y}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y(-x\cos(xy))-(2x-\operatorname{sen}(xy))}{y^2}=\frac{-xy\cos(xy)-2x+\operatorname{sen}(xy)}{y^2}$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}$ donde $y\neq 0$, por lo tanto

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{2-y\cos(xy)}{y},\frac{-xy\cos(xy)-2x+\operatorname{sen}(xy)}{y^2}\right),$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}$ con $y\neq 0$.

b) Por otro lado, por definición de conjunto de nivel tenemos que

$$L_0(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}):f(x,y)=0\},$$

y puesto que

$$f\left(\frac{1}{2},\pi\right)=\frac{2\frac{1}{2}-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{\pi}=0,$$

se tiene que $\left(\frac{1}{2},\pi\right)\in L_0(f)$.

c) Ahora, se tiene que

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},\pi\right)=\left(\frac{2}{\pi},0\right),$$

por lo tanto,

$$\nabla f\left(\frac{1}{2},\pi\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\pi\right)=\left(\frac{2}{\pi},0\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\pi\right)=\frac{1}{\pi}.$$

d) Finalmente, el gradiente es normal a la curva, es decir, al vector tangente a la curva, pero no es necesariamente normal a los puntos de la curva. □

4. Suponga que un pájaro vuela a lo largo de la trayectoria helicoidal

$$\begin{aligned} r\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ t &\longmapsto (\cos(t),\operatorname{sen}(t),t). \end{aligned}$$

De pronto, el pájaro encuentra un frente de mal clima de manera que la presión barométrica varía de un punto a otro de acuerdo con la función

$$\begin{aligned} P\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y,z) &\longmapsto x^2zy \end{aligned}$$

donde $P(x,y,z)$ es la presión barométrica en atmósferas en un punto $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. La variación de la presión que siente el pájaro está dada por la derivada de la composición de P con la trayectoria del pájaro. Utilizando la regla de la cadena para campos escalares, determine la forma en que varía la presión para el pájaro en el momento $t=\pi$ minutos.

Solución. Para determinar la forma en que cambia la presión, se necesita calcular

$$(P\circ r)'(t)=\nabla P(r(t))\cdot r'(t)$$

por definición de derivada de una trayectoria, se tiene que

$$r'(t)=(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),3)$$

Por otro lado, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$\nabla P(x,y,z)=\left(2xzy,x^2z,x^2y\right)$$

Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}(P\circ r)'(t) &= \nabla P(r(t))\cdot r'(t)\\ &= \nabla P(\cos(t),\operatorname{sen}(t),t)\cdot r'(t),\\ &= \Big(2t\cos(t)\operatorname{sen}(t), t\cos^2(t), \cos^2(t)\operatorname{sen}(t)\Big)\cdot(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),1),\\ &= t\cos^3(t)+\operatorname{sen}(t)\cos^2(t)-2t\operatorname{sen}^2(t)\cos(t).\end{aligned}$$

Evaluando cuando $t=\pi$ min.

$$(P\circ r)'(\pi) = -\pi.$$

Por lo tanto, la presión para el pájaro varía a razón de $-\pi$. □

5. Dados los siguientes campos escalares

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto f(x,y)=x^2+y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (u,v) &\longmapsto x(u,v)=e^{uv}\end{aligned}\qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} y\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (u,v) &\longmapsto y(u,v)=u^2+v,\end{aligned}$$

se define la función

$$\begin{aligned} h\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (u,v) &\longmapsto h(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))\end{aligned}$$

Utilizando la regla de la cadena para campos vectoriales, calcule $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ en el punto $(u,v)=(0,1)$.

Solución. Para $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que:

$$\frac{\partial(h)}{\partial u}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v),$$

además

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)=ve^{uv} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)=2u$$

y para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))=\frac{\partial f}{\partial x}(e^{uv},u^2+v)=2\left(e^{uv}\right)$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))=\frac{\partial f}{\partial y}(e^{uv},u^2+v)=2(u^2+v)$$

Se tiene entonces que,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ &=2\left(e^{uv}\right)\left(ve^{uv}\right)+2(u^2+v)\,(2u)\end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(u,v)=(0,1)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial u}(0,1)&=2(e^0)(1e^0)+2(0^2+1)\,(2(0))\\ &=2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ en el punto $(u,v)=(0,1)$ es igual a 2. □

Solución. Definamos la función

$$\begin{aligned} g\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (u,v) &\longmapsto g(x,y)=(x(u,v),y(u,v))=(e^{uv},u^2+v),\end{aligned}$$

con esto, tenemos que $h=f\circ g$, por lo tanto

$$J_h(u,v)=J_f(g(u,v))J_g(u,v)$$

para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Ahora, calculemos las matrices jacobianas de f y g:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y

$$J_g(u, v) = \begin{pmatrix} ve^{uv} & ue^{uv} \\ 2u & 1 \end{pmatrix}$$

para $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Así, dado que $g(0, 1) = (1, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} J_h(0, 1) &= J_f(g(0, 1))J_g(0, 1) \\ &= J_f(1, 1)J_g(0, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ en el punto $(u, v) = (0, 1)$ es igual a 2. $\square$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

CÁLCULO VECTORIAL • EXAMEN DEL PRIMER BIMESTRE

Miércoles 18 de julio de 2018. **Duración**: 90 minutos *Departamento de Formación Básica*

1. No se penalizará la omisión de la cuantificación de variables en ninguna pregunta.
2. La omisión de la notación para indicar la evaluación de una función en un punto (técnicamente, la imagen de un elemento del dominio respecto de la función) se penalizará hasta con 0,3 en el componente de cálculos (C).
3. La omisión o errores en la notación (como los paréntesis para vectores, matrices, las comas entre las componentes de los vectores, etcétera) se penalizará hasta con 0,2 en el componente de cálculos (C).
4. Si una pregunta se responde utilizando un procedimiento diferente del que se señala en el enunciado, el puntaje máximo que se puede obtener en el componente de aplicación de conceptos (A) es 0,3 y en el de cálculos (C) es 0,3; no los otros componentes no serán penalizados.
5. En el **Ejercicio 1**, la omisión o fallo en la comprobación de la hipótesis del Teorema de la Función Implícita (definición de la función F e indicación de que $F(x,y,f(x,y)) = 0$) será penalizada hasta con 0,3 en el componente de aplicación de conceptos (A).
6. En el **Ejercicio 3**, la omisión o el fallo en el planteamiento del problema (definición de la función L o equivalentes) será penalizada hasta con 0,3 en el componente de aplicación de conceptos (A).
7. En el **Ejercicio 4**, los fallos u omisión en la representación del conjunto D como región de tipo I o tipo II será penalizada hasta con 0,2 en cada caso. Los fallos en el cálculo de los límites de integración y en el orden de integración serán penalizados en el componente de cálculos (C).

1. Dada una función derivable $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supóngase que tenemos un campo escalar $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que verifica la igualdad
$$g(x + yf(x,y)) = x,$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $f(0,1) = 1$ y $g'(1) = 2$, hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ utilizando el **Teorema de la Función Implícita**.

Solución. Definamos el campo escalar F por

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto F(x,y,z) = g(x+yz) - x. \end{aligned}$$

Notemos que
$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto, por el Teorema de la Función Implícita, tenemos que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculando las derivadas parciales, tenemos que
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(g(x+yz) - x) = g'(x+yz) - 1$$
y
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(g(x+yz) - x) = g'(x+yz)y$$
para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Así,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} = -\frac{g'(x+yf(x,y)) - 1}{g'(x+yf(x,y))y}$$
ara todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Evaluando en el punto $(0,1)$, tenemos que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -\frac{g'(0+1) - 1}{g'(0+1)1} = -\frac{2-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$\square$

2. Dado el campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2+kxy+y^2, \end{aligned}$$

donde el número real k es constante, comprobar en primer lugar que $(0,0)$ es un punto crítico de la función. Luego, determinar los valores de k para que la función f alcance, en el punto $(0,0)$:

a) un mínimo,

b) un máxmimo, y

c) un punto de ensilladura.

Solución. Calculemos el gradiente de f, tenemos

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+ky \\ kx+2y \end{pmatrix}^T$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Evaluando en el punto $(0,0)$ tenemos que

$$\nabla f(0,0) = (0,0),$$

por lo tanto, $(0,0)$ es un punto crítico de la función. Ahora, calculemos la matriz hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix} = 4-k^2$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Con esto, tenemos que el determinante de sus menores, en el punto $(0,0)$ son

$$\det(H_1) = 2 \qquad \text{y} \qquad \det(H_2) = 4-k^2.$$

a) Para que f alcance un mínimo, ambos determinantes deben ser positivos, es decir, es necesario que

$$\det(H_1) = 2 > 0 \qquad \text{y} \qquad \det(H_2) = 4-k^2 > 0,$$

de donde, se tiene que la función alcanza un mínimo si $-2 < k < 2$.

b) Para que f alcance un máximo, el primer determinante deben ser positivo y el segundo negativo, es decir, es necesario que

$$\det(H_1) = 2 < 0 \qquad \text{y} \qquad \det(H_2) = 4-k^2 > 0,$$

de donde, se tiene que la función no alcanza un máximo para ningún valor de k.

c) Para que f tenga un punto de ensilladura, ambos determinantes deben ser negativos o el primero positivo y el segundo positivo, es decir, es necesario que

$$\det(H_1) = 2 < 0 \qquad \text{y} \qquad \det(H_2) = 4-k^2 < 0,$$

o

$$\det(H_1) = 2 > 0 \qquad \text{y} \qquad \det(H_2) = 4-k^2 < 0,$$

de donde, se tiene que la función tiene un punto de ensilladura si $k < -2$ o $k > 2$.

$\square$

3. La intersección entre el plano de ecuación $x+y+z=0$ y el cilindro de ecuación $x^2+y^2=2$ es una elipse. El objetivo de este ejercicio es encontrar los puntos sobre la elipse (sin la necesidad de determinar la ecuación de la elipse) que se encuentran más cerca y más lejos del origen. Para esto, aplique el siguiente procedimiento:

a) Plantee el problema como uno de optimización con restricciones, donde la función que hay que optimizar es el cuadrado de la distancia entre un punto cualquiera y el origen.

b) Compruebe que $(1,1,-2)$ es un punto crítico de la función que hay que optimizar y calcule sus correspondientes multiplicadores de Lagrange.

c) Determine la naturaleza de este punto utilizando el criterio para la matriz hessiana, con esto, determine si este punto es el punto de la elipse más cercano o más lejano del origen.

Solución.

a) Definimos la función

$$D: \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y.z) \longmapsto D(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

el problema es

$$\begin{cases} \text{Optimizar } D(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{sujeto a:} \\ \quad x + y + z = 0, \\ \quad x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Para resolver este problema, planteamos

$$L(\lambda, \mu, x, y, z) = D(x,y,z) - \lambda(x + y + z) - \mu(x^2 + y^2 - 2),$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Para comprobar que es un punto crítico, determinemos el gradiente de L:

$$\nabla L(\lambda, \mu, x, y, z) = \begin{pmatrix} -x - y - z \\ -x^2 - y^2 + 2 \\ 2x - \lambda - 2\mu x \\ 2y - \lambda - 2\mu y \\ 2z - \lambda \end{pmatrix}^T .$$

Los puntos críticos deben cumplir

$$\begin{pmatrix} -x - y - z \\ -x^2 - y^2 + 2 \\ 2x - \lambda - 2\mu x \\ 2y - \lambda - 2\mu y \\ 2z - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En el sistema, utilizamos el punto $(1, 1, -2)$ para encontrar los multiplicadores, tenemos que

$$\begin{pmatrix} -1 - 1 - (-2) \\ -1^2 - 1^2 + 2 \\ 2(1) - \lambda - 2\mu(1) \\ 2(1) - \lambda - 2\mu(1) \\ 2(-2) - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir,

$$2 - \lambda - 2\mu = 0 \qquad \text{y} \qquad -4 - \lambda = 0,$$

así, $\lambda = -4$ y $\mu = 3$.

c) Calculamos la matriz hessiana de L

$$H_L(\lambda, \mu, x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2x & -2y & 0 \\ -1 & -2x & 2 - 2\mu & 0 & 0 \\ -1 & -2y & 0 & 2 - 2\mu & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el punto $(-4, 3, 1, 1, -2)$, tenemos

$$H_L(-4, 3, 1, 1, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

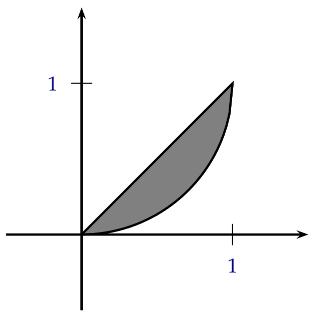
Dado que tenemos $m = 2$ restricciones, debemos considerar los menores a partir de $2m + 1 = 5$ y multiplicar estos por $(-1)^m = 1$, así

$$(-1)^m \det(H_5) = -32,$$

dado que la secuencia anterior empieza por un número negativo y luego se alterna, entonces se tiene un la función alcanza un máximo en $(1, 1, -2)$, es decir, este punto es el más alejado del origen

$\square$

4. Dada la región D en el plano



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \quad y \leq x\},$$

en primer lugar, exprese la integral (no la calcule)

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

como una de tipo I y como otra de tipo II.

Ahora, calcule la integral I sabiendo que un cambio a coordenadas polares transforma la región D en la región

$$D^* = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad 0 \leq r \leq 2 \operatorname{sen} \theta\}.$$

Solución.

a) Como región de tipo I: Tenemos que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2}+1 \leq y \leq x\},$$

por lo tanto, la integral es

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}+1}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) dx.$$

b) Como región de tipo II: Tenemos que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2}\},$$

por lo tanto, la integral es

$$\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx \right) dy.$$

Por otra parte, tomando un cambio de variable a coordenadas polares, tenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy &= \iint_{D^*} \frac{1}{\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r \operatorname{sen}(\theta))^2}} r\, drd\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} 1\, dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} 2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\
&= 2 - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

□

Escuela Politécnica Nacional
Hoja de enunciados
Cálculo Vectorial • Examen del Segundo Bimestre

Miércoles 8 de agosto de 2018. **Duración**: 120 minutos *Departamento de Formación Básica*

1. No se penalizará la omisión de la cuantificación de variables en ninguna pregunta.
2. La omisión de la notación para indicar la evaluación de una función en un punto (técnicamente, la imagen de un elemento del dominio respecto de la función) se penalizará hasta con 0,3 en el componente de conceptos y cálculos (AC).
3. La omisión o errores en la notación (como los paréntesis para vectores, matrices, las comas entre las componentes de los vectores, etcétera) se penalizará hasta con 0,2 en el componente de conceptos y cálculos (AC).
4. Si una pregunta se responde utilizando un procedimiento diferente del que se señala en el enunciado, el puntaje máximo que se puede obtener en el componente de aplicación de conceptos y cálculos (AC) es el 50 %; no los otros componentes no serán penalizados.
5. El puntaje de cada pregunta es 2.5 puntos, 0,3 de punto por la redacción de todo el ejercicio (R), 0,2 de punto por la escritura de todas las respuestas correctamente (S) y 2,0 puntos por el uso correcto de las definiciones y propiedades que contribuyen a la resolución de problema y por la corrección de los cálculos que contribuyen a la resolución del problema (AC). Este último puntaje se distribuye en cada una de las preguntas de la siguiente manera:
   a) **Pregunta 1)**: 0,5 cada uno de los literales a) y b); 1 punto el literal c).
   b) **Pregunta 2)**: 0,5 cada uno de los literales a) y b); 1 punto el literal c).
   c) **Pregunta 3)**: 0,3 el literal a), 0,2 el literal b) y 1,5 el literal c).
   d) **Pregunta 4)**: literales a) y d), 0,3; literales b) y e), 0,2; y literal c), 1 punto.
6. El puntaje de redacción (R) se lo califica de manera transversal sobre los literales.
7. El puntaje de respuestas (S) será de la siguiente manera: ninguna de las respuestas correcta, 0,0; mayor al 0 % y menor o igual al 50 % de respuestas correctas, 0,1; y mayor del 50 % de respuestas correctas, 0,2.

1. Se desea encontrar los extremos de la función

$$\begin{aligned} f\colon \quad S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$

donde

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+(y-2)^2=z^2-3\}.$$

Para esto, aplique el siguiente procedimiento:

a) Plantee el problema como uno de optimización con restricciones.
b) Si se sabe que $(0,1,2)$ es un punto crítico de la función que hay que optimizar, calcule su correspondiente multiplicador de Lagrange.
c) Determine la naturaleza del punto crítico utilizando el criterio para la matriz hessiana de optimización con restricciones.

Solución.

a) El problema es

$$\begin{cases} \text{Optimizar } f(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2} \\ \text{sujeto a:} \\ \quad x^2+(y-2)^2=z^2-3. \end{cases}$$

Para resolver este problema, planteamos

$$L(\lambda,x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda(x^2+(y-2)^2-z^2+3),$$

para $(\lambda,x,y,z)\in\mathbb{R}^4$.

b) Para encontrar el multiplicador de Lagrange, determinemos el gradiente de L:

$$\nabla L(\lambda, x, y, z) = \begin{pmatrix} -x^2 - (y-2)^2 + z^2 - 3 \\ x - 2\lambda x \\ y - 2\lambda(y-2) \\ 2\lambda z + z \end{pmatrix}^T.$$

Los puntos críticos deben cumplir

$$\begin{pmatrix} -x^2 - (y-2)^2 + z^2 - 3 \\ x - 2\lambda x \\ y - 2\lambda(y-2) \\ 2\lambda z + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En el sistema, utilizamos el punto $(0,1,2)$ para encontrar los multiplicadores, tenemos que

$$1 - 2\lambda(1-2) = 0 \qquad \text{y} \qquad 4\lambda + 2 = 0,$$

así, $\lambda = -1/2$.

c) Calculamos la matriz hessiana de L

$$H_L(\lambda, \mu, x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -2x & -2(y-2) & 2z \\ -2x & 1-2\lambda & 0 & 0 \\ -2(y-2) & 0 & 1-2\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & 2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

Evaluando en el punto $(-1/2, 0, 1, 2)$, tenemos

$$H_L(-1/2, 0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que tenemos $m = 1$ restricciones, debemos considerar los menores a partir de $2m + 1 = 3$ y multiplicar estos por $(-1)^m = -1$, así

$$(-1)^m \det(H_3) = 8, \qquad \text{y} \qquad (-1)^m \det(H_4) = 64,$$

dado que la secuencia anterior tiene solo números negativos, entonces se tiene un la función alcanza un mínimo en $(0,1,2)$.

□

2. Considere el campo vectorial

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (y-z, z-x, x-y) \end{aligned}$$

y la superficie D resultante al cortar el plano de ecuación $y = -1$ con la cilindro de ecuación $x^2 + z^2 = 4$. La frontera ∂D de esta superficie es una circunferencia. Una parametrización para D es

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,2] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) &\longmapsto (r\cos(\theta), -1, r\,\mathrm{sen}(\theta)). \end{aligned}$$

a) Calcule el rotacional de f en un punto cualquiera $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Encuentre el vector normal a la superficie D.

c) Suponiendo que ∂D tiene parametrización consistente con la parametrización dada para D, utilizar el Teorema de Stokes para calcular

$$\oint_{\partial D} F \cdot ds.$$

Solución.

a) Tenemos que

$$\mathrm{rot}(f)(x,y,z) = (-2,-2,-2)$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Se tiene que el vector normal es

$$\begin{aligned} N(r,\theta) &= \frac{\partial \alpha}{\partial r}(r,\theta) \times \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}(r,\theta) \\ &= (\cos(\theta), 0, \operatorname{sen}(\theta)) \times (-r\operatorname{sen}(\theta), 0, r\cos(\theta)) \\ &= (0, -r, 0), \end{aligned}$$

para $(r,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi]$.

c) Por el teorema de Stokes tenemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} f \cdot dS &= \iint_S \operatorname{rot}(f) \cdot dS \\ &= \iint \operatorname{rot}(f)(\alpha(r,\theta)) \cdot N(r,\theta)\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-2,-2,-2) \cdot (0,-r,0)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r\, dr\, d\theta \\ &= 8\pi. \end{aligned}$$

$\square$

3. Considere el campo vectorial diferenciable

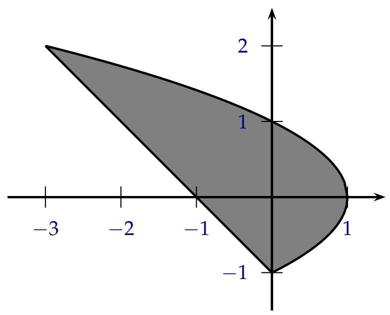
$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x-y, x+y). \end{aligned}$$

a) Calcule la divergencia de f en un punto cualquiera $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Determine si el punto $(0,0)$ es una fuente o un sumidero.

c) Tome el conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x + y \geq -1\}.$$



Se sabe que el flujo de f a través de ∂D está dado por

$$\oint_{\partial D} f \cdot n\, ds,$$

donde n es el vector normal exterior a la curva. Utilice el teorema de Gauss en el plano para determinar esta integral.

Solución.

a) Tenemos que

$$\operatorname{div}(f)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 2$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Evaluando la divergencia en $(0,0)$ se tiene que

$$\operatorname{div}(f)(0,0) = 2,$$

por lo tanto, el punto $(0,0)$ es una fuente.

c) Por el Teorema de Gauss, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} f \cdot n\, ds &= \iint_D \operatorname{div}(f)\, dxdy \\
&= \int_{-1}^{2} \int_{-1-y}^{1-y^2} 2\, dx\, dy \\
&= 2 \int_{-1}^{2} (2 + y - y^2) dy \\
&= 9.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo es 9.

□

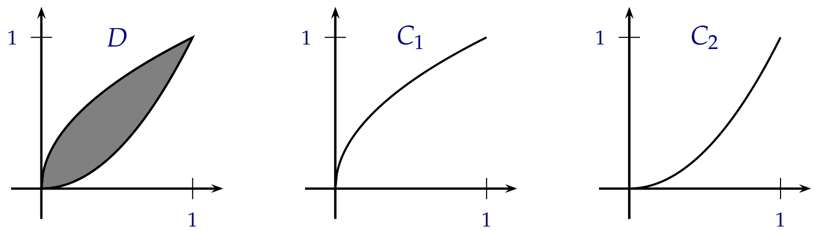
4. Considere el campo vectorial

$$\begin{aligned}
f\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x,y) &\longmapsto (2x + 5y^2, 15y - 15x^2)
\end{aligned}$$

y los siguientes conjuntos

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad x = y^2\} \qquad \text{y} \qquad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad \wedge \quad x^2 = y\}.$$



a) Calcule el rotacional de f en un punto cualquiera $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Es f un campo conservativo?

b) Determine el sentido de la rotación (horario o antihorario) que genera el campo en el punto $(0,1)$.

c) Calcule

$$I_1 = \int_{C_1} f \cdot ds \qquad \text{y} \qquad I_2 = \int_{C_2} f \cdot ds$$

donde ambas curvas recorren del punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$.

d) Utilice el resultado del literal anterior para calcular

$$\oint_{\partial D} f \cdot ds$$

donde ∂D se recorre en sentido antihorario.

e) Utilice el Teorema de Green y el literal anterior para calcular

$$\iint_D \operatorname{rot}(f)\, dxdy.$$

Solución.

a) Tenemos que

$$\operatorname{rot}(f)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(15y - 15x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + 5y^2\right) = -30x - 10y$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dado que las derivadas cruzadas son iguales, se tiene que el campo no es conservativo.

b) Evaluando en $(0,1)$, se tiene que

$$\operatorname{rot}(f)(0,1) = -10$$

como el rotacional en el punto es negativo, se tiene que el campo genera una rotación horaria.

c) Tenemos que

- Para C_1 tomemos la parametrización
$$\alpha(t) = (t^2, t),$$
con $t \in [0,1]$. Con esto
$$I_1 = \int_{C_2} f \cdot ds = \int_0^1 f(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\, dt = \int_0^1 (2t^2 + 5t^2, 15t^2 - 15t^4) \cdot (2t, 1)\, dt = \int_0^1 (14t^3 + 15t - 15t^4)\, dt = 8$$
- Para C_2 tomemos la parametrización
$$\beta(t) = (t, t^2),$$
con $t \in [0,1]$. Con esto
$$I_2 = \int_{C_1} f \cdot ds = \int_0^1 f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_0^1 (2t + 5t^4, 15t^2 - 15t^2) \cdot (1, 2t)\, dt = \int_0^1 (2t + 5t^4)\, dt = 2$$

d) Con el literal anterior, se tiene que
$$\oint_{\partial D} f \cdot ds = I_2 - I_1 = 2 - 8 = -6$$

e) Con el Teorema de Green y el literal anterior, se tiene que
$$\iint_D \mathrm{rot}(f)\, dxdy = \oint_{\partial D} f \cdot ds = -6.$$

□

Escuela Politécnica Nacional
Hoja de enunciados
Cálculo Vectorial • Examen Supletorio

Miércoles, 22 de agosto de 2018. **Duración**: 120 minutos *Departamento de Formación Básica*

1. Considere a los campos vectoriales f y g dados por

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\longmapsto f(x,y)=(x^2+y^2,x^2)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (u,v) &\longmapsto g(u,v)=(\cos(u)\cos(v),\cos(u)\operatorname{sen}(v)),\end{aligned}$$

ambos diferenciables.

a) Determine la matriz jacobiana de f y de g.
b) Si h es un campo vectorial tal que $h=f\circ g$, determine $h(u,v)$ para todo $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.
c) Determinar $h'(u,v)$ para cada $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

Solución.

a) Dado que por hipótesis f y g son diferenciables, tenemos que la matriz jacobiana de f está dada por

$$J_f(x,y)=\begin{bmatrix}2x & 2y\\ 2x & 0\end{bmatrix}$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
De igual forma, se tiene que la matriz jacobiana de g está dada por

$$J_g(u,v)=\begin{bmatrix}-\operatorname{sen}(u)\cos(v) & -\cos(u)\operatorname{sen}(v)\\ -\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v) & \cos(u)\cos(v)\end{bmatrix}$$

para todo $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

b) Notemos que para cada $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{aligned} h(u,v)&=(f\circ g)(u,v)\\ &=f(g(u,v))\\ &=f(\cos(u)\cos(v),\cos(u)\operatorname{sen}(v))\\ &=(\cos^2(u),\cos^2(u)\operatorname{sen}^2(v)).\end{aligned}$$

c) Para calcular $h'(u,v)$, notemos que g es diferenciable en todo $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ y f es diferenciable en todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, siendo diferenciable en particular en $g(u,v)$ para cualquier $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.
Es decir, los campos f y g satisfacen las hipótesis del teorema de la regla de la cadena para campos vectoriales, por lo tanto

$$h'(u,v)=f'(g(u,v))\circ g'(u,v)$$

para todo $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Que en su forma matricial establece que

$$\begin{aligned} J_h(u,v)&=J_{f\circ g}(u,v)\\ &=J_f(g(u,v))J_g(u,v)\\ &=\begin{bmatrix}2\cos(u)\cos(v) & 2\cos(u)\operatorname{sen}(v)\\ 2\cos(u)\cos(v) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\operatorname{sen}(u)\cos(v) & -\cos(u)\operatorname{sen}(v)\\ -\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v) & \cos(u)\cos(v)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-\operatorname{sen}(2u) & 0\\ -\operatorname{sen}(2u)\cos^2(v) & -\cos^2(u)\operatorname{sen}(2v)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

para todo $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.
Luego, para $(u,v)\in\mathbb{R}^2$

$$[h'(u,v)(h_1,h_2)]=\begin{bmatrix}-\operatorname{sen}(2u) & 0\\ -\operatorname{sen}(2u)\cos^2(v) & -\cos^2(u)\operatorname{sen}(2v)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}$$

para todo $(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$.

□

2. Considere el campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x \cdot x)^2 + (x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

y la trayectoria

$$\begin{aligned} r\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -t). \end{aligned}$$

a) Determine $\nabla f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Muestre que f es diferenciable en todo $x \in \mathbb{R}^3$.

c) Calcule $\nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

d) Determine $(f \circ r)'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución.

a) Notemos que para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \|(x_1, x_2, x_3)\|^4 + x_1^2 \\ &= \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^4 + x_1^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (4x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1, 4x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), 4x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2))$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

b) Notemos que se tienen

$$\begin{aligned} D_1 f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1^2, \\ D_2 f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2, \\ D_3 f(x_1, x_2, x_3) &= 4x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{aligned}$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Tanto $D_1 f$, $D_2 f$ como $D_3 f$ son continuas en todo punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, por lo tanto f es diferencible en todo punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

c) Notemos que la $\operatorname{img}(r) \subset \mathbb{R}^3$, y que la derivada de r está dada por

$$r'(t) = (1, -\operatorname{sen} t, \cos t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces, para todo $t \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) &= \nabla f(t, \cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (1, -\operatorname{sen} t, \cos t) \\ &= (4t(t^2+1) + 2t, 4\cos t(t^2+1), 4\operatorname{sen} t(t^2+1)) \cdot (1, -\operatorname{sen} t, \cos t) \\ &= 4t^3 + 6t. \end{aligned}$$

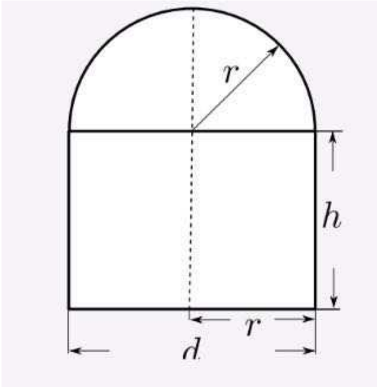
d) Por los literales anteriores se tiene r es una trayectoria derivable en todo punto $t \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{img}(r) \subset \mathbb{R}^3$ y que f es diferenciable en todo punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, siendo derivable en particular en $r(t) \in \mathbb{R}^3$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces,

$$(f \circ r)'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = 4t^3 + 6t$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

□

3. Se necesita diseñar un silo para guardar 900π pies cúbicos de grano. El silo debe tener forma cilíndrica con techo hemisférico:



Suponga que costo del techo por pie cuadrado de lámina utilizada es cinco veces el costo del piso circular, y hacer las paredes cuesta el doble que hacer el piso circular Suponga que todo el silo puede llenarse con grano. Si se requiere minimizar el costo total, ¿qué dimensiones se recomendaría?, aplique el siguiente procedimiento

a) Plantee el problema como uno de optimización con restricciones.

b) Determine los puntos críticos de la función costo total.

c) Determine la naturaleza de los puntos críticos utilizando el criterio para la matriz hessiana de optimización con restricciones.

Solución. *a*) El problema es minimizar

$$C(r,h) = \pi r^2 + 2(2\pi rh) + 5(2\pi r^2) = 11\pi r^2 + 4\pi rh$$

Sujeto a:

$$\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = 900\pi$$

Para resolver el problema, planteamos

$$L(\lambda, r, h) = 11\pi r^2 + 4\pi rh - \lambda\left(\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 900\pi\right)$$

para $(\lambda, r, h) \in \mathbb{R}^3$

b) Para encontrar los puntos críticos, determinamos el gradiente de L

$$\nabla L(\lambda, r, h) = \begin{pmatrix} -\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi r^3 + 900\pi \\ 22\pi r + 4\pi h - 2\pi rh\lambda - 2\pi r^2\lambda \\ 4\pi r - \pi r^2\lambda \end{pmatrix}^T$$

Los puntos críticos deben cumplir

$$\begin{pmatrix} -r^2 h - \frac{2}{3}r^3 + 900 \\ 11r + 2h - 2rh\lambda - r^2\lambda \\ 4r - r^2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, tenemos que

$$r = 6$$
$$h = 21$$
$$\lambda = \tfrac{2}{3}$$

c) Para la matriz hessiana de L

$$H_L(\lambda, r, h) = \begin{pmatrix} 0 & -rh - r^2 & -r^2 \\ -2rh - 2r^2 & 11 - h\lambda - 2r\lambda & 4 \\ -r^2 & 2 - r\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluando en el punto $(6, 21)$, para $\lambda = 2/3$

$$H_L(\lambda, 6, 21) = \begin{pmatrix} 0 & 162 & -36 \\ -324 & -11 & 4 \\ -36 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificando el signo de los determinantes de los menores principales de H_L

$$d_1 < 0$$

$$d_2 < 0$$

Se concluye que la función costo tiene un valor mínimo si el radio $r = 6$ y la altura $h = 21$.

□

4. Sea el campo vectorial

$$\begin{aligned} F\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (2x + 2y^2, 4xy) \end{aligned}$$

a) Demuestre que F es un campo con integral independiente de la trayectoria.

b) ¿Tiene F una función potencial? De tenerla, encuentre su función potencial.

c) Si se considera a F como un campo de fuerzas, calcule el trabajo realizado por F al mover una partícula a lo largo de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ partiendo del punto $(2,0)$ hasta el punto $(0,2)$.

Solución.

a) Para que F sea un campo con integral independiente de la trayectoria debe ser conservativo, por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\operatorname{rot}(F(x,y)) = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(F)(x,y) &= \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ &= (4y) - (4y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto F es conservativo y podemos obtener su función potencial:

$$\int F_1 dx = \int (2x + 2y^2) dx = x^2 + 2xy^2 + c_1$$
$$\int F_2 dy = \int (4xy) dy = 2xy^2 + c_2$$

Su función potencial es:

$$f(x.y) = 2xy^2 + x^2 + c$$

b) El campo es conservativo y la trayectoria es una curva cerrada, entonces su trabajo será nulo.

c) Al ser un campo conservativo, el trabajo es independiente de la trayectoria de la partícula, en este caso tomaremos la recta que une los puntos (2,2) y (-2,-2) que es la recta $y = x$. La trayectoria está definida entonces por:

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,t) \end{aligned}$$

su derivada será:

$$\alpha'(t) = (1,1)$$

Por lo tanto el trabajo estará dado por:

$$\begin{aligned} W &= \int_c F \cdot d\alpha \\ &= \int F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_{-2}^{2} (2t + 2t^2, 4t^2) \cdot (1,1) dt \\ &= \int_{-2}^{2} (2t + 2t^2 + 4t^2) dt \\ &= 32 \end{aligned}$$

□

5. Se tiene una región $T \in \mathbb{R}^3$ acotada por las superficies de ecuación $y = \sqrt{4-x^2}$, $z = 0$ y $z = y$. Sea el campo vectorial

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (2xy, z, -zy) \end{aligned}.$$

a) Calcular la masa del sólido, asumiendo que tiene densidad constante $c = 3$.

b) Escribir la expresión para calcular el centro de gravedad en y del sólido en función de su volumen.

c) Escribir las integrales para calcular el flujo del campo f a través de cada una de las superficies de la frontera de T. (No calcular las integrales)

d) Verificar mediante el teorema de Gauss que el flujo de f a través de la frontera δT es igual a $\overline{y}V$, donde V es el volumen del sólido y $\overline{y}$ es el centro de gravedad en y.

Solución. *a*) Se tiene la región

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant y, 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}\}.$$

Se sabe que la masa de un sólido viene dada por la expresión

$$m = \iiint_T c dV,$$

donde $c = 3$ es la densidad del cuerpo.

Entonces

$$\begin{aligned} m &= \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{y} c dz dy dx \\ &= \frac{16}{3} c \\ &= 16. \end{aligned}$$

b) El centro de gravedad viene dado por la expresión

$$m\overline{y} = \iiint_T cy dV$$

debido a que c es una constante se puede dividir ambos lados de la igualdad para c. Además se tiene que

$$c = \frac{m}{V}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} V\overline{y} &= \iiint_T y dV \\ &= \frac{\iiint_T y dV}{V} \end{aligned}$$

c) Se parametriza las fronteras y se calcula el flujo de f a través de cada una de ellas

La superficie de ecuación $z = 0$ puede ser parametrizada como

$$\begin{aligned} \alpha\colon I \in \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto (-u, v, 0) \end{aligned}$$

donde

$$I = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leqslant u \leqslant 2, 0 \leqslant v \leqslant \sqrt{4-u^2}\}.$$

Entonces el flujo de f a través de esta superficie es

$$f_1 = \iint_I f(\alpha(u,v) \cdot N(u,v) dv du$$

donde

$$f(\alpha(u,v) = (-2uv, 0, 0)$$

y

$$\begin{aligned} N(u,v) &= (-1,0,0) \times (0,1,0) \\ &= (0,0,-1) \end{aligned}$$

Finalmente

$$f_1 = \iint_I 0 dvdu.$$

De manera similar se parametriza la superficie de ecuación $z = y$.

$$\begin{aligned} \beta\colon J \in \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v)) &\longmapsto (u,v,v) \end{aligned}$$

donde

$$J = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leqslant u \leqslant 2, 0 \leqslant v \leqslant \sqrt{4-u^2}\}.$$

Entonces el flujo de f a través de esta superficie es

$$f_2 = \iint_I f(\beta(u,v) \cdot N(u,v) dvdu$$

donde

$$f(\alpha(u,v) = (2uv, v, -v^2)$$

y

$$\begin{aligned} N(u,v) &= (1,0,0) \times (0,1,1) \\ &= (0,-1,1) \end{aligned}$$

Finalmente

$$f_2 = \iint_J (-v - v^2) dvdu.$$

Por último se parametriza la superficie de ecuación $y = \sqrt{4-x^2}$

$$\begin{aligned} \gamma\colon H \in \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\longmapsto (2\cos u, 2\operatorname{sen} u, v) \end{aligned}$$

donde

$$H = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant u \leqslant \pi, 0 \leqslant v \leqslant 2\operatorname{sen} u\}.$$

Entonces el flujo de f a través de esta superficie es

$$f_3 = \iint_I f(\gamma(u,v) \cdot N(u,v) dvdu$$

donde

$$f(\gamma(u,v) = (8\cos u \operatorname{sen} u, v, -2v \operatorname{sen} u)$$

y

$$\begin{aligned} N(u,v) &= (-2\operatorname{sen} u, 2\cos u, 0) \times (0,0,1) \\ &= (2\cos u, 2\operatorname{sen} u, 0) \end{aligned}$$

Finalmente

$$f_3 = \iint_H (16\cos^2 u \operatorname{sen} u + 2v \operatorname{sen} u) dvdu.$$

d) Por el teorema de Gauss se tiene que

$$\iint_{\delta T} f \cdot dS = \iiint_T div(f) dV$$

donde

$$\operatorname{div}(f) = y$$

entonces

$$\iint_{\delta T} f \cdot dS = \iiint_T y dV$$

donde al comparar con la solución del literal (b), se tiene que

$$\iint_{\delta T} f \cdot dS = V\overline{y}.$$

□