PARÁMETROS DE CALIFICACIÓN

1. Todos los ejercicios tienen igual valor. La prueba será calificada sobre 10 puntos.
2. El procedimiento vale el 70 % de la nota y la respuesta el 30 %.
3. La omisión, errores en la notación o el no cuantificar las variables utilizadas serán penalizadas.
4. Errores graves de Matemática básica: Factoreo, álgebra o conceptos básicos de funciones serán penalizados hasta un 50 % de la calificación.
5. **Puntaje**

   Pregunta 1: 1,0 punto el literal a); 0,5 puntos el literal b) y 1,0 punto el literal c).
   Pregunta 2: 1,0 punto el literal a) y 1,5 puntos el literal b).
   Pregunta 3: 1,2 puntos el literal a); 0,8 puntos el literal b) y 0,5 puntos el literal c).
   Pregunta 4: 0,7 hallar α; 0,9 puntos el literal a) y 0,9 puntos el literal b).

1. Dados dos planos cuyas ecuaciones cartesianas son

$$x + 3y - z = 1$$
$$x + y + 3z = -3$$

y la recta

$$L = \{(1, 8, -7) + t(2, 2, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta formada por la intersección de los dos planos.
b) Verifique que la recta L y la recta del literal anterior no se intersecan.
c) Calcular la distancia entre la recta dada y la recta formada por la intersección de los dos planos.

Solución.

a) Resolviendo el sistema

$$x + 3y - z = 1$$
$$x + y + 3z = -3$$

se encuentran las ecuaciones paramétricas de la recta formada por la intersección de los dos planos

$$x = -5 - 5t$$
$$y = 2 + 2t$$
$$z = t$$

b) Se quiere demostrar que las rectas

$$L_1 = \{(x, y, z) = (-5, 2, 0) + t(-5, 2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$L_2 = \{(x, y, z) = (1, 8, -7) + w(2, 2, 1) : w \in \mathbb{R}\}$$

no se intersecan; para ello se probará que el siguiente sistema

$$\begin{cases} -5-5t = 1+2w \\ 2+2t = 8+2w \\ t = -7+w \end{cases}$$

no tiene solución. Resolviendo las dos primeras ecuaciones se obtiene $t = 0$ y $w = -3$. Reemplazando en la tercera ecuación se tiene una contradicción. De aquí se concluye que no existen t y w tales que las rectas L_1 y L_2 se crucen.

c) La distancia entre dos rectas viene dada por

$$d = \frac{|n \cdot PQ|}{\|n\|}$$

donde P y Q son puntos cualesquiera de las dos rectas respectivamente y n es un vector normal a ambas rectas.
Nótese que las direcciones de L_1 y L_2 son respectivamente $(-5,2,1)$ y $(2,2,1)$, entonces

$$n = (-5,2,1) \times (2,2,1) = (0,7,-14)$$
$$\|n\| = \sqrt{7^2 + (-14)^2} = 7\sqrt{5}.$$

Por otro lado un punto de L_1 es $P = (-5,2,0)$ y un punto de L_2 es $Q = (1,8,-7)$, entonces

$$PQ = (1,8,-7) - (-5,2,0) = (6,6,-7).$$

Finalmente la distancia entre L_1 y L_2 es

$$d = \frac{|n \cdot PQ|}{\|n\|} = \frac{|(0,7,-14) \cdot (6,6,-7)|}{7\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} \approx 8,94.$$

$\square$

2. La temperatura de un lago está dada por el campo escalar

$$\begin{aligned} T\colon [-4,4] \times [-10,0] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2 - y + 1 \end{aligned}$$

en grados centígrados. Una especie de pez vive a una temperatura entre 4 y 11 grados centígrados.

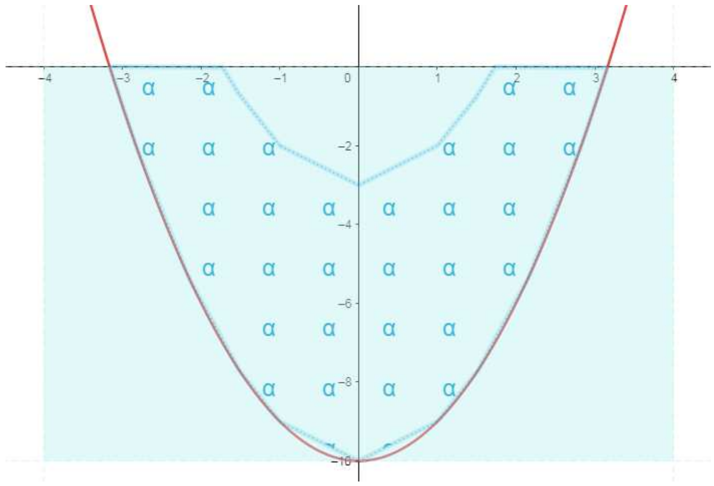
a) Determine $L_4(f)$ y $L_{11}(f)$.

b) Grafique la región en la que estos peces habitan.

Solución. Por definición se tiene que

$$L_4(f) = \{(x,y) \in [-4,4] \times [-10,0] : x^2 - y = 3\} \qquad \text{y} \qquad L_{11}(f) = \{(x,y) \in [-4,4] \times [-10,0] : x^2 - y = 10\}.$$

Por la interpretación de las curvas de nivel se tiene los peces habitan la región entre las dos parábolas del lago.



$\square$

3. Sea

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}.$$

Dada la parametrización de la curva C,

$$\begin{aligned} \alpha : [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (3\cos(t), 2\operatorname{sen}(t)) \end{aligned}$$

a) Calcule la curvatura en cada uno de los cuatro vértices de C. Interprete por qué la curvatura en unos vértices es mayor que en los otros.

b) Determine la recta tangente a C para todo $t \in [0,2\pi]$.

c) Encuentre el punto donde la recta tangente del literal anterior corta al eje x.

Sugerencia: Realice una gráfica adecuada.

Solución.

a) Por cálculo directo se tiene que

$$v(t) = (-3\operatorname{sen}(t), 2\cos(t)), \qquad a(t) = (-3\cos(t), -2\operatorname{sen}(t)) \qquad \text{y} \qquad \rho(t) = \sqrt{5\operatorname{sen}^2(t) + 4}$$

para cada $t \in [0,2\pi]$. Como

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|a_\alpha(t) \times v_\alpha(t)\|}{\rho_\alpha^3(t)}$$

para todo $t \in [0,2\pi]$, en particular,

$$\kappa_\alpha(0) = \frac{\|(-3,0) \times (0,2)\|}{2^3} = 3/4 \qquad \text{y} \qquad \kappa_\alpha(\pi/2) = \frac{\|(0,-2) \times (-3,0)\|}{3^3} = 2/9.$$

Por la simetría de la curva C, es claro que

$$\kappa_\alpha(0) = \kappa_\alpha(\pi) = 3/4 \qquad \text{y} \qquad \kappa_\alpha(\pi/2) = \kappa_\alpha(3\pi/2) = 2/9;$$

además, $\kappa_\alpha(0) > \kappa_\alpha(\pi/2)$ lo que es consistente con la curva C.

b) La tangente a C en $\alpha(t)$ tiene dirección de la velocidad, entonces para cada $t \in [0,2\pi]$,

$$T = \{\alpha(t) + \lambda v(t) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(3\cos(t), 2\operatorname{sen}(t)) + \lambda(-3\operatorname{sen}(t), 2\cos(t)) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de T son

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) - 3\lambda\operatorname{sen}(t) \\ y = 2\operatorname{sen}(t) + 2\lambda\cos(t). \end{cases}$$

c) Nótese que en el punto (x, y) en el que una recta corta al eje x

$$y = 2\,\mathrm{sen}(t) + 2\lambda\cos(t) = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{\mathrm{sen}(t)}{\cos(t)},$$

de donde

$$x = 3\cos(t) + 3\frac{\mathrm{sen}^2(t)}{\cos(t)} = \frac{3}{\cos(t)}$$

para $t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

□

4. Dada una trayectoria $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya derivada es $\alpha'(t) = (1, 2t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, sabiendo que $\alpha(0) = (0, 1)$, encuentre los puntos en los que:

a) $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son perpendiculares.

b) $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son paralelos.

Solución. Primero se determina α, para lo cual integramos $\alpha'(t)$ para $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \int \alpha'(t)dt \\ &= \int (1, 2t)dt \\ &= \left(\int 1dt, \int 2tdt\right) \\ &= \left(t + C_1, t^2 + C_2\right), \end{aligned}$$

de la condición inicial $\alpha(0) = (0, 1)$ se encuentra que $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$, entonces $\alpha(t) = (t, t^2 + 1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

a) $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son perpendiculares en un $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha(t) \cdot \alpha'(t) &= 0, \\ (t, t^2 + 1) \cdot (1, 2t) &= 0, \\ t + 2t + 2t^3 &= 0, \end{aligned}$$

de aquí α y α' son ortogonales en $t = 0$.

b) $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son paralelos en un $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha(t) \times \alpha'(t) &= 0, \\ (t, t^2 + 1) \times (1, 2t) &= 0, \\ (t^2 - 1) &= 0, \end{aligned}$$

de aquí α y α' son paralelos en $t = 1$ y $t = -1$.

□

1. Dado el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x+y^2-4}{x^2+y-2} \tag{1}$$

y la trayectoria

$$\begin{aligned}\beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ t &\longmapsto (t-1, 3-t^2).\end{aligned}$$

a) Calcular los límites iterados de (1).

b) Calcular el límite (1) por la trayectoria β.

c) ¿Qué puede decir sobre la existencia del límite (1)? Justifique su respuesta.

Solución.

a) Para $x \neq 0$,

$$\lim_{y\to 2} \frac{x+y^2-4}{x^2+y-2} = \frac{1}{x}$$

de aquí, dado que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

no existe; se tiene que el límite iterado

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 2} \frac{x+y^2-4}{x^2+y-2}$$

no existe.

De forma similar, para $y \neq 2$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+y^2-4}{x^2+y-2} = \frac{y^2-4}{y-2} = y+2,$$

además, como

$$\lim_{y\to 2} y+2 = 4;$$

el límite iterado

$$\lim_{y\to 2}\lim_{x\to 0} \frac{x+y^2-4}{x^2+y-2} = 4$$

b) Nótese que $\beta(t) = (0,2)$ para $t = 1$. Entonces el límite (1) a lo largo de la trayectoria β es

$$\lim_{t\to 1} \frac{(t-1)+(3-t^2)^2-4}{(t-1)^2+(3-t^2)-2} = \frac{7}{2}.$$

c) Si el límite existiera, por el límite iterado

$$\lim_{y\to 2}\lim_{x\to 0} \frac{x+y^2-4}{x^2+y-2}$$

el límite (1) sería 4. Mientras que por el límite del literal anterior sería $\frac{7}{2}$. Esto es una contradicción, ya que si el límite existiera debería ser único. Finalmente concluimos que el límite no existe.
Observación: Del primer literal no se puede concluir nada sobre el límite (1). $\square$

2. Suponga que la altura de una montaña está dada por

$$\begin{aligned} h\colon [-2,2]\times[-2,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 7+3y+xe^{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

a) Determine si la función h es diferenciable.

b) Si una persona está ubicada en el punto $(0,1,10)$, determine la dirección que debe seguir para bajar de la montaña, lo antes posible.

c) Determine $h'(0,1)$.

d) Determine la ecuación del plano tangente a la montaña en el punto $(0,1,10)$.

Solución. Para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\nabla h(x,y) = (e^{x^2+y^2}+2x^2e^{x^2+y^2}, 3+2xye^{x^2+y^2}).$$

a) Como cada componente de ∇h es continua, h es diferenciable con continuidad en todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, en particular, h es diferenciable.

b) Para que la persona baje lo antes posible, debe ir en la dirección en la cual su altura disminuya con mayor rapidez; es decir, la persona debe ir en dirección

$$-\frac{\nabla h(0,1)}{\|\nabla h(0,1)\|} = -\frac{(e,3)}{\sqrt{e^2+9}} = \left(-\frac{e}{\sqrt{e^2+9}}, -\frac{3}{\sqrt{e^2+9}}\right).$$

c) Por definición

$$\begin{aligned} h'(0,1)\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \nabla h(0,1)\cdot y = ey_1+3y_2. \end{aligned}$$

d) Se busca el plano tangente a la superficie

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = 7+3y+xe^{x^2+y^2}\}$$

en el punto $(0,1,10)$. Sea

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto 7+3y+xe^{x^2+y^2}-z. \end{aligned}$$

Como $L_0(f)=S$, un vector normal al plano buscado es

$$\nabla f(0,1,10) = (e,3,-1),$$

de donde la ecuación del plano tangente a S en el punto $(0,1,10)$ es

$$ex+3y-z=-7.$$

□

3. Las funciones $f,g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ verifican

$$\begin{aligned} f(x,y)+g(x,y) &= xy \\ f(x,y)\cdot g(x,y) &= x-y \end{aligned}$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Suponiendo que f y g tienen derivadas parciales:

a) Hallar $D_1f(x,y)$ y $D_1g(x,y)$ con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

b) Hallar $D_{1,1}f(x,y)$ con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

c) Dado que $f(-1,0)=1$ y que $g(-1,0)=-1$, calcule $D_1f(-1,0)$, $D_1g(-1,0)$ y $D_{1,1}f(-1,0)$.

Solución. Para $x,y\in\mathbb{R}^2$, al derivar cada ecuación respecto a la primera variable, se tiene

$$\begin{cases} D_1f(x,y)+D_1g(x,y) = y, \\ D_1f(x,y)g(x,y)+f(x,y)D_1g(x,y) = 1. \end{cases}$$

a) De lo anterior,

$$D_1 g(x,y) = \frac{1 - yg(x,y)}{f(x,y) - g(x,y)} \qquad \text{y} \qquad D_1 f(x,y) = y - \frac{1 - yg(x,y)}{f(x,y) - g(x,y)},$$

para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Como $D_{1,1}f = D_1(D_1 f)$, de lo anterior, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} D_{1,1}f(x,y) &= D_1\left(D_1 f(x,y)\right) \\ &= D_1\left(y - \frac{1 - yg(x,y)}{f(x,y) - g(x,y)}\right) \\ &= \frac{yD_1 g(x,y)(f(x,y) - g(x,y)) - (D_1 f(x,y) - D_1 g(x,y))(yg(x,y) - 1)}{(f(x,y) - g(x,y))^2}. \end{aligned}$$

c) Por los literales anteriores,

$$D_1 f(-1,0) = -\frac{1}{2}, \quad D_1 g(-1,0) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad D_{1,1}f(-1,0) = -\frac{1}{4}. \qquad \square$$

4. Dado el campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^3 - y^3 + ax^2 + by^2 + xy \end{aligned}$$

donde a y b son dos constantes reales.

a) Verificar que $(0,0)$ es un punto crítico de f.

b) Determine las condiciones sobre a y b tal que f alcance un mínimo relativo en $(0,0)$.

c) Determine las condiciones sobre a y b tal que f alcance un máximo relativo en $(0,0)$.

d) Determine las condiciones sobre a y b tal que f alcance un punto de silla en $(0,0)$.

Solución. Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 2ax + y, -3y^2 + 2by + x).$$

a) Como $\nabla f(0,0) = (0,0)$, se sigue que $(0,0)$ es un punto crítico de f.
La matriz hessina de f, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, es

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2a & 1 \\ 1 & -6y + 2b \end{pmatrix}.$$

Para determinar la naturaleza del punto crítico $(0,0)$ se analiza los menores principales de

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2b \end{pmatrix}$$

que son

$$\begin{aligned} H_f(0,0)_1 &= 2a \\ H_f(0,0)_2 &= 4ab - 1 \end{aligned}$$

b) Para alcanzar un mínimo relativo en $(0,0)$, las condiciones son

$$a > 0 \qquad \text{y} \qquad ab > \frac{1}{4}$$

c) Para alcanzar un máximo relativo en $(0,0)$, las condiciones son

$$a < 0 \qquad \text{y} \qquad ab > \frac{1}{4}$$

d) Para alcanzar un punto de silla en $(0,0)$, la condición es

$$a \neq 0 \qquad \text{y} \qquad ab < \frac{1}{4}. \qquad \square$$

1. Determine los extremos absolutos del campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon \quad D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto -x^2y + 2x^2 + y^2 \end{aligned}$$

donde D es la región triangular de vértices $(0,0)$, $(-3,3)$ y $(-3,0)$.

Solución. El campo f es continuo en el dominio compacto D, entonces f alcanza su máximo y mínimo absolutos en su dominio. Se determinan los puntos críticos en tres instancias

- En el interior de D. Para esto se buscan los puntos tales que $\nabla f(x,y) = 0$ y pertenecen a D. De aquí se obtiene el sistema

$$\begin{cases} -2xy + 4x = 0 \\ -x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

de la segunda ecuación se tiene $2y = x^2$, lo que reemplazamos en la primera y se obtiene $-x^3 + 4x = 0$. Entonces las soluciones del sistema son

$$\{(0,0), (2,2), (-2,2)\}$$

de los cuales se considera, por pertenecer a D:

$$a_1 = (0,0) \qquad \text{y} \qquad a_2 = (-2,2).$$

- En la frontera de D. Para esto se parametriza los tres lados de la frontera
  - El segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(-3,0)$.

$$\begin{aligned} \alpha\colon [-3,0] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,0). \end{aligned}$$

De aquí se tiene

$$\begin{aligned} f\circ\alpha\colon [-3,0] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto 2t^2 \end{aligned}$$

cuyo punto crítico se alcanza en $t = 0$. De aquí el punto crítico es $\alpha(0) = (0,0)$ que ya fue considerado en la primera instancia.

  - El segmento que une los puntos $(-3,3)$ y $(-3,0)$.

$$\begin{aligned} \beta\colon [0,3] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (-3,t). \end{aligned}$$

De aquí se tiene

$$\begin{aligned} f\circ\beta\colon [0,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^2 - 9t + 18 \end{aligned}$$

cuyo punto crítico se alcanza en $t = 4{,}5$, el cual no se considera ya que no pertenece al intervalo $[0,3]$.

  - El segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(-3,3)$.

$$\begin{aligned} \gamma\colon [-3,0] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,-t). \end{aligned}$$

De aquí se tiene

$$\begin{aligned} f\circ\gamma\colon [-3,0] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^3+3t^2 \end{aligned}$$

cuyos puntos críticos son $t=0$ y $t=-2$. Sin embargo estos puntos críticos ya fueron tomados en cuenta en la primera instancia.

- En los extremos de la frontera de D. Los vértices del triángulo que aún no han sido considerados en la primera instancia son

$$a_3=(-3,0) \qquad \text{y} \qquad a_4=(-3,3).$$

Comparando los valores del campo f para los cuatro puntos críticos se concluye que su máximo absoluto ocurre en el punto $(-3,0)$ y el mínimo absoluto en $(0,0)$ y $(-3,3)$. □

2. Una compañía de telecomunicaciones desea establecer la comunicación entre una estación emisora cuya antena se encuentra fija en un punto de coordenadas $(2,3,3)$ y una estación receptora móvil que debe colocarse sobre una superficie cuya ecuación es: $2x+y-3z=26$. Se sabe que mientras más alejada está la antena receptora de la antena emisora, la eficiencia disminuye. Determinar en qué punto de la superficie debe colocarse la antena receptora para asegurar la mayor eficiencia en la transmisión de datos. Indicar claramente cual es la función que se desea optimizar y lo que representa.

Solución. Se desea encontrar el punto del plano más cercano al punto $(2,3,3)$. Entonces se quiere optimizar la distancia, definida por la función

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 \end{aligned}$$

sujeta a

$$2x+y-3z=26.$$

Es importante notar que como la raíz es creciente se la puede omitir en la función f. Es decir, para optimizar la raíz basta con optimizar su radicando.

Para resolver el problema, se define la función

$$\begin{aligned} L\colon \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda,x,y,z) &\longmapsto (x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2-\lambda(2x+y-3z-26). \end{aligned}$$

Los puntos críticos son aquellos en donde $\nabla L(\lambda,x,y,z)=0$, entonces se resuelve el sistema

$$\begin{cases} -(2x+y-3z-26)=0 \\ 2(x-2)-2\lambda=0 \\ 2(y-3)-\lambda=0 \\ 2(z-3)+3\lambda=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-3z=26 \\ x=\lambda+2 \\ y=\dfrac{y+6}{2} \\ z=\dfrac{6-3\lambda}{2} \end{cases}$$

Reemplazando las ecuaciones (2), (3) y (4) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} 2(\lambda+2)+\frac{2(\lambda+6)}{2}-3\left(\frac{6-3\lambda}{2}\right) &= 26 \\ 4\lambda+8+\lambda+6-18+9\lambda &= 52 \\ 14\lambda-4 &= 52 \\ \lambda &= 4. \end{aligned}$$

Reemplazando $\lambda=4$ en las ecuaciones (2), (3) y (4) se encuentra el punto crítico:

$$(\lambda,x,y,z)=(4,6,5,-3).$$

La matriz Hessiana de L es:

$$H_L(\lambda,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para $(\lambda,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$, en especial para $(4,6,5,-3)$.

Para un campo escalar en $\mathbb{R}^3$ con una restricción se tiene que $n = 3$ y $m = 1$, entonces, para determinar la naturaleza del punto crítico se analizan los determinantes $(-1)^m H_{2m+1}$ y $(-1)^m H_{m+n}$, es decir $-H_3$ y $-H_4$. Se obtiene que

$$-H_L(4,6,5,-3)_3 = 10 > 0 \qquad \text{y} \qquad -H_L(4,6,5,-3)_4 = 56 > 0,$$

por la secuencia de los determinantes, ambos mayores que cero, en el punto $(6,5,-3)$ hay un mínimo y es $f(6,5,-3) = 56$. Por lo tanto, debe colocarse la antena en las coordenadas $(6,5,-3)$. $\square$

Alternativa. También se puede optimizar la función:

$$\begin{aligned} g\colon \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,z) &\longmapsto (x-2)^2 + (3z-2x+23)^2 + (z-3)^2, \end{aligned}$$

con la condición de que $y = 3z - 2x + 26$. Para cada $(x,z) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla g(x,z) = (2(x-2) - 4(3z-2x+23), 6(3z-2x+23) + 2(z-3))$$

y

$$H_g(x,z) = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si $\nabla g(x,z) = 0$, entonces

$$\begin{cases} 5x - 6(z+8) = 0 \\ -3x + 5z + 33 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6 \\ z = -3. \end{cases}$$

Por lo tanto, $a = (6,-3)$ es el único punto crítico de g. Para determinar la naturaleza de a, dado que

$$H_g(a) = 2\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix},$$

$H_g(a)_1 = 2 \cdot 5 > 0$ y $H_g(a)_2 = 2^2 \cdot (50 - 36) > 0$ de donde $g(a)$ es mínimo. Finalmente, como

$$(x = 6 \wedge z = -3) \Longrightarrow y = 5.$$

Por lo tanto, se debe colocar la antena en las coordenadas $(6,5,-3)$. $\square$

Forma Geométrica. Se tiene que un vector normal al plano es $n = (2,1,-3)$. Sea $P = (2,3,3)$ y $Q = (13,0,0)$. Por lo tanto, la distancia del punto P al plano es

$$d = \| \operatorname{proy}_n(PQ) \| = \frac{|n \cdot PQ|}{\|n\|} = 2\sqrt{14}.$$

Entonces hay dos posibilidades:

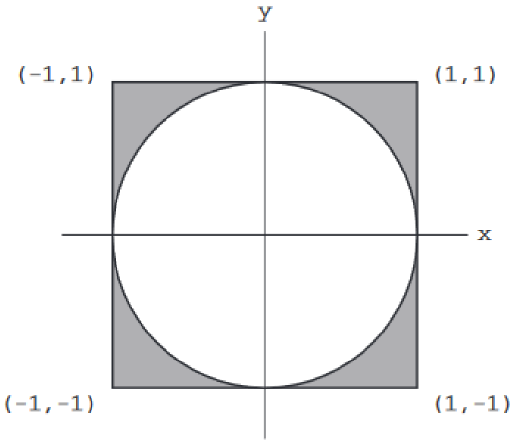
$$a = P + 2\sqrt{14}\frac{n}{\|n\|} = (2,3,3) + (4,2,-6) = (6,5,-3) \qquad \text{y} \qquad b = P - 2\sqrt{14}\frac{n}{\|n\|} = (2,3,3) - (4,2,-6) = (-2,1$$

Como b pertenece al plano, se tiene que la antena debe instalarse en las coordenadas $(6,5,-3)$. $\square$

3. Sea D la región entre el cuadrado con vértices en $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ y el disco unitario con centro en el origen. Evalúe la siguiente integral, utilizando cambio de variable a coordenadas polares donde corresponda.

$$\iint_D y^2\,dx\,dy$$

Solución. La región D corresponde a la siguiente figura,



Entonces para evaluar la integral

$$\iint_D y^2\,dx\,dy = \iint_\square y^2\,dx\,dy - \iint_\bigcirc y^2\,dx\,dy$$

$$\iint_\square y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y^2\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} 2y^2\,dy = \frac{4}{3}$$

Para calcular la integral sobre la región del disco, se utiliza el cambio de variable a coordenadas polares

$$\iint_\bigcirc y^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\operatorname{sen}^2(\theta)\cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta$$

$$\iint_\bigcirc y^2\,dx\,dy = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2\theta))\,d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Entonces

$$\iint_D y^2\,dx\,dy = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}. \qquad \square$$

Alternativas. Por la simetría de la función, se tiene que

$$\iint_D y^2dxdy = 4\int_{x=0}^{1}\int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{1} y^2dydx.$$

O también

$$\iint_D y^2dxdy = 4\left(\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=1}^{1/\cos(\theta)} r^3\operatorname{sen}^2(\theta)drd\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=1}^{1/\operatorname{sen}(\theta)} r^3\operatorname{sen}^2(\theta)drd\theta\right). \qquad \square$$

4. Sean O la semicírculo superior de centro $(0,0)$ y radio 2 y T el triángulo de vértices $(-2,0)$, $(2,0)$ y $(0,-1)$. Sea Ω la lámina formada por C y T cuya densidad está dada por $\delta(x,y) = |x|$.

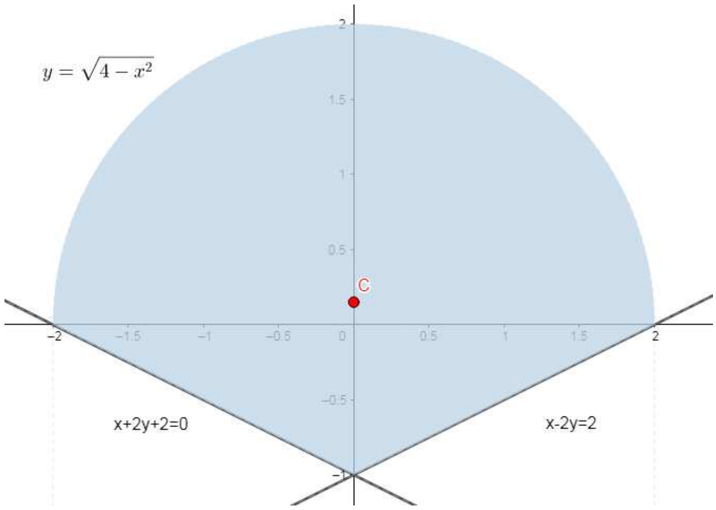
   a) Realice una gráfica donde se visualice Ω y presente las parametrizaciones de $\partial\Omega$.

b) Calcule la masa de Ω.

c) Determine el centro de masa $C = (\overline{x}, \overline{y})$ de Ω.

Solución. Se tiene que Ω está limitada por las ecuaciones

$$y = \sqrt{4 - x^2}, \qquad x + 2y = -2 \qquad \text{y} \qquad 2y = x - 2.$$



Por definición, se tiene que

$$m = \iint_{\Omega} \delta dA,$$

por simetría

$$m = 2\int_{x=0}^{2} \int_{y=\frac{x-2}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} |x| dydx = \frac{20}{3}.$$

Además, por la simetría de la región y de la densidad,

$$\overline{x} = 0.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{m} \iint_{\Omega} y\delta dA \\
&= \frac{2}{m} \int_{x=0}^{2} \int_{y=\frac{x-2}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} y|x| dydx \\
&= \frac{11}{3m} \\
&= \frac{11}{20}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa es

$$C = \left(0, \frac{11}{20}\right) \approx (0; 0{,}55). \qquad \square$$

1. Dado el campo de fuerza

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (y^2z-3e^xy, 2xyz-3e^x, xy^2+2z). \end{aligned}$$

   a) Verifique que F es conservativo y calcule su potencial.

   b) Mediante el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea, calcule el trabajo para mover una partícula a lo largo de la trayectoria parametrizada por

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (1-\operatorname{sen}(t), -\cos(t), -\cos(t)-1). \end{aligned}$$

Solución.

a) Dado que

$$\begin{aligned} D_1F_2(x,y,z) &= D_2F_1(x,y,z) = 2yz-3e^x \\ D_1F_3(x,y,z) &= D_3F_1(x,y,z) = y^2 \\ D_3F_2(x,y,z) &= D_2F_3(x,y,z) = 2xy \end{aligned}$$

o equivalentemente $\operatorname{rot}(F)(x,y,z) = (0,0,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^3$ es simplemente conexo, se verifica que el campo F es conservativo.
Como F es conservativo, existe un campo escalar $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$$

es decir

$$\frac{df}{dx}(x,y,z) = y^2z-3e^xy \tag{1}$$
$$\frac{df}{dy}(x,y,z) = 2xyz-3e^x \qquad \text{y} \tag{2}$$
$$\frac{df}{dz}(x,y,z) = xy^2+2z. \tag{3}$$

Integrando (1) con respecto a x

$$f(x,y,z) = xy^2z-3e^xy+k(y,z)$$

derivando f con respecto a y y de (2)

$$\begin{aligned} 2xyz-3e^x+D_2k(y,z) &= 2xyz-3e^x \\ k(y,z) &= k(z) \\ f(x,y,z) &= xy^2z-3e^xy+k(z) \end{aligned}$$

derivando f con respecto a z y de (3)

$$\begin{aligned} xy^2+D_3k(z) &= xy^2+2z \\ k(z) &= z^2+c \end{aligned}$$

Finalmente, el potencial de F es

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto xy^2z - 3e^x y + z^2 + c \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

b) El trabajo realizado por el campo de fuerza F para mover una partícula a lo largo de la curva parametrizada por α viene dado por

$$T = \int_c F \cdot d\alpha,$$

como F es conservativo

$$\int_c F \cdot d\alpha = f(b) - f(a)$$

donde

$$a = \alpha(0) = (1,-1,-2) \qquad \text{y} \qquad b = \alpha(\pi) = (1,1,0)$$

entonces

$$\begin{aligned} T &= f(b) - f(a) \\ &= -3e + 2 - 3e - 4 \\ &= -2 - 6e. \end{aligned}$$

□

Alternativa. Como el campo F es conservativo, la integral del línea de F es independiente del camino. Entonces se puede parametrizar cualquier curva que vaya de a a b y el trabajo será la integral de línea de F sobre esta curva.

Por ejemplo

$$\begin{aligned} \beta\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (1, 2t-1, 2t-2) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_c F \cdot d\alpha = \int_c F \cdot d\beta &= \int_0^1 F(\beta(t)) \cdot (0,2,2)dt \\ &= \int_0^1 (24t^2 - 24t + 2 - 6e)dt \\ &= -2 - 6e. \end{aligned}$$

□

2. Una fábrica de conos de tránsito desea saber el costo de producir cada uno de ellos. Cada cono mide 1 de alto y 2 de diámetro; y su vértice está en el punto $(0,0,1)$. Para que el cono (de plástico) se mantenga adherido al suelo, en su base (hueca) se coloca, en su borde, un caucho especial. La densidad superficial del plástico y densidad lineal del caucho son

$$\delta_p(x,y,z) = y^2 \qquad \text{y} \qquad \delta_c(x,y,z) = z + 1,$$

respectivamente. Si el costo unitario del plástico y del caucho son \$ 5 y \$10, respectivamente, determine el costo de producir cada cono.

Solución. Se tiene que la ecuación $1 - z^2 = x^2 + y^2$ modela a un cono cualquiera que se produce en la fábrica. Además,

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,1] \times [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), 1-r) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \beta\colon [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \theta &\longmapsto (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0); \end{aligned}$$

parametrizan el cono y el anillo de caucho, respectivamente. Por todo esto,

$$\begin{aligned} m_p &= \iint_{\alpha} \delta_p dS \\ &= \iint_{\mathrm{dom}(\alpha)} (\delta_p \circ \alpha)(r,\theta) \|N_\alpha(r,\theta)\| dr d\theta \\ &= \iint_{\mathrm{dom}(\alpha)} r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)(r\sqrt{2}) dr d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \operatorname{sen}^2(\theta) dr d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{4}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} m_c &= \int_{\beta} \delta_c ds \\ &= \int_0^{2\pi} (\delta_c \circ \beta)(\theta) \|\beta'(\theta)\| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el costo de cada cono es

$$C = 5m_p + 10m_c = \left(\frac{5\sqrt{2}}{4} + 20 \right) \pi \approx 68{,}40. \qquad \square$$

3. Sea el campo vectorial

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (5xz, ayz, 1) \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Se conoce que la divergencia de F es 0.

a) Determine el valor de a.

b) Verifique el Teorema de Gauss en el espacio si se considera el solido limitado por el cilindro de ecuación $x^2 + z^2 = 4$ y los planos $y = 1$ y $y = 5$.

Solución. Por definición, se tiene que

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = 5z + az$$

para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

a) Si la div $F = 0$, entonces $a = -5$.

b) Sea Ω el sólido dado. El Teorema de Gauss afirma que

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot dS.$$

Por el literal anterior, se debe comprobar que

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS = 0.$$

La frontera de Ω está formada por 3 superficies suaves, el cilindro y dos discos:

- El cilindro está parametrizado por

$$\begin{aligned} \alpha_1\colon [1,5]\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (y,\theta) &\longmapsto (2\cos(\theta), y, 2\operatorname{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

y para $(y,\theta)\in[1,5]\times[0,2\pi]$,

$$N_1(y,\theta) = (D_1\alpha_1 \times D_2\alpha_1)(y,\theta) = 2(\cos(\theta), 0, \operatorname{sen}(\theta)),$$

con esto se ve que N_1 es saliente. Por todo esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{\alpha_1} F\cdot S &= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_1)} (F\circ\alpha_1)(y,\theta)\cdot N_1(y,\theta)\,dyd\theta \\ &= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_1)} (20\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta), -10y\operatorname{sen}(\theta), 1)\cdot 2(\cos(\theta),0,\operatorname{sen}(\theta))\,dyd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_1^5 40\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + 2\operatorname{sen}(\theta)\,dyd\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

- El disco izquierdo está parametrizado por

$$\begin{aligned} \alpha_2\colon [0,2]\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos(\theta), 1, r\operatorname{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

y para $(r,\theta)\in[0,2]\times[0,2\pi]$,

$$N_2(r,\theta) = (D_1\alpha_2 \times D_2\alpha_2)(r,\theta) = r(0,-1,0),$$

con esto se ve que N_2 es saliente. Por todo esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{\alpha_2} F\cdot S &= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_2)} (F\circ\alpha_2)(r,\theta)\cdot N_2(r,\theta)\,drd\theta \\ &= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_2)} (5r^2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta), -5r\operatorname{sen}(\theta), 1)\cdot r(0,-1,0)\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 5r^2\operatorname{sen}(\theta)\,drd\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

- El disco derecho está parametrizado por

$$\begin{aligned} \alpha_3\colon [0,2]\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos(\theta), 5, r\operatorname{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

y para $(r,\theta)\in[0,2]\times[0,2\pi]$,

$$N_3(r,\theta) = (D_1\alpha_3 \times D_2\alpha_3)(r,\theta) = r(0,-1,0),$$

con esto se ve que N_3 es entrante. Por todo esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{\alpha_3} F\cdot S &= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_3)} (F\circ\alpha_3)(r,\theta)\cdot N_3(r,\theta)\,drd\theta \\ &= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_3)} (5r^2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta), -25r\operatorname{sen}(\theta), 1)\cdot r(0,-1,0)\,drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 25r^2\operatorname{sen}(\theta)\,drd\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior,

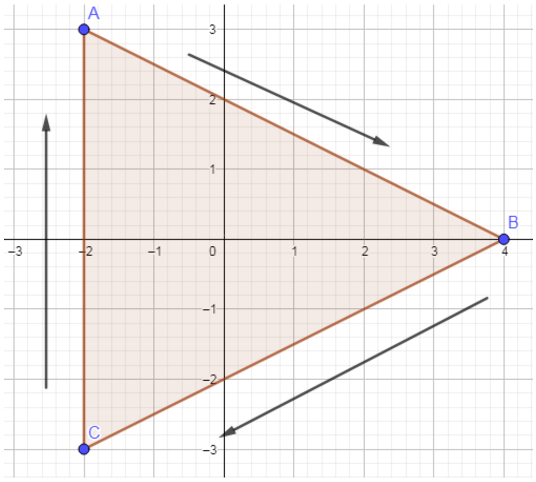
$$\iint_{\partial\Omega} F\cdot S = \iint_{\alpha_1} F\cdot S + \iint_{\alpha_2} F\cdot S - \iint_{\alpha_3} F\cdot S = 0. \qquad \square$$

4. Dado el campo vectorial

$$\begin{aligned} F\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (y^2+3y+1, x^2y), \end{aligned}$$

calcule el trabajo para mover una partícula en **sentido horario** alrededor del triángulo de vértices $(-2,3)$, $(4,0)$ y $(-2,-3)$. **Sugerencia:** Utilice uno de los teoremas clásicos de las integrales.

Solución. La región se puede observar en el siguiente gráfico:



El trabajo viene dado por

$$T=\int_c F\cdot d\alpha$$

donde c representa el camino que recorre la particula.

Como esta es una curva cerrada, simple, plana y suave por tramos recorrida en sentido horario, se puede aplicar el teorema de Green, así

$$T=\int_c F\cdot d\alpha=-\iint_\Omega \operatorname{rot}(F)dA$$

donde Ω es la región plana, cerrada y simplemente conexa cuya frontera es el triángulo, entonces

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2\leq x\leq 4\wedge \frac{x}{2}-2\leq y\leq 2-\frac{x}{2}\right\}.$$

De aquí

$$\begin{aligned} T&=-\iint_\Omega (2xy-2y-3)dA \\ &=-2\int_{-2}^{4}\int_{0,5x-2}^{-0,5x+2} xydydx+2\overline{y}A(\Omega)+3A(\Omega) \\ &=54. \end{aligned}$$

□

Alternativa. Se puede calcular la integral de línea, en sentido horario, a lo largo del triángulo. Para esto se parametriza cada uno de los lados del triángulo

$$\begin{aligned} \alpha_1\colon[-3,3] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (-2,t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2\colon[-2,4] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(t,-\frac{t}{2}+2\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_3 \colon [-2,4] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \quad &\longmapsto \left(t, \frac{t}{2} - 2\right). \end{aligned}$$

Nótese que α_1 y α_2 están en sentido horario; mientras que α_3 está en sentido antihoraio, entonces

$$\begin{aligned} T = \int_c F \cdot d\alpha &= \int_{AC} F \cdot d\alpha_1 + \int_{AB} F \cdot d\alpha_2 - \int_{BC} F \cdot d\alpha_3 \\ &= \int_{-3}^{3} F(\alpha_1(t)) \cdot (0,1)dt + \int_{-2}^{4} F(\alpha_2(t)) \cdot (1; -0{,}5)dt - \int_{-2}^{4} F(\alpha_3(t)) \cdot (1; 0{,}5)dt \\ &= 0 + 42 - (-12) = 54. \end{aligned}$$

□

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

CÁLCULO VECTORIAL • EXAMEN FINAL 2019A

Martes 6 de agosto de 2019 Departamento de Formación Básica

1. Sea el campo escalar

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases} \end{aligned}$$

   a) Determine los límites iterados de f cuando $(x,y) \to (0,0)$.

   b) Determine el límite de f cuando $(x,y) \to (0,0)$ a través de las trayectoria de la familia de curvas α.

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, mt^2), \end{aligned}$$

   con $m \in \mathbb{R}$.

   c) Determine si la función f es continua en el origen.

Solución.

a) Para cada $x \neq 0$,

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

de donde

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0.$$

De la misma manera, para cada $y \neq 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

de donde

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0.$$

Ambos límites iterados existen y son igual a 0.

b) A través de la trayectoria α el límite es

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}(f\circ\alpha)(t) &= \lim_{t\to 0} \frac{t(mt^2)}{t^2+(mt)^2} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{mt^3}{t^2+m^2t^4} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{mt}{1+m^2t^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) La función no es continua en $(0,0)$. Para verlo, sea la trayectoria

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,t). \end{aligned}$$

El límite de f a través de β en $(0,0)$ es

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\beta)(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t(t)}{t^2+t^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2}\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Como la función f tiene límites diferentes, en el origen, por α y β; se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

no existe, de donde f no es continua en $(0,0)$. □

2. La superficie de un cierto lago puede representarse como una región D en el plano xy, de modo que su profundidad (en metros) en el punto (x,y) está dada por,

$$
\begin{aligned}
f\colon\ D &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(x,y) &\longmapsto 400 - x^3y^2.
\end{aligned}
$$

Desde el punto $(1,2)$, determine:

a) La dirección en que la profundidad aumenta con la máxima rapidez.

b) La dirección en que la profundidad permanece constante.

Solución. Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\nabla f(x,y) = (-3x^2y^2, -2x^3y).$$

a) La dirección de máximo crecimiento de la profundidad es la del gradiente. Entonces en el punto $(1,2)$, la dirección de mayor aumento de la profundidad es

$$\frac{\nabla f(1,2)}{\|\nabla f(1,2)\|} = \frac{(-12,-4)}{\|(-12,-4)\|} = \frac{(-3,-1)}{\sqrt{10}}.$$

b) Para determinar la dirección en la cual la profundidad no cambia, se debe analizar

$$f'((1,2);(a,b)) = 0.$$

Esto es equivalente a

$$\nabla f(1,2)\cdot(a,b) = 0 \iff -12a - 4b = 0 \iff 3a + b = 0.$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} 3a + b = 0\\ a^2 + b^2 = 1\end{cases} \iff (a,b) = \frac{(-1,3)}{\sqrt{10}} \vee (a,b) = \frac{(1,-3)}{\sqrt{10}},$$

son las dos direcciones en las cuales la profundidad permanece constante. □

3. Un panadero determina que la producción semanal está dada por

$$P(x,y) = 2000 - 4x^2 - y^2,$$

donde x denota los kilos de masa y y denota los galones de leche. La masa cuesta \$10 cada kilo y la leche cuesta \$15 cada galón. Si se puede asignar un presupuesto de \$500 semanales para la producción de la panadería, utilice multiplicadores de Lagrange (suponiendo que se gasta todo el presupuesto semanal) para determinar la cantidad de masa y de leche que se debe comprar para maximizar la producción semanal de la panadería.

Solución. Por los datos dados, se debe resolver el problema

$$\begin{aligned}
&\max P(x,y)\\
&\text{sujeto a:}\\
&10x + 15y = 500.
\end{aligned}$$

Notemos que este es equivalente a

$$\begin{aligned}
&\max P(x,y)\\
&\text{sujeto a:}\\
&2x + 3y = 100.
\end{aligned}$$

Mediante el método de multiplicadores de Lagrange, sea

$$\begin{aligned}
L\colon \mathbb{R} \times [0,+\infty[^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(\lambda, x, y) &\longmapsto P(x,y) - \lambda(2x + 3y - 100).
\end{aligned}$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \geq 0$,

$$\nabla L(\lambda, x, y) = (100 - 2x - 3y, -8x - 2\lambda, -2y - 3\lambda) \qquad \text{y} \qquad H_L(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & -8 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si $\nabla L(\lambda, x, y) = 0$, entonces $a = (\lambda, x, y) = (-20, 5, 30)$. Por el criterio de Lagrange, solo debe analizar el tercer menor, es decir, el determinante de la matriz $H_L(a)$. Como $\det(H_L(a)) = 80$, se tiene que

$$(-1)^m \det(H_L(a)) = -80 < 0,$$

de donde P alcanza un mínimo en $(5, 30)$. Por lo tanto, la panadería debe comprar 5 kilos de masa y 30 litros de leche. $\square$

4. Un paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ se corta con el plano de ecuación $z = 1$, nótese que la superficie plana y la superficie parabólica tienen la misma frontera. Dado $\operatorname{rot} F(x,y,z) = (1,2,3)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   a) Sean Σ_1 la superficie parabólica y Σ_2 la superficie plana. Usando el teorema de integrales apropiado, explique por qué estas dos integrales son iguales

   $$\iint_{\Sigma_1} \operatorname{rot} F(x,y,z) \cdot dS \qquad \text{y} \qquad \iint_{\Sigma_2} \operatorname{rot} F(x,y,z) \cdot dS$$

   b) Parametrice las dos superficies.

   c) Calcule las integrales del primer literal y verifique que son iguales.

Solución.

a) Dado que ambas superficies tienen el mismo borde, si las parametrizaciones tienen el vector normal en el mismo sentido, por el Teorema de Stokes, dichas integrales son iguales.

b) Una parametrización del paraboloide S_1 es

$$\begin{aligned}
\alpha_1\colon [0,1] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\
(r, \theta) &\longmapsto (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), r^2).
\end{aligned}$$

Una parametrización de S_2 es

$$\begin{aligned}
\alpha_2\colon [0,1] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\
(r, \theta) &\longmapsto (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), 1).
\end{aligned}$$

c) Para calcular las integrales, se debe analizar sus vectores normales. Para $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$,

$$N_1(r,\theta) = (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\operatorname{sen}(\theta), r) \qquad \text{y} \qquad N_2(r,\theta) = (0,0,1).$$

Evaluando en un punto cualquiera, se puede determinar que ambos vectores normales son ascendentes. Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_1} \operatorname{rot} F(x,y,z) \cdot dS &= \iint_{\alpha_1} \operatorname{rot} F(x,y,z) \cdot dS \\
&= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_1)} (1,2,3) \cdot (0,0,r) dr d\theta \\
&= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_1)} 3r dr d\theta \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma_2} \operatorname{rot} F(x,y,z) \cdot dS &= \iint_{\alpha_2} \operatorname{rot} F(x,y,z) \cdot dS \\
&= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_2)} (1,2,3) \cdot (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\operatorname{sen}(\theta), r) dr d\theta \\
&= \iint_{\operatorname{dom}(\alpha_2)} 3r dr d\theta \\
&= 3\pi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ambas integrales son iguales. □

5. Dado un cubo de 2 unidades de lado, centrado en el punto $(2,4,6)$, verifique el teorema de Gauss en el espacio con

$$\begin{aligned}
F\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(x,y,z) &\longmapsto (xy + xz, xyz - 3y, 0).
\end{aligned}$$

Solución. Sea $\Omega = [1,3] \times [3,5] \times [5,7]$ el cubo de dos unidades de lado y centrado en $(2,4,6)$. El Teorema de Gauss establece que

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} f dV = \iint_{\partial\Omega} F \cdot dS.$$

Para verificar este teorema se debe calcular cada integral por separado.

- Para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se tiene que

  $$\operatorname{div} f(x,y,z) = y + z + xz - 3.$$

  Entonces

  $$\begin{aligned}
  \iiint_\Omega \operatorname{div} f dV &= \iiint_\Omega (y + z + xz - 3) dV \\
  &= \overline{y} V(\Omega) + \overline{z} V(\Omega) - 3V(\Omega) + \iiint_\Omega xz dV \\
  &= 152.
  \end{aligned}$$

- Para calcular la integral de superficie, se debe parametrizar cada una de las 6 caras del cubo con un vector normal saliente. Una forma simple de hacerlo es utilizar la geometría del cubo:

Caras	Parametrización	Dominio	Ley de asignación	Vector normal saliente
Frontal	α_1	$[3,5]\times[5,7]$	$(1,u,v)$	$(-1,0,0)$
	α_2		$(3,u,v)$	$(1,0,0)$
Laterales	α_3	$[1,3]\times[5,7]$	$(u,3,v)$	$(0,-1,0)$
	α_4		$(u,5,v)$	$(0,1,0)$
Bases	α_5	$[1,3]\times[3,5]$	$(u,v,5)$	$(0,0,-1)$
	α_6		$(u,v,7)$	$(0,0,1)$

Por la tabla anterior, se tiene que

$$\iint_{\text{Frontales}} F\cdot dS = \iint_{\alpha_1} F\cdot n_1 + F\cdot n_2 dS = 80,$$

$$\iint_{\text{Laterales}} F\cdot dS = \iint_{\alpha_3} F\cdot n_3 + F\cdot n_4 dS = 0$$

y

$$\iint_{\text{Bases}} F\cdot dS = \iint_{\alpha_5} F\cdot n_5 + F\cdot n_6 dS = 72.$$

Por lo tanto,

$$\iint_{\partial\Omega} F\cdot dS = 80+0+72 = 152.$$

Finalmente,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} f dV = \iint_{\partial\Omega} F\cdot dS = 152. \qquad \square$$