1. Dados $x = (2, 1, 0)$, $y = (3, 1, 2)$ y $z = (0, -1, 2)$. Verificar que $B = \{x, y, z\}$ es una base para el espacio $\mathbb{R}^3$ y expresar el vector $u = (8, 0, 10)$ como una combinación lineal de x, y y z. Finalmente, calcule $[u]_B$.

   Solución. Para que los vectores x, y y z formen una base para el espacio $\mathbb{R}^3$ se debe verificar que son linealmente independientes, para esto, tomemos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

   debemos concluir que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$. Así, tenemos que

$$\alpha(2, 1, 0) + \beta(3, 1, 2) + \gamma(0, -1, 2) = (0, 0, 0)$$

   y se tiene que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$, con lo cual se verifica que los tres vectores son linealmente independientes y por consiguiente una base para $\mathbb{R}^3$.

   Finalmente, para expresar u como una combinación lineal de x, y y z, debemos encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

   Entonces, tenemos que

$$(8, 0, 10) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(3, 1, 2) + \gamma(0, -1, 2),$$

   de donde $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 3$ y se tiene que

$$u = x + 2y + 3z.$$

   Con esto, tenemos que

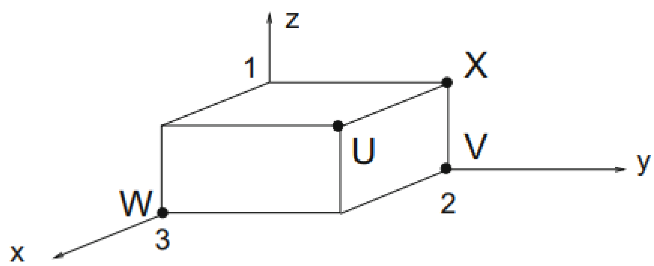
$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   □

2. ¿Cuáles de los siguientes puntos están en el plano dado por la ecuación $2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 100$?

   a) $(0, 0, 0)$
   b) $(50, 0, 0)$
   c) $(0, 100, 0)$
   d) $(y_1, 100 + y_2, y_3)$ si $2y_1 + 2y_2 - 5y_3 = 0$

3. Sean u, v, w y x los puntos en la caja rectangular en $\mathbb{R}^3$ que se muestra en la figura:



Encuentre las siguientes:

a) $\|v-u\|$,
b) La distancia entre u y el origen,
c) La distancia entre u y $v+w$,
d) $\|w-x\|$.

Solución. Tenemos que

$$u=(3,2,1), \qquad v=(0,2,0), \qquad w=(3,0,0) \qquad \text{y} \qquad x=(0,2,1),$$

por lo tanto

a) $\|v-u\|=\|(-3,0,-1)\|=\sqrt{82}$.
b) Tenemos que la distancia entre u y el origen está dada por
$$\|u-(0,0,0)\|=\|u\|=\sqrt{14}$$
c) La distancia entre u y $v+w$ está dada por
$$\|u-(v+w)\|=\|(0,0,1)\|=1.$$
d) $\|w-x\|=\|(3,-2,-1)\|=\sqrt{14}$. $\square$

4. Comprobar la desigualdad triangular de la norma para $\mathbb{R}^2$.

Solución. Sean $u,w\in\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u+w\|^2 &= (u_1+w_1)^2+(u_2+w_2)^2\\
&= (u_1+w_1)^2+(u_2+w_2)^2\\
&= u_1^2+w_1^2+2u_1w_1+u_2^2+w_2^2+2u_2w_2\\
&= (u_1^2+u_2^2)+(w_1^2+w_2^2)+2(u_1w_1+u_2w_2)\\
&\leq (u_1^2+u_2^2)+(w_1^2+w_2^2)+2\sqrt{u_1^2+u_2^2}\sqrt{w_1^2+w_2^2}\\
&= \left(\sqrt{u_1^2+u_2^2}+\sqrt{w_1^2+w_2^2}\right)^2\\
&= (\|u\|+\|v\|)^2,
\end{aligned}$$

de donde

$$\|u+w\|\leq\|u\|+\|w\|.$$

$\square$

5. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza $F=(8,-6,9)$ que mueve un objeto del punto $(0,10,8)$ al punto $(6,12,20)$ a lo largo de una línea recta. La distancia se mide en metros y la fuerza en newtons (se sabe que el trabajo realizado es el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento).

Solución. Si $A=(0,10,8)$ y $B=(6,12,20)$, entonces el desplazamiento realizado es

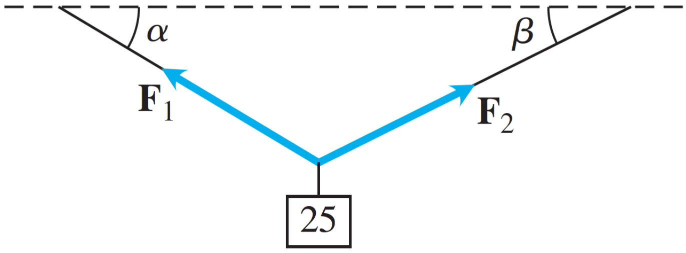
$$\begin{aligned}
C &= B-A\\
&= (6,12,20)-(0,10,8)\\
&= (6,2,12).
\end{aligned}$$

Luego, por definición, el trabajo realizado es

$$W=F\cdot C=(8,-6,9)\cdot(6,2,12)=144.$$

Dado que la distancia está medida en metros y la fuerza en newtons, entonces el trabajo hecho es 144 joules. □

6. Considere un peso de 25 N suspendido de dos alambres, como se ilustra en la figura. Si las magnitudes de los vectores F_1 y F_2 son ambas de 75 N, entonces los ángulos α y β son iguales. Obtenga α.



7. Comprobar que, en $\mathbb{R}^n$, el único vector ortogonal a sí mismo es el vector 0.

8. Sean $x = (a, 2, 1)$ y $y = (-2, b, 3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Si $x \perp y$, determine el valor de $a - b$.

Solución. Como $x \perp y$, se tiene que
$$x \cdot y = 0.$$
Es decir,
$$-2a + 2b + 3 = 0.$$
Así, $a - b = \dfrac{3}{2}$. □

9. En $\mathbb{R}^3$, dados los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$, hallar el conjunto de todos los vectores ortogonales a estos dos.

Solución. Tomemos (α, β, γ) un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a ambos vectores, es decir
$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1, 1, 0) = 0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (0, 1, 1) = 0$$
se tiene que
$$\alpha + \beta = 0$$
$$\beta + \gamma = 0.$$
Resolviendo el sistema, tenemos que
$$\alpha = s$$
$$\beta = -s$$
$$\gamma = s,$$
para cualquier $s \in \mathbb{R}$, así, el conjunto de vectores ortogonales a los vectores dados es
$$\{s(1, -1, 1) : s \in \mathbb{R}\}.$$
□

10. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, comprobar que si x es ortogonal a y, entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ¿El recíproco es verdadero?

Solución. Notemos que
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2,$$

como x y y son ortogonales, $x \cdot y = 0$, de donde
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
El recíproco es verdadero. Si
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$
se tiene que
$$2x \cdot y = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0.$$
Así, x es ortogonal a y. $\square$

11. Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, comprobar que x es ortogonal a $x \times y$.

Solución. Tenemos que
$$\begin{aligned} x \cdot (x \times y) &= (x_1, x_2, x_3) \cdot (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 - x_2x_1y_3 + x_2x_3y_1 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$
por lo tanto x es ortogonal a $x \times y$. $\square$

12. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, comprobar $\mathrm{proy}_y(x)$ y $\mathrm{norm}_y(x)$ son vectores ortogonales.

Solución. Tomemos $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, se tiene que
$$\begin{aligned} \mathrm{proy}_y(x) \cdot \mathrm{norm}_y(x) &= \left(\frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\, y\right) \cdot \left(x - \mathrm{proy}_y(x)\right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\left(y \cdot (x - \mathrm{proy}_y(x))\right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\left(y \cdot x - y \cdot \left(\frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\, y\right)\right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\left(y \cdot x - \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\, y \cdot y\right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\left(y \cdot x - \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\|y\|^2\right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}(y \cdot x - x \cdot y) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$
Por lo tanto, son ortogonales. $\square$

13. En $\mathbb{R}^3$, ¿cuál debe ser el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la proyección del vector $(1, 3, \alpha)$ sobre el vector $(1, 1, 1)$ sea $(2, 2, 2)$?

Solución. Deseamos que
$$\mathrm{proy}_{(1,1,1)}(1, 3, \alpha) = (2, 2, 2),$$
es decir,
$$\begin{aligned} (2, 2, 2) &= \frac{(1, 3, \alpha) \cdot (1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|^2}(1, 1, 1) \\ &= \frac{1 + 3 + \alpha}{3}(1, 1, 1) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{4+\alpha}{3}, \frac{4+\alpha}{3}, \frac{4+\alpha}{3} \right).$$

Entonces

$$\frac{4+\alpha}{3} = 2,$$

y por lo tanto $\alpha = 2$. Así, si $\alpha = 2$, se tiene que la proyección de $(1, 3, \alpha)$ sobre $(1, 1, 1)$ es $(2, 2, 2)$. □

14. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ no nulos tales que x es ortogonal a y. Si $z = \alpha x + \beta y$, hallar expresiones para α y β en términos de los vectores x, y y z.

Solución. Tenemos que

$$z = \alpha x + \beta y.$$

Multiplicando por x, tenemos

$$\begin{aligned} z \cdot x &= (\alpha x + \beta y) \cdot x \\ &= \alpha x \cdot x + \beta y \cdot x \\ &= \alpha x \cdot x. \end{aligned}$$

dado que $x \neq 0$, $x \cdot x \neq 0$, así

$$\alpha = \frac{z \cdot x}{x \cdot x}.$$

De igual forma

$$\beta = \frac{z \cdot y}{y \cdot y}.$$ □

Los ejercicios para la clase CP son: 1, 3, 5, 8, 9, 12, 13