Es común ver en la literatura ejercicios del siguiente estilo:

EJERCICIO 1. Supongamos que

$$z = x^2 + y^2, \qquad x = st \qquad \text{y} \qquad y = s + t,$$

determinar $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Esta formulación sería correcta alrededor del final de los años 1700. Actualmente, cuenta con varios deficiencias conceptuales, pero se sigue encontrado formulaciones de este tipo en libros actuales que no guardan rigurosidad matemática.

La primera deficiencia es que en el enunciado no se señala ninguna función, solamente se expresan ecuaciones. Además, si suponemos que las ecuaciones representan funciones (práctica utilizada hace 300 años), la función z no tiene como variable t, por lo cual no se podría encontrar esta derivada parcial. Finalmente, no se señala ninguna composición de funciones.

Para remediar todo esto, debemos formalizar el ejercicio en la siguiente manera:

EJERCICIO 2. Supongamos que

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2, \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto (st, s + t), \end{aligned}$$

determinar $D_2(f \circ g)$ en el punto $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Dado $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$D_2(f \circ g)(s, t) = D_1 f(g(s, t)) D_2 g_1(s, t) + D_2 f(g(s, t)) D_2 g_2(s, t).$$

Además,

$$D_2 g_1(s, t) = s \qquad \text{y} \qquad D_2 g_2(s, t) = 1,$$

y para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$D_1 f(x, y) = 2x \qquad \text{y} \qquad D_2 f(x, y) = 2y,$$

por lo tanto,

$$D_1 f(g(s, t)) = D_1 f(st, s + t) = 2st$$

y

$$D_2 f(g(s, t)) = D_2 f(st, s + t) = 2s + 2t.$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} D_2(f \circ g)(s, t) &= D_1 f(g(s, t)) D_2 g_1(s, t) + D_2 f(g(s, t)) D_2 g_2(s, t) \\ &= (2st)(s) + (2s + 2t)(1). \end{aligned}$$ □

Desarrollemos el mismo ejercicio con otra notación.

EJERCICIO 3. Supongamos que

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2, \end{array} \qquad \text{y} \qquad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (s,t) & \longmapsto & (st, s+t), \end{array}$$

determinar $\dfrac{\partial f \circ g}{\partial t}(s,t)$ en el punto $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Dado $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t))\frac{\partial g_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t))\frac{\partial g_2}{\partial t}(s,t).$$

Además,

$$\frac{\partial g_1}{\partial t}(s,t) = s \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial t}(s,t) = 1,$$

y para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y,$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(st, s+t) = 2st$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(st, s+t) = 2s+2t.$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f \circ g}{\partial t}(s,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t))\frac{\partial g_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t)\frac{\partial g_2}{\partial t}(s,t) \\ &= (2st)(s) + (2s+2t)(1). \end{aligned}$$

□

Finalmente, otra forma de formalizar el ejercicio, no del todo correcta (pues se utilizará un símbolo al mismo tiempo para representar una función y una variable), es la siguiente.

EJERCICIO 4. Supongamos que

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2, \end{array}$$

además

$$x\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longmapsto & st \end{array} \qquad \text{y} \qquad y\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longmapsto & s+t. \end{array}$$

Definimos la función

$$z\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longmapsto & f(x(s,t), y(s,t)) \end{array}$$

determinar $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ en el punto $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Iniciemos notando que no existe una composición en el sentido estricto, pero si definimos

$$\begin{aligned} g\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s,t) &\longmapsto (x(s,t), y(s,t)) = (st, s+t), \end{aligned}$$

tenemos que

$$z = f \circ g,$$

de donde,

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t))\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t))\frac{\partial y}{\partial t}(s,t).$$

Además,

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = s \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = 1,$$

y para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y,$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(st, s+t) = 2st$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t)) = \frac{\partial f}{\partial y}(st, s+t) = 2s + 2t.$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(s,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(s,t))\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(s,t)\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) \\ &= (2st)(s) + (2s+2t)(1). \end{aligned}$$

□

Finalmente, presentamos la manera clásica en la que la mayoría de libros antiguos resuelve el ejercicio.

EJERCICIO 5. Supongamos que

$$z = x^2 + y^2, \qquad x = st \qquad \text{y} \qquad y = s + t,$$

determinar $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ &= (2x)(s) + (2y)(1) \\ &= (2st)(s) + (2s+2t)(1). \end{aligned}$$

□

A pesar de que esta resolución lleva al mismo resultado y parece ser la más simple, no guarda justificación formal.

Es común ver en la literatura ejercicios del siguiente estilo:

EJERCICIO 1. Encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, donde z está dada de manera implícita por la ecuación

$$x^3 z + y\cos(z) = 0.$$

Existen varias deficiencias en este enunciado como por ejemplo, no se señala ninguna función, solamente se expresa una ecuación.

Para remediar todo esto, debemos formalizar el ejercicio en la siguiente manera (en lo subsiguiente, consideraremos que D es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$):

EJERCICIO 2. Supóngase que la función $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumple que

$$x^3 f(x,y) + y\cos(f(x,y)) = 0$$

para todo $(x,y) \in D$. Determinar $D_1 f(x,y)$ para $(x,y) \in D$.

Solución. Definamos la función

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x^3 z + y\cos(z), \end{aligned}$$

tenemos que se cumple

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

para todo $(x,y) \in D$. Por lo tanto,

$$D_1 f(x,y) = -\frac{D_1 F(x,y,f(x,y))}{D_3 F(x,y,f(x,y))}$$

para todo $(x,y) \in D$ tal que $D_3 f(x,y,f(x,y)) \neq 0$. Con esto, calculemos, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$D_1 F(x,y,z) = 3x^2 z$$

y

$$D_3 F(x,y,z) = x^3 - y\,\mathrm{sen}(z),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= -\frac{D_1 F(x,y,f(x,y))}{D_3 F(x,y,f(x,y))} \\ &= -\frac{3x^2 f(x,y)}{x^3 - y\,\mathrm{sen}(f(x,y))} \end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in D$. □

Desarrollemos el mismo ejercicio con otra notación.

> **EJERCICIO 3.** Supóngase que la función $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumple que
>
> $$x^3 f(x,y) + y\cos(f(x,y)) = 0$$
>
> para todo $(x,y) \in D$. Determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para $(x,y) \in D$.

Solución. Definamos la función

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x^3 z + y\cos(z), \end{aligned}$$

tenemos que se cumple

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

para todo $(x,y) \in D$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}$$

para todo $(x,y) \in D$ tal que $D_3 f(x,y,f(x,y)) \neq 0$. Con esto, calculemos, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 z$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x^3 - y\,\mathrm{sen}(z),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))} \\ &= -\frac{3x^2 f(x,y)}{x^3 - y\,\mathrm{sen}(f(x,y))}, \end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in D$. □

Finalmente, otra forma de formalizar el ejercicio, no del todo correcta (pues se utilizará un símbolo al mismo tiempo para representar una función y una variable), es la siguiente.

> **EJERCICIO 4.** Dada una función $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si para $(x,y) \in D$, se define $z = f(x,y)$ y se cumple que
>
> $$x^3 z + y\cos(z) = 0.$$
>
> Determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para $(x,y) \in D$.

Solución. Definamos la función

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x^3 z + y\cos(z). \end{aligned}$$

Definiendo $z = f(x,y)$, para $(x,y) \in D$, tenemos que se cumple

$$F(x,y,z) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}$$

para todo $(x,y) \in D$ tal que $D_3 f(x,y,z) \neq 0$. Con esto, calculemos, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 z$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = x^3 - y\,\mathrm{sen}(z),$$

por lo tanto, para $(x,y) \in D$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} \\ &= -\frac{3x^2 z}{x^3 - y\,\mathrm{sen}(z)}, \end{aligned}$$

donde $z = f(x,y)$. □

EJERCICIO 1. Sabiendo que el campo

$$\begin{array}{rccl} F\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2xy+\cos(2y), x^2-2x\operatorname{sen}(2y)) \end{array}$$

es conservativo, determinar su función potencial

Solución. Tomemos

$$M(x,y) = 2xy+\cos(2y) \qquad \text{y} \qquad N(x,y) = x^2-2x\operatorname{sen}(2y),$$

para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Buscamos una función $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x,y) = F(x,y)$$

para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \tag{1}$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \tag{2}$$

para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Así, de la ecuación (1), tenemos que

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + k(y),$$

para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, donde $k\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función, por lo tanto,

$$f(x,y) = \int (2xy+\cos(2y))\,dx = x^2y + x\cos(2y) + k(y),$$

para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ahora, tomando la derivada parcial respecto a y, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}f(x,y) = x^2 - 2x\operatorname{sen}(2y) + k'(y),$$

para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Combinando con la ecuación (2), tenemos que

$$x^2-2x\operatorname{sen}(2y)+k'(y) = x^2 - 2\operatorname{sen}(2y),$$

para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, de donde,

$$k'(y) = 0$$

para $y\in\mathbb{R}$, es decir,

$$k(y) = c,$$

para $y \in \mathbb{R}$ y para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Así, tenemos que

$$f(x, y) = x^2y + x\cos(2y) + c$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

EJERCICIO 1. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} V\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,h) &\longmapsto V(r,h) = \pi r^2 h \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,h) &\longmapsto A(r,h) = 2\pi r h + 2\pi r^2. \end{aligned}$$

resolver el problema

$$\begin{cases} \text{máx } V(r,h) \\ \text{sujeto a:} \\ \quad A(r,h) = 150\pi. \end{cases}$$

Solución. Definamos la función $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$L(\lambda, r, h) = V(r,h) - \lambda(A(r,h) - 150\pi) = \pi r^2 h - \lambda(2\pi r h + 2\pi r^2 - 150\pi).$$

para $(\lambda, r, \in \mathbb{R}^3$. Procedemos a optimizar esta función, para esto, hallemos su gradiente:

$$\nabla L(\lambda, r, h) = \begin{pmatrix} -2\pi r h - 2\pi r^2 + 150\pi \\ 2\pi r h - \lambda(2\pi h + 4\pi r) \\ \pi r^2 - \lambda(2\pi r) \end{pmatrix}^T$$

para $(\lambda, r, \in \mathbb{R}^3$. Para obtener los puntos críticos igualamos el gradiente a $(0,0,0)$ y obtenemos

$$\nabla L(\lambda, r, h) = (0,0,0) \iff \begin{pmatrix} -2\pi r h - 2\pi r^2 + 150\pi \\ 2\pi r h - \lambda(2\pi h + 4\pi r) \\ \pi r^2 - \lambda(2\pi r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2rh + 2r^2 - 150 \\ 2rh - \lambda(2h + 4r) \\ r^2 - \lambda(2r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2rh + 2r^2 - 150 &= 0 \\ 2rh - \lambda(2h + 4r) &= 0 \\ r^2 - \lambda(2r) &= 0. \end{aligned}$$

Las soluciones de este sistema son

$$\lambda = -\frac{5}{2}, \qquad r = -5 \qquad \text{y} \qquad h = -10$$

o

$$\lambda = \frac{5}{2}, \qquad r = 5 \qquad \text{y} \qquad h = 10$$

Por lo tanto,

$$\left(-\tfrac{5}{2}, -5, -10\right) \qquad \text{y} \qquad \left(\tfrac{5}{2}, 5, 10\right)$$

son puntos críticos de L. Para determinar su naturaleza, calculamos la matriz hesiana:

$$H_L(\lambda, r, h) = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi h - 4\pi r & -2\pi r \\ -2\pi h - 4\pi r & 2h\pi - 4\pi\lambda & 2\pi r - 2\pi\lambda \\ -2\pi r & 2\pi r - 2\pi\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto, se tiene que

$$H_L\left(-\tfrac{5}{2}, -5, -10\right) = \begin{pmatrix} 0 & 40\pi & 10\pi \\ 40\pi & -10\pi & -5\pi \\ 10\pi & -5\pi & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$H_L\left(\tfrac{5}{2}, 5, 10\right) = \begin{pmatrix} 0 & -40\pi & -10\pi \\ -40\pi & 10\pi & 5\pi \\ -10\pi & 5\pi & 0 \end{pmatrix},$$

con lo cual

$$\det\left(H_L\left(-\tfrac{5}{2}, -5, -10\right)\right) = -3000\pi^3 \qquad \text{y} \qquad \det\left(H_L\left(\tfrac{5}{2}, 5, 10\right)\right) = 3000\pi^3.$$

Así, tenemos un máximo en $\left(\frac{5}{2}, 5, 10\right)$ y el máximo es

$$V(5, 10) = 250\pi.$$

□

EJERCICIO 2. Se tiene material para elaborar 150π cm^2 de láminas de aluminio. Si se desea construir un recipiente cilíndrico, determinar sus dimensiones para que su volumen sea máximo.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- r: radio del cilindro en cm.
- h: altura del cilindro en cm.
- $V(r, h)$: volumen del cilindro de radio r y altura h, en cm^3.
- $A(r, h)$: material utilizado en un cilindro de radio r y altura h, en cm^2.

Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} V\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, h) &\longmapsto V(r, h) = \pi r^2 h \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} A\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, h) &\longmapsto A(r, h) = 2\pi r h + 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Con esto, debemos optimizar

$$\begin{cases} \text{máx}\, V(r, h) \\ \text{sujeto a:} \\ \quad A(r, h) = 150\pi. \end{cases}$$

Luego de aplicar el procedimiento de optimización, se tiene que las dimensiones para que el volumen sea máximo son 5 cm de radio y 10 cm de altura. $\square$

Ejercicio 1. En $\mathbb{R}^2$, dados los puntos $(1,2)$, $(2,5)$ y $(3,3)$, encontrar la ecuación de la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- m: pendiente de la recta buscada.
- b: intersección con el eje y de la recta buscada.
- $L(b,m)$: suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta.

Con esto, se tiene que la ecuación de la recta buscada es

$$y = mx + b,$$

con $x, y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, las distancias verticales de los puntos a las rectas son,

- para $(1,2)$: $|2 - m(1) - b|$;
- para $(2,5)$: $|5 - m(2) - b|$;
- para $(3,3)$: $|3 - m(3) - b|$;

por lo tanto,

$$L(b,m) = (2 - m - b)^2 + (5 - 2m - b)^2 + (3 - 3m - b)^2,$$

con $(b,m) \in \mathbb{R}^2$. Para minimizar la función, calculamos primero el gradiente y obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla L(b,m) &= \begin{pmatrix} -2(2-m-b) - 2(5-2m-b) - 2(3-3m-b) \\ -2(2-m-b) - 4(5-2m-b) - 6(3-3m-b) \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \\ &= \begin{pmatrix} -20 + 6b + 12m \\ -42 + 12b + 28m \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}\end{aligned}$$

para $(b,m) \in \mathbb{R}^2$. Para obtener los puntos críticos igualamos el gradiente a $(0,0)$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla L(b,m) = (0,0) &\iff \begin{pmatrix} -20 + 12m + 6b \\ -42 + 28m + 12b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -10 + 6m + 3b \\ -21 + 14m + 6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 6m + 3b \\ 14m + 6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 14 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos que $\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{2}\right)$ es un punto crítico de la función. Para determinar su naturaleza, calculamos la matriz hesiana:

$$H_L(b,m) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 28 \end{pmatrix}$$

para $(b,m) \in \mathbb{R}^2$. Con esto, se tiene que

$$\det\left(H_L\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{2}\right)\right) = 24 \qquad \text{y} \qquad D_{1,1}L\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{2}\right) = 6,$$

con lo cual, L alcanza un mínimo en $\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto, la ecuación de la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta es

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{3}.$$

□

EJERCICIO 2. En $\mathbb{R}^2$, dados n puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots$, (x_n, y_n), encontrar la ecuación de la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- m: pendiente de la recta buscada.
- b: intersección con el eje y de la recta buscada.
- $L(b,m)$: suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta.

Con esto, se tiene que la ecuación de la recta buscada es

$$y = mx + b,$$

con $x, y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la distancia vertical del punto (x_k, y_k). con $k \in \{1, \dots, n\}$ es

$$|y_k - m(x_k) - b|$$

por lo tanto,

$$L(b,m) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - b)^2,$$

con $(b,m) \in \mathbb{R}^2$. Para minimizar la función, calculamos primero el gradiente y obtenemos

$$\nabla L(b,m) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -2(y_k - mx_k - b) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} -2x_k(y_k - mx_k - b) \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$
= 2 \begin{pmatrix} -\sum_{k=1}^{n} y_k + m \sum_{k=1}^{n} x_k + nb \\ -\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + m \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b \sum_{k=1}^{n} x_k \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}
$$

$$
= 2 \begin{pmatrix} m \sum_{k=1}^{n} x_k + nb \\ m \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b \sum_{k=1}^{n} x_k \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} - 2 \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}
$$

para $(b, m) \in \mathbb{R}^2$. Para facilitar la notación, llamemos

$$
y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad u = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}
$$

tenemos que

$$
\nabla L(b, m) = 2A^{\mathsf{T}} A u - 2A^{\mathsf{T}} y
$$

Para obtener los puntos críticos igualamos el gradiente a $(0, 0)$ y obtenemos

$$
\begin{aligned} \nabla L(b, m) = (0, 0) &\iff 2A^{\mathsf{T}} A u - 2A^{\mathsf{T}} y \\ &\iff A^{\mathsf{T}} A u = A^{\mathsf{T}} y \end{aligned}
$$

Se puede demostrar que este sistema siempre tiene solución, además de que la función L alcanza un mínimo en la solución del sistema, por lo tanto, tomando

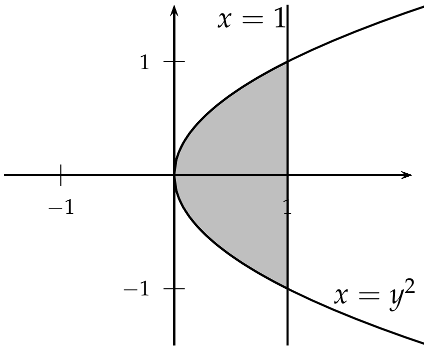
$$
\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = (A^{\mathsf{T}} A)^{-1} A^{\mathsf{T}} y,
$$

se tiene que la ecuación de la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta es

$$
y = mx + b. \qquad \square
$$

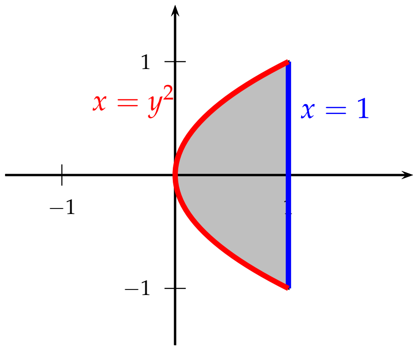
EJERCICIO 1. Determinar $\iint_\Omega 12xy\,dA$, donde Ω es la región acotada por las curvas de ecuación $x = y^2$ y $x = 1$.

Solución. Primero visualicemos el conjunto Ω:



Con esto, podemos ver a Ω como una región del tipo 2, de la siguiente manera

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq 1\}.$$

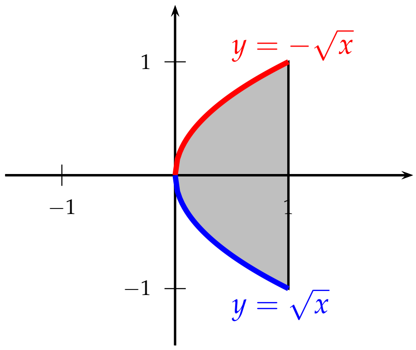


Con lo cual, la integral es

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega xy\,dA &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{1} 12xy\,dx \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(12x^2 y \big|_{x=y^2}^{1} \right) dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(12y - 12y^5 \right) dy \\
&= \left(6y^2 - 2y^6 \right) \big|_{y=-1}^{1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De otra forma, podemos ver a Ω como una región del tipo 1, de la siguiente manera

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$



Con lo cual, la integral es

$$\begin{aligned}\iint_\Omega xy\,dA &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 12xy\,dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(6xy^2 \Big|_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \int_0^1 0\,dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Definición 1: Coordenadas polares

En $\mathbb{R}^2$, el cambio a coordenadas polares es la función

$$\begin{aligned} P: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\longmapsto P(r,\theta) = (x,y), \end{aligned}$$

donde

$$x = r\cos(\theta) \qquad \text{y} \qquad y = r\operatorname{sen}(\theta)$$

para $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$.

Notemos que si $(x,y) = P(r,\theta)$, entonces se tiene que

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x},$$

para todo $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \neq 0$.

Definición 2: Coordenadas cilíndricas

En $\mathbb{R}^3$, el cambio a coordenadas cilíndricas es la función

$$\begin{aligned} C: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,z) &\longmapsto C^{-1}(r,\theta,z) = (x,y,z)\,, \end{aligned}$$

donde

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\operatorname{sen}(\theta) \qquad \text{y} \qquad z = z,$$

para $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3$.

Notemos que si $(x,y,z) = C(r,\theta,z)$, entonces se tiene que

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \qquad \text{y} \qquad z = z,$$

para todo $(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x \neq 0$.

Definición 3: Coordenadas esféricas

En $\mathbb{R}^3$, el cambio a coordenadas cilíndricas es la función

$$\begin{aligned} E: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\phi) &\longmapsto E(r,\theta,h) = (x,y,z)\,, \end{aligned}$$

donde

$$x = r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta), \qquad y = r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \qquad \text{y} \qquad z = r\cos(\phi),$$

para $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$.

Notemos que si $(x, y, z) = E(r, \theta, \phi)$, entonces se tiene que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x} \qquad \text{y} \qquad \tan(\phi) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x \neq 0$ y $z \neq 0$.

1. Jacobiano

Proposición 1. Dado el cambio de variable a coordenadas polares, se tiene que

$$J_P(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

para $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto,

$$\det(J_P(r, \theta)) = r$$

para todo $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Proposición 2. Dado el cambio de variable a coordenadas polares, se tiene que

$$J_C(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto,

$$\det(J_C(r, \theta, z)) = r$$

para todo $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$.

Proposición 3. Dado el cambio de variable a coordenadas polares, se tiene que

$$J_E(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) & r\operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) & r\cos(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\phi) & -r\operatorname{sen}(\phi) & 0 \end{pmatrix},$$

para $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto,

$$\det(J_E(r, \theta, \phi)) = -r^2\operatorname{sen}(\phi)$$

para todo $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 1. Calcular
$$\iint_\Omega x^2 + y^2 \, dxdy$$
donde $\Omega = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, \; y > 0\}$.

Solución. Para resolver esta integral, tomaremos el cambio de variable a coordenadas polares, es decir, el cambio de variable
$$x = r\cos(\theta) \qquad \text{y} \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta),$$
es decir, tendremos la función definida por
$$P(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)),$$
para $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, con lo cual
$$\det(J_P(r, \theta)) = r$$
para $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$. Ahora, necesitamos encontrar Ω^* tal que $P(\Omega^*) = \Omega$. Dado que Ω es el semicírculo de centro en el origen y radio 2, podemos ver que
$$\Omega^* = [0, 2] \times [0, \pi].$$
Así, tenemos que
$$\begin{aligned}
\iint_\Omega x^2 + y^2 \, dxdy &= \iint_{\Omega^*} r^2 |\det(J_P(r, \theta))| \, drd\theta \\
&= \iint_{\Omega^*} r^3 \, drd\theta \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^\pi r^3 d\theta \right) dr \\
&= \int_0^2 (\pi r^3) \, dr \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$
□

EJERCICIO 2. Calcular
$$\iint_\Omega (x^2 - y^2) e^{xy} \, dxdy$$
donde $\Omega = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 4, \; x \leq y \leq x + 2\}$.

Solución. Para resolver esta integral, tomaremos el cambio de variable a coordenadas polares, es decir, el cambio de variable
$$u = xy \qquad \text{y} \qquad v = x - y,$$

es decir, tendremos la función definida por

$$T(x,y) = (xy, x-y),$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Notemos que el cambio de variable que buscamos no es T sino T^{-1} con lo cual

$$\det(J_{T^{-1}}(u,v)) = \frac{1}{\det(J_T(x,y))} = \frac{1}{x+y},$$

para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ y $(x,y) = T^{-1}(u,v)$. Ahora, necesitamos encontrar Ω^* tal que $T^{-1}(\Omega^*) = \Omega$. Para esto tomamos $T(x,y) = (u,v)$ y analizamos las restricciones de Ω:

$$1 \leq xy \leq 4 \Longleftrightarrow 1 \leq u \leq 4$$

y

$$x \leq y \leq x+2 \Longleftrightarrow 0 \leq y-x \leq 2 \Longleftrightarrow 0 \leq v \leq 2.$$

Así, tenemos que

$$\Omega^* = [1,4] \times [0,2].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega (x^2-y^2)e^{xy}\,dxdy &= \iint_{\Omega^*} (x^2-y^2)e^{xy}|\det(J_P(r,\theta))|\,dudv \\
&= \iint_{\Omega^*} (x^2-y^2)e^{xy}\frac{1}{x+y}\,dudv \\
&= \iint_{\Omega^*} (x-y)e^{xy}\,dudv \\
&= \iint_{\Omega^*} ve^u\,dudv \\
&= \int_1^4 \left(\int_0^2 ve^u dv\right) du \\
&= 2(e-e^4).
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3. Calcular

$$\iint_\Omega e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

donde $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Solución. Para resolver esta integral, tomaremos el cambio de variable a coordenadas esféricas, es decir, el cambio de variable

$$x = r\cos(\theta) \qquad \text{y} \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta),$$

es decir, tendremos la función definida por

$$P(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)),$$

para $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, con lo cual

$$\det(J_P(r,\theta)) = r$$

para $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Ahora, necesitamos encontrar Ω^* tal que $T(\Omega^*) = \Omega$, podemos ver que

$$\Omega^* = [0,+\infty[\times [0,2\pi]$$

cumple con esto, por lo tanto, si definimos

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2},$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_{\Omega^*} f(P(r,\theta))|\det(J_P(u,v))|\,drd\theta \\
&= \iint_{\Omega^*} e^{-r^2} r\,drd\theta \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta \right) dr \\
&= \int_0^{+\infty} \left(2\pi e^{-r^2} r \right) dr \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

□

EJERCICIO 4. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Solución. Dado que la función definida por $f(x) = e^{-x^2}$ no posee una primitiva que se pueda expresar como combinación de funciones básicas, necesitamos otra técnica para resolverla. Para esto, definamos

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \right) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy \right) dx \\
&= \iint_\Omega e^{-x^2-y^2}\,dxdy
\end{aligned}$$

donde $\Omega = \mathbb{R}^2$. Por lo realizado en el ejercicio anterior, se tiene que

$$I^2 = \pi,$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = I = \sqrt{\pi}.$$

□