1. EL ESPACIO $\mathbb{R}^n$

En el presente libro, salvo que se indique lo contrario, se considera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ y $m \geq 1$.

DEFINICIÓN 1: El conjunto $\mathbb{R}^n$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}},$$

es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \textit{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Por notación, si $y \in \mathbb{R}^n$, se asumirá $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

PROPOSICIÓN 1 (Igualdad en $\mathbb{R}^n$). Dados dos elementos $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$x = y \qquad \text{si y solo si} \qquad x_i = y_i$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINICIÓN 2: Operaciones en $\mathbb{R}^n$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se define

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

y

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

TEOREMA 2

La tripleta $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real de dimensión n.

DEFINICIÓN 3: Base canónica

En $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, definido por

$$e^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ es una base. Se la denomina base canónica.

DEFINICIÓN 4: Producto escalar, norma y distancia

La función

$$\begin{aligned} \cdot \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y se lo denomina el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. Además, la función

$$\begin{aligned} \|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{x \cdot x} \end{aligned}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$ y se la denomina la norma usual de $\mathbb{R}^n$. Finalmente, a la función

$$\begin{aligned} d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

se la llama distancia usual de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 5: Vector unitario

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que x es un vector unitario si $\|x\| = 1$.

TEOREMA 3: Desigualdad de Cauchy

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

PROPOSICIÓN 4 (Desigualdad Triangular)**.** Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

PROPOSICIÓN 5 (Propiedades de la distancia)**.** Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, se cumple que

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

DEFINICIÓN 6: Ángulo entre vectores

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, ambos diferentes de 0, se define el ángulo entre estos vectores por

$$\arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}\right).$$

DEFINICIÓN 7: Ortogonalidad entre vectores

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se dice que son ortogonales si $x \cdot y = 0$.

DEFINICIÓN 8: Proyección ortogonal

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, la proyección ortogonal de x sobre y es

$$\mathrm{proy}_y(x) = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$$

y la componente normal de x respecto a y es

$$\mathrm{norm}_y(x) = x - \mathrm{proy}_y(x).$$

TEOREMA 6: Teorema de representación

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal, entonces existe un único elemento de $\mathbb{R}^n$, denotado por $[f]$ tal que

$$f(x) = [f] \cdot x,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Dado un vector x de $\mathbb{R}^n$, a la matriz $n \times 1$ de coordenadas en la base canónica de x se la representa por $[x]$. Así:

$$[(x_1, x_2, \ldots x_n)] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

TEOREMA 7: Teorema de representación

Si $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $m > 1$, es una aplicación lineal, entonces existe un único elemento de $\mathbb{R}^{n\times m}$, denotado por $[F]$ tal que

$$[F(x)] = [F][x],$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde el término de la derecha debe ser entendido como multiplicación de matrices.

En la literatura, suele omitirse la notación $[\cdot]$, asumiendo que

$$A = [A].$$

Tener en cuenta que, formalmente, el lado izquierdo de la igualdad es un elemento de $\mathbb{R}^n$ o una función, mientras que el lado derecho es una matriz.

DEFINICIÓN 9

Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, se define el producto cruz *de x y y por*

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1).$$

En $\mathbb{R}^3$, notaremos

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Así,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

PROPOSICIÓN 8. Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, x es ortogonal a $x \times y$. Además

$$x \times y = -y \times x.$$

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, se tiene que:

- El volumen del paralelepípedo formado por x, y, z es $|x \cdot (y \times z)|$.
- El área del paralelogramo determinado por x, y es $\|x \times y\|$.
- Si x es la velocidad de un fluido y y, z determinan un paralelogramo, entonces $x \cdot (y \times z)$ representa el volumen de fluido que atravesó el paralelogramo en una unidad de tiempo.

PROPOSICIÓN 9. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes, entonces

$$x \cdot (y \times z) = 0.$$

1. GEOMETRÍA DE $\mathbb{R}^n$

DEFINICIÓN 1: Recta de $\mathbb{R}^n$

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $b \neq 0$, la recta que pasa por a con dirección b es el conjunto

$$L(a; b) = \{a + \alpha b : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

DEFINICIÓN 2: Plano de $\mathbb{R}^n$

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, con b y c linealmente independientes, el plano que pasa por a con dirección b y c es el conjunto

$$P(a; b, c) = \{a + \alpha b + \beta c : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

DEFINICIÓN 3: Hiperplano de $\mathbb{R}^n$

Dados $a, b^1, b^2, \ldots b^{n-1} \in \mathbb{R}^n$, con $b^1, \ldots b^{n-1}$ linealmente independientes, el hiperplano que pasa por a con dirección $b^1, \ldots b^{n-1}$ es el conjunto

$$H(a; b^1, \ldots, b^{n-1}) = \{a + \alpha_1 b^1 + \cdots + \alpha_{n-1} b^{n-1} : \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Un hiperplano de $\mathbb{R}^2$ es una recta, un hiperplano de $\mathbb{R}^3$ es un plano.

DEFINICIÓN 4

En $\mathbb{R}^n$, dados $a, b, c, d, b^1, \ldots, b^{n-1}, d^1, \ldots, d^{n-1} \in \mathbb{R}^n$ se dice que:

- *Las rectas $L(a; b)$ y $L(c; d)$ son paralelas si $L(0; b) = L(0; d)$.*
- *Los planos $P(a; b^1, b^2)$ y $P(c; d^1, d^2)$ son paralelos si $P(0; b^1, b^2) = P(0; d^1, d^2)$.*
- *Los hiperplanos $H(a; b^1, \ldots, b^{n-1})$ y $H(c; d^1, \ldots, d^{n-1})$ son paralelos si $H(0; b^1, \ldots, b^{n-1}) = H(0; d^1, \ldots, d^{n-1})$.*

PROPOSICIÓN 1. Dados dos puntos $a, b \in \mathbb{R}^n$ distintos, existe una única recta que pasa por a y b y esta es
$$L(a; b - a).$$

PROPOSICIÓN 2. Dados tres puntos $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ que no pertenecen a la misma recta, existe un único plano que pasa por a, b y c y este es
$$P(a; b - a, c - a).$$

DEFINICIÓN 5

En $\mathbb{R}^n$, dadas una recta, plano o hiperplano H y $r \in \mathbb{R}^n$, se dice que r es ortogonal a H si para todo $a, b \in H$ se cumple que $r \cdot (b - a) = 0$.

PROPOSICIÓN 3. En $\mathbb{R}^n$, dados los vectores $a, r \in \mathbb{R}^n$, existe un único hiperplano H, que pasa por a, tal que r es ortogonal al H. Además,
$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : r \cdot x = r \cdot a\}.$$

PROPOSICIÓN 4. En $\mathbb{R}^3$, dado el plano $P(a; b, c)$, un vector normal a este es $b \times c$.

1. Funciones vectoriales

En esta sección, asumiremos que Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1: Funciones vectoriales

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función:

- *Si $n = 1$ y $m > 1$ se dice que f es una trayectoria.*
- *Si $n > 1$ y $m = 1$ se dice que f es un campo escalar.*
- *Si $n > 1$ y $m > 1$ se dice que f es un campo vectorial.*

En general, en este libro, utilizaremos:

- letras griegas para trayectorias;
- letras minúsculas para campos escalares; y
- letras mayúsculas para campos vectoriales.

Definición 2: Componentes

Dada $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función y $m > 1$, se tiene que, para todo $x \in \Omega$,

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),$$

donde $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, m$. A estas funciones se las llama las componentes de F.

Dada $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función y $m > 1$, si para todo $x \in \Omega$,

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),$$

en la literatura se suele denotar

$$F = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Formalmente, esta notación no es correcta dado que el elemento de la izquierda es una función mientras que el elemento de la derecha es un vector de funciones. A pesar de esto, se utilizará esta notación para indicar que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ son la componentes de la función F.

DEFINICIÓN 3: Conjuntos de nivel

Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \mathbb{R}$, al conjunto

$$L_c(f) = \{x \in \Omega : f(x) = c\}$$

se lo llama conjunto de nivel de f en c.

- Si $n = 2$, a $L_c(f)$ se lo llama curva de nivel.
- Si $n = 3$, a $L_c(f)$ se lo llama superficie de nivel.

DEFINICIÓN 4: Operaciones entre funciones

Dadas las funciones $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen las funciones:

- $f + g\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, *con* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, *para todo* $x \in \Omega$.
- $\lambda f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, *con* $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, *para todo* $x \in \Omega$.
- $uf\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$, *con* $(uf)(x) = u(x)f(x)$, *para todo* $x \in \Omega$.
- $f \cdot g\colon \Omega \to \mathbb{R}$, *con* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, *para todo* $x \in \Omega$.
- $\|f\|\colon \Omega \to \mathbb{R}$, *con* $\|f\|(x) = \|f(x)\|$, *para todo* $x \in \Omega$.
- *Si* $m = 3$, $f \times g\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, *con* $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, *para todo* $x \in \Omega$.

2. CÁLCULO EN TRAYECTORIAS

En este capítulo asumiremos que $m > 1$ e $I, J \subseteq \mathbb{R}$ son intervalos.

DEFINICIÓN 5: Límite

Dados $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$ una trayectoria y $a \in \mathbb{R}$, el límite cuando x tiende a a de

$\alpha(x)$ es

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\left(\lim_{x\to a}\alpha_1(x),\lim_{x\to a}\alpha_2(x),\dots,\lim_{x\to a}\alpha_m(x)\right)$$

siempre que los límites de la derecha existan.

DEFINICIÓN 6: Continuidad

Dados $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^m$ una trayectoria y $a\in I$, se dice que α es continua en a si

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\alpha(a).$$

Se dice que α es continua en I si α es continua en cada punto de I.

PROPOSICIÓN 1. Dados $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^m$ una trayectoria y $a\in\mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=L,$$

si y solo si: para todo $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in I$ se tiene que

$$0<|x-a|<\delta\implies\|\alpha(x)-L\|<\epsilon.$$

PROPOSICIÓN 2. Dados $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^m$ una trayectoria y $a\in I$, se tiene que α es continua en a si y solo si: para todo $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in I$ se tiene que

$$|x-a|<\delta\implies\|\alpha(x)-\alpha(a)\|<\epsilon.$$

DEFINICIÓN 7: Derivada

Dados $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^m$ una trayectoria, con I un intervalo abierto, y $a\in I$, la derivada de α en a es

$$\alpha'(a)=\left(\alpha_1'(a),\alpha_2'(a),\dots,\alpha_m'(a)\right),$$

siempre que las derivadas de la derecha existan. Si existen, se dice que α es derivable en a.

PROPOSICIÓN 3. Dados $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^m$ una trayectoria, con I un intervalo abierto, y $a\in I$, se tiene que α es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\alpha(a+h)-\alpha(a)),$$

en tal caso, el valor de $\alpha'(a)$ es este límite.

DEFINICIÓN 8: Integral

Dada una trayectoria $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$, la integral de α de a a b es

$$\int_a^b \alpha(t)dt = \left(\int_a^b \alpha_1(t)dt, \int_a^b \alpha_2(t)dt, \ldots, \int_a^b \alpha_m(t)dt \right),$$

siempre que las integrales de la derecha existan. Si existen, se dice que α es integrable en $[a,b]$.

DEFINICIÓN 9

Dado un intervalo $[a,b]$, una partición de orden n es un conjunto

$$P = \{x_i \in \mathbb{R} : i = 0, \ldots, n\},$$

donde

$$a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

- *A los conjuntos*

  $$I_i = [x_{i-1}, x_i],$$

  con $i = 1, \ldots, n$, se los llama subintervalos de la partición.

- *A las cantidades*

  $$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

  con $i = 1, \ldots, n$, se las llama la longitud del subintervalo.

- *A un conjunto*

  $$C = \{c_i \in \mathbb{R} : c_i \in I_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

  se lo llama un conjunto de etiquetas para P.

- *Al par (P, C) se lo llama una partición etiquetada de $[a,b]$.*

- *A la cantidad*

  $$|P| = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$$

  se la llama grosor de la partición.

DEFINICIÓN 10

Sean $\alpha\colon [a,b] \to R^m$ una trayectoria y (P,C) una partición etiquetada de $[a,b]$, entonces

$$S(\alpha, P, C) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(c_i)\Delta x_i$$

es la suma de Riemann de α respecto a la partición etiquetada (P,C).

PROPOSICIÓN 4. Dada una trayectoria $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$, se define la integralde α por

$$\int_a^b \alpha(t)dt = \lim_{|P|\to 0} S(\alpha, P, C) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \alpha(c_i)\Delta x_i,$$

siempre que el límite exista (el límite se toma sobre todas las particiones etiquetadas). Si el límite existe, se dice que la función es integrable.

TEOREMA 5

Dadas las trayectorias $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$, $\beta\colon I \to \mathbb{R}^m$, y la función $u\colon I \to \mathbb{R}$, todas derivables en $a \in I$, se tiene que

- *$\alpha + \beta$ es derivable en a y $(\alpha+\beta)'(a) = \alpha'(a) + \beta'(a)$.*
- *$\lambda\alpha$ es derivable en a y $(\lambda\alpha)'(a) = \lambda\alpha'(a)$.*
- *$\alpha \cdot \beta$ es derivable en a y $(\alpha\cdot\beta)'(a) = \alpha'(a)\cdot\beta(a) + \alpha(a)\cdot\beta'(a)$.*
- *$u\alpha$ es derivable en a y $(u\alpha)'(a) = u'(a)\alpha(a) + u(a)\alpha'(a)$.*
- *Si $m = 3$, $\alpha \times \beta$ es derivable en a y $(\alpha\times\beta)'(a) = \alpha'(a)\times\beta(a) + \alpha(a)\times\beta'(a)$.*

PROPOSICIÓN 6. Si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$ es derivable en I y existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|\alpha(x)\| = k$ para todo $x \in R$, entonces $\alpha(x)\cdot\alpha'(x) = 0$ para todo $x \in I$.

TEOREMA 7: Regla de la cadena

Si $u\colon I \to \mathbb{R}$, es derivable en $a \in I$ y $\alpha\colon J \to \mathbb{R}^m$ es derivable en $u(a) \in J$, entonces $\alpha \circ u\colon I \to \mathbb{R}^m$ es derivable en a y se tiene que

$$(\alpha\circ u)'(a) = u'(a)\alpha'(u(a)).$$

PROPOSICIÓN 8 (Linealidad de la integral)**.** Dadas las trayectorias $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ y $\beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$, integrables en $[a,b]$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, se tiene que la función

$$\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta$$

es integrable en $[a,b]$ y

$$\int_a^b (\lambda_1\alpha(x) + \lambda_2\beta(x))dx = \lambda_1 \int_a^b \alpha(x)dx + \lambda_2 \int_a^b \beta(x)dx$$

TEOREMA 9: Teorema Fundamental del Cálculo I

Dada $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una trayectoria continua y $c \in [a,b]$, si definimos para $x \in [a,b]$

$$A(x) = \int_c^x \alpha(t)dt,$$

entonces A es derivable en (a,b) y

$$A'(x) = \alpha(x)$$

para todo $x \in (a,b)$.

DEFINICIÓN 11

Sean $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$ una trayectoria y $A\colon I \to \mathbb{R}^m$ una trayectoria derivable en I. Se dice que A es una primitiva de α si

$$\alpha(x) = A'(x)$$

para todo $x \in I$.

TEOREMA 10: Teorema Fundamental del Cálculo II

Dada $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una trayectoria continua, si $A\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ es una primitiva de α, entonces

$$\int_a^b \alpha(t)dt = A(b) - A(a).$$

PROPOSICIÓN 11. Dados $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una trayectoria integrable y $c \in \mathbb{R}^m$, se tiene que $c \cdot \alpha$ es integrable y

$$\int_a^b c \cdot \alpha(t)dt = c \cdot \int_a^b \alpha(t)dt$$

PROPOSICIÓN 12. Dados $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una trayectoria integrable tal que $\|\alpha\|$ también es integrable y

$$\left\| \int_a^b \alpha(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\alpha(t)\|dt.$$

3. CURVAS

En esta sección asumiremos que $m \in \{2,3\}$.

DEFINICIÓN 12: Curva

Dada $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$ una trayectoria, al conjunto $\mathrm{img}(\alpha)$ *se lo llama la gráfica de α. A α se la llama una parametrización de* $\mathrm{img}(\alpha)$*.*

Si α es continua en I, a su gráfica se la llama la curva descrita por α.

DEFINICIÓN 13: Tangente

Dada una curva C parametrizada por por la trayectoria $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$. Para $t \in I$, si existe $\alpha'(t)$ y es diferente de 0, al vector $\alpha'(t)$ se lo denomina vector tangente a C en el punto $\alpha(t)$. Además, a la recta $L(\alpha(t); \alpha'(t))$ se la llama recta tangente a C en $\alpha(t)$.

DEFINICIÓN 14: Parametrizaciones equivalentes

Dadas dos trayectorias $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$ y $\beta\colon J \to \mathbb{R}^m$, se dice que α y β son equivalente si existe una función $u\colon I \to J$ sobreyectiva y derivable, con derivada distinta de 0 en todo punto de I tal que

$$\alpha(t) = \beta(u(t))$$

para todo $t \in I$. A u se la denomina un cambio de parámetro.

PROPOSICIÓN 13. Un cambio de parámetro envía los extremos del intervalo en los extremos del otro.

PROPOSICIÓN 14. Dadas dos trayectorias $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$ y $\beta\colon J \to \mathbb{R}^m$ equivalentes, se tiene que

$$\operatorname{img}(\alpha) = \operatorname{img}(\beta).$$

Se dice que una propiedad de una curva es invariante bajo cambio de parámetro si la propiedad se mantiene para parametrizaciones equivalentes de la curva.

PROPOSICIÓN 15. Dada un curva C, la recta tangente en uno de sus puntos es invariante bajo cambio de parámetro.

1. Aplicaciones al movimiento

En las secciones siguientes, consideraremos una curva C, parametrizada por la función $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$, la cual supondremos se puede derivar cuantas veces sea preciso y que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definición 1

Si consideramos que α describe el movimiento de una partícula por la curva C, tenemos que, para todo $t \in I$,

- *$\alpha(t)$ es la posición de la partícula en el tiempo t.*
- *$\alpha'(t)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo t; se la denotará por $v_\alpha(t)$.*
- *$\|\alpha'(t)\|$ es la rapidez de la partícula en el tiempo t; se la denotará por $\rho_\alpha(t)$.*
- *$\alpha''(t)$ es la aceleración de la partícula en el tiempo t; se la denotará por $a_\alpha(t)$.*

Definición 2: Movimiento rectilíneo

Un movimiento se dice rectilíneo si la posición tiene la forma

$$\alpha(t) = a + u(t)b,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $u\colon I \to \mathbb{R}$ es una función continua.

Definición 3: Movimiento circular

Un movimiento se dice circular si la posición tiene la forma

$$\alpha(t) = a\cos(u(t))\mathbf{i} + a\,\mathrm{sen}(u(t))\mathbf{j},$$

donde $a > 0$ y $u\colon I \to \mathbb{R}$ es una función continua.

DEFINICIÓN 4: Movimiento planar

Un movimiento se dice planar si su vector posición pertenece al mismo plano, para todo t.

2. VECTORES Y PLANOS ASOCIADOS

En esta sección consideraremos $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, dos veces derivable tal que $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 5: Vector unitario tangente

Se define el vector unitario tangente por

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 6: Vector normal principal

Si $T'_\alpha(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, se define el vector normal principal por

$$N_\alpha(t) = \frac{T'_\alpha(t)}{\|T'_\alpha(t)\|},$$

para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 7: Vector binormal principal

Si $T'_\alpha(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, se define el vector binormal principal por

$$B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t),$$

para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 8: Plano osculador

El plano

$$P(\alpha(t); T_\alpha(t), N_\alpha(t))$$

se lo denomina plano osculador de la trayectoria en el punto $\alpha(t)$.

DEFINICIÓN 9: Plano normal

El plano

$$P(\alpha(t); B_\alpha(t), N_\alpha(t))$$

se lo denomina plano normal de la trayectoria en el punto $\alpha(t)$.

DEFINICIÓN 10: Plano rectificante

El plano

$$P(\alpha(t); T_\alpha(t), B_\alpha(t))$$

se lo denomina plano rectificante de la trayectoria en el punto $\alpha(t)$.

PROPOSICIÓN 1. El vector aceleración en el tiempo t es una combinación lineal de los vectores $T_\alpha(t)$ y $T'_\alpha(t)$ para todo $t \in I$, además

$$a_\alpha(t) = \rho'_\alpha(t) T_\alpha(t) + \rho_\alpha(t) T'_\alpha(t).$$

En las definiciones anteriores, si no existe ambigüedad en cuando a la parametrización de la curva C, se omitirá el uso del subíndice α.

3. LONGITUD DE ARCO Y CURVATURA

DEFINICIÓN 11: Longitud de arco

Si $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$*, la longitud de arco de la curva* C *está dada por*

$$\ell(C) = \int_a^b \rho_\alpha(t)dt.$$

PROPOSICIÓN 2. La longitud de arco es invariante bajo cambio de parámetro.

En esta sección consideraremos $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, dos veces derivable, con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 12: Curvatura

El vector curvatura se define por

$$K_\alpha(t) = \frac{1}{\rho_\alpha(t)} T'_\alpha(t),$$

para todo $t \in I$, además, la curvatura se define por

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|T'_\alpha(t)\|}{\rho_\alpha(t)},$$

para todo $t \in I$.

PROPOSICIÓN 3. La curvatura es invariante bajo cambio de parámetro.

PROPOSICIÓN 4. Se tiene que

$$a_\alpha(t) = \rho'_\alpha(t) T_\alpha(t) + \kappa_\alpha(t) \rho^2_\alpha(t) N_\alpha(t),$$

para todo $t \in I$, además,

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|a_\alpha(t) \times v_\alpha(t)\|}{\rho^3_\alpha(t)}$$

para todo $t \in I$.

DEFINICIÓN 13: Torsión

La torsión se define por

$$\tau_\alpha(t) = \frac{v_\alpha(t) \cdot (a_\alpha(t) \times a'_\alpha(t))}{\|v_\alpha(t) \times a_\alpha(t)\|^2},$$

para todo $t \in I$.

PROPOSICIÓN 5. La torsión es invariante bajo cambio de parámetro.

4. TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$

En este capítulo consideraremos $n > 1$.

Definición 14

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se define la bola abierta de centro x_0 y radio r como el conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

Definición 15: Conjunto abierto y cerrado

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que es abierto si para todo $x \in A$, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Por otro lado, se dice que A es cerrado si A^c es abierto.

Definición 16: Clausura y frontera

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se define la clausura de A por

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall r > 0)(B(x, r) \cap A \neq \varnothing)\};$$

el derivado de A por

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall r > 0)((B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing)\};$$

la frontera de A por

$$\delta(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall r > 0)(B(x, r) \cap A \neq \varnothing \ \wedge \ B(x, r) \cap A^c \neq \varnothing)\};$$

y el interior de A por

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : (\exists r > 0)(B(x, r) \subseteq A)\}.$$

Definición 17: Conjunto acotado

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que A es cotado si existe $R > 0$ tal que

$$\|x\| < R,$$

para todo $x \in A$.

En esta sección consideraremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo.

1. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE CAMPOS ESCALARES

DEFINICIÓN 1: Límite

Dados un campo escalar $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega'$ y $L \in \mathbb{R}^n$, se dice que L es el límite de f cuando x tiende a a si: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$,

$$0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Esto se denota por

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

PROPOSICIÓN 1. El límite de una función es único.

DEFINICIÓN 2: Límite infinito

Dados un campo escalar $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y $a \in \Omega'$, se dice que el límite de f cuando x tiende a a es $+\infty$ (resp. $-\infty$) si: para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$,

$$0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

(resp.

$$0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow f(x) < -M).$$

Esto se denota por

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

(resp.

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty).$$

DEFINICIÓN 3: Límite iterado

En $\mathbb{R}^2$*, sean* $f\colon \Omega = I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ *un campo escalar, con* $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$*, y* $a = (a_1, a_2) \in \Omega'$*. Para* $x \neq a_1$*, se define la función:*

$$\begin{aligned} f_x\colon\ I_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f(x,y). \end{aligned}$$

Si para cada $x \in I_1$*, con* $x \neq a_1$ *existe*

$$\lim_{y \to a_2} f_x(y),$$

entonces se define

$$\begin{aligned} g\colon\ I_1 \setminus \{a_1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lim_{y \to a_2} f_x(y). \end{aligned}$$

Finalmente, si existe

$$\lim_{x \to a_1} g(x),$$

entonces, se dice que existe el límite iterado, denotado por $\lim\limits_{x \to a_1} \lim\limits_{y \to a_2} f(x,y)$*, y se define por*

$$\lim_{x \to a_1} \lim_{y \to a_2} f(x,y) = \lim_{x \to a_1} g(x) = \lim_{x \to a_1} \left(\lim_{y \to a_2} f_x(y) \right).$$

PROPOSICIÓN 2. En $\mathbb{R}^2$, sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a = (a_1, a_2) \in \Omega'$, si existen

$$\lim_{(x,y) \to a} f(x,y), \qquad \lim_{x \to a_1} \lim_{y \to a_2} f(x,y) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y \to a_2} \lim_{x \to a_1} f(x,y),$$

entonces todos estos son iguales.

DEFINICIÓN 4: Límite por trayectorias

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo escalar,* $a \in \Omega'$*,* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ *una trayectoria inyectiva tal que existe* $t_0 \in I$ *que cumple* $\alpha(t_0) = a$*. Se define el límite de* f *cuando* x *tiende a* a*, por la trayectoria* α*, mediante*

$$\lim_{t \to t_0} f(\alpha(t)),$$

siempre que este exista.

PROPOSICIÓN 3. Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega'$, si existe

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

entonces existe el límite por cualquier trayectoria y es igual a L.

PROPOSICIÓN 4. Sean $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares y $a \in \Omega'$. Si existen

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

entonces

- $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to a} (f(x)g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$;
- $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, siempre que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$;
- $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|$.

PROPOSICIÓN 5. Sean $f, g, h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares y $a \in \Omega'$. Si

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo $x \in \Omega \setminus \{a\}$ y si existen

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

DEFINICIÓN 5: Continuidad

Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$, se dice que f es continua en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Se dice que f es continua en Ω si f es continua en cada punto de Ω.

PROPOSICIÓN 6. Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$, se tiene que f es continua en a si y solo si: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$\|x - a\| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

TEOREMA 7: Cambio de variable

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *y sean* $f\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $g\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^n$ *tales que* $\operatorname{img}(g) \subseteq \Omega_1$ *y* $a \in \Omega_2'$. *Si:*

1. *existen* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ *y* $\lim\limits_{y\to b} f(y)$*; y*
2. *se satisfacen una de las tres condiciones siguientes:*
   a) *la función* f *es continua en* b*;*
   b) *la función* f *no está definida en* b*, es decir,* $b \notin \Omega_1$*;*
   c) *existe una bola* $B(a,r)$ *tal que*
   $$g(x) \neq b$$
   para todo $x \in B(a,r) \setminus \{a\}$.

Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Para calcular el límite de una composición como la siguiente

$$\lim_{x\to a} f(g(x)),$$

se puede usar el *cambio de variable*

$$y = g(x)$$

siempre que se cumplan las condiciones de teorema anterior, de esta forma, se tendría

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y)$$

Esto se denomina *método del cambio de variable*.

PROPOSICIÓN 8. Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo con Ω un conjunto cerrado y acotado, se tiene que f alcanza su mínimo y su máximo en Ω.

1. DIFERENCIABILIDAD

En esta sección, consideraremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ como un conjunto abierto.

DEFINICIÓN 1: Derivada respecto a un vector

Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, $a \in \Omega$ y $y \in \mathbb{R}^n$, la derivada de f en a respecto a y se define por

$$f'(a;y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hy)-f(a)}{h},$$

siempre que el límite exista.

PROPOSICIÓN 1. Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, $a \in \Omega$ y $y \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\begin{aligned} g\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto g(t) = f(a+ty). \end{aligned}$$

Si, para todo $t \in I$, existe

$$g'(t) \qquad \text{o} \qquad f'(a+ty;y)$$

entonces la otra también existe y

$$g'(t) = f'(a+ty;y).$$

En particular se tiene que

$$g'(0) = f'(a;y).$$

TEOREMA 2: Valor medio

Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, $a \in \Omega$ y $y \in \mathbb{R}^n$. Si $f'(a+ty;y)$ existe para todo $t \in [0,1]$, entonces existe $\zeta \in (0,1)$ tal que

$$f(a+y) - f(a) = f'(a+\zeta y;y).$$

DEFINICIÓN 2: Derivadas direccionales y parciales

Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, $a \in \Omega$ y $y \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. A $f'(a;y)$ se la llama la derivada de f en a en la dirección de y. Además, si se trata de un vector de la base canónica e^k, se lo llama la k-ésima derivada parcial de f en a y se la denota por

$$D_k f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = f'(a;e^k).$$

DEFINICIÓN 3: Campo escalar derivable y Vector gradiente

Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Si existe la derivada de f en cualquier dirección, se define el vector gradiente de f en a por

$$\begin{aligned}\nabla f(a) &= (D_1 f(a), D_2 f(a), \ldots, D_n f(a))\\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 3. Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Si existe el gradiente de f en a, entonces

$$f'(a;y) = \nabla f(a) \cdot y,$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSICIÓN 4. Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Si existe el gradiente de f en a tal que $\nabla f(a) \neq 0$, entonces el mayor valor de $f'(a;y)$, con $\|y\| = 1$, se lo alcanza en $\dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ y su valor es

$$f'\left(a; \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\right) = \|\nabla f(a)\|.$$

La existencia de todas la derivadas direccionales no implica la continuidad del campo escalar. Es decir, que un campo escalar tenga gradiente no implica que sea continua.

DEFINICIÓN 4: Campo escalar diferenciable en un punto

Dados $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$, se dice que f es diferenciable en a si existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = 0.$$

A la aplicación T se la llama el diferencial de f en a y se lo denota por

$$f'(a) \qquad \text{o} \qquad Df(a).$$

PROPOSICIÓN 5. Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Si f es diferenciable en a, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ que cumple $\|h\| < r$, se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + \|h\| E(a,h),$$

donde $E(a,h) \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$.

PROPOSICIÓN 6. Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Si f es diferenciable en a, entonces existe su derivada con respecto a cualquier vector, además,

$$f'(a)(h) = f'(a;h)$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

Si un campo escalar es diferenciable entonces existe su gradiente.

TEOREMA 7

Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$ tales que f es diferenciable en a. Si f es diferenciable en a entonces

$$[f'(a)] = \nabla f(a)$$

es decir,

$$f'(a)(h) = \nabla f(a) \cdot h,$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 8. Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Si f es diferenciable en a, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ que cumple $\|h\| < r$, se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \|h\| E(a,h),$$

donde $E(a,h) \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$.

Teorema 9

Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Si un campo escalar tiene gradiente, no necesariamente es diferenciable.

Teorema 10: Condición suficiente de diferenciabilidad

Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Si existen las derivadas parciales de f en una bola de centro en a y estas son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.

A un campo escalar que cumpla las hipótesis del teorema anterior se le llama diferenciable con continuidad.

Teorema 11: Regla de la cadena

Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria tal que $\operatorname{img}(\alpha) \subseteq \Omega$ y $t \in I$. Si α es derivable en $t \in I$ y f es diferenciable en $\alpha(t) \in \Omega$, entonces $f \circ \alpha$ es derivable en t y se tiene que

$$(f \circ \alpha)'(t) = \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Proposición 12. En $\mathbb{R}^2$, sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y C una de sus curvas de nivel. Se tiene que

- El gradiente de f es normal a C.
- La derivada direccional de f a lo largo de C es 0.

- La derivada direccional de f tiene su valor máximo en la dirección normal a C.

PROPOSICIÓN 13. Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y C uno de sus conjuntos de nivel. Se tiene que

- El gradiente de f es normal a toda curva contenida en C.

En $\mathbb{R}^2$, si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable en $(x_0, y_0) \in \Omega$ entonces la ecuación del plano tangente a f en el punto (x_0, y_0) es

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$$

para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2. CÁLCULO DIFERENCIAL DE CAMPOS VECTORIALES

En esta sección asumiremos que $n, m > 1$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 5: Límite

Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega'$, el límite de F cuando x tiende a a es

$$\lim_{x\to a} F(x) = \left(\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x), \ldots, \lim_{x\to a} f_m(x)\right)$$

siempre que los límites de la derecha existan.

DEFINICIÓN 6: Continuidad

Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$, se dice que F es continua en a si

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a).$$

Se dice que F es continua en D si F es continua en cada punto de D.

PROPOSICIÓN 14. Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega'$, se tiene que

$$\lim_{x\to a} F(x) = L.$$

Si y solo si: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|F(x) - L\| < \epsilon.$$

PROPOSICIÓN 15. Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$, se tiene que F es continua en a si y solo si: para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \Omega$ se tiene que

$$\|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|F(x) - F(a)\| < \epsilon.$$

De aquí en adelante, se supone que Ω es un conjunto abierto.

DEFINICIÓN 7: Derivada respecto a un vector

Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial, $a \in \Omega$ y $y \in \mathbb{R}^n$, la derivada de F en a respecto a y se define por

$$F'(a;y) = \left(f_1'(a;y), f_2'(a;y), \ldots, f_m'(a;y)\right),$$

siempre que las derivadas de la derecha existan.

PROPOSICIÓN 16. Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial, $a \in \Omega$ y $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$F'(a;y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a + hy) - F(a)}{h},$$

siempre que el límite exista.

DEFINICIÓN 8: Derivadas direccionales y parciales

Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial, $a \in \Omega$ y $y \in \mathbb{R}^n$ un vector unitario. A $F'(a;y)$ se la llama la derivada de F en a en la dirección de y. Además, si se trata de un vector de la base canónica e^k, se lo llama la k-ésima derivada parcial de F en a y se la denota por

$$D_k F(a) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(a) = F'(a;e^k).$$

PROPOSICIÓN 17. Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$, si existe

$D_kF(a)$, entonces

$$D_kF(a) = (D_kf_1(a), D_kf_2(a), \ldots, D_kf_m(a)).$$

DEFINICIÓN 9: Matriz Jacobiana

Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$. Si existe la derivada de F en cualquier dirección, se define la matriz jacobiana de F en a por

$$J_F(a) = \begin{bmatrix} D_1f_1(a) & D_2f_1(a) & \cdots & D_nf_1(a) \\ D_1f_2(a) & D_2f_2(a) & \cdots & D_nf_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1f_m(a) & D_2f_m(a) & \cdots & D_nf_m(a) \end{bmatrix}.$$

PROPOSICIÓN 18. Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función y $a \in \Omega$. Si existe la jacobiana de F en a, entonces

$$[F'(a;y)] = J_F(a)[y],$$

para todo $y \in \mathbb{R}^n$.

La existencia de todas la derivadas direccionales no implica la continuidad del campo vectorial. Es decir, que un campo vectorial tenga jacobiana no implica que sea continuo.

DEFINICIÓN 10: Campo vectorial diferenciable en un punto

Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$, se dice que F es diferenciable en a si existe una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - T(h)}{\|h\|} = 0.$$

A la aplicación T se la llama el diferencial de F en a y se lo denota por

$$F'(a) \qquad o \qquad DF(a).$$

PROPOSICIÓN 19. Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$. Si F es diferenciable en a, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}^n$ que cumple

$\|h\| < r$, se tiene que

$$F(a+h) = F(a) + F'(a)(h) + \|h\| E(a,h),$$

donde $E(a,h) \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$.

PROPOSICIÓN 20. Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$. Si F es diferenciable en a, entonces existe su derivada con respecto a cualquier vector, además,

$$F'(a)(h) = F'(a;h)$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

Si un campo vectorial es diferenciable entonces existe su jacobiana.

TEOREMA 21

Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$. Si F es diferenciable en a entonces

$$[F'(a)] = J_F(a)$$

es decir,

$$[F'(a)(h)] = J_F(a)[h],$$

para todo $h \in \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 22

Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ un campo vectorial y $a \in \Omega$. Si F es diferenciable en a, entonces F es continuo en a.

Si un campo vectorial tiene jacobiana, no necesariamente es diferenciable.

Aquí, asumiremos $k \in \mathbb{N}^*$ y que $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^k$, $\Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos.

TEOREMA 23: Regla de la cadena

Sean $F\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^m$ y $G\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^k$ campos vectroiales tales que $\operatorname{img}(G) \subseteq \Omega_1$ y $a \in \Omega_2$. Si G es diferenciable en a y F es diferenciable en $G(a)$, entonces $F \circ G$ es derivable en a y se tiene que

$$(F \circ G)'(a) = F'(G(a)) \circ G'(a).$$

PROPOSICIÓN 24. Sean $F\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^m$ y $G\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^k$ campos vectoriales tales que $\operatorname{img}(G) \subseteq \Omega_1$ y $a \in \Omega_2$. Si G es diferenciable en a y F es diferenciable en $b = G(a)$, entonces

$$J_{F\circ G}(a) = J_F(G(a))J_G(a),$$

así, si $i = 1,\ldots,n$ y $j = 1,\ldots,m$, entonces

$$D_i(F\circ G)_j(a) = D_1 f_j(b) D_i g_1(a) + D_2 f_j(b) D_i g_2(a) + \cdots + D_k f_j(b) D_i g_k(a).$$

Bajo la proposición anterior, si tenemos $b = x(a)$ y

$$\begin{aligned} x\colon \quad \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (t_1,\ldots t_n) &\longmapsto x(t_1,\ldots,t_n), \\ y\colon \quad \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1,\ldots x_k) &\longmapsto y(x_1,\ldots,x_k) \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial (y\circ x)_j}{\partial t_i}(a) = \frac{\partial y_j}{\partial x_1}(b)\frac{\partial x_1}{\partial t_j}(a) + \frac{\partial y_j}{\partial x_2}(b)\frac{\partial x_2}{\partial t_j}(a) + \cdots + \frac{\partial y_j}{\partial x_k}(b)\frac{\partial x_k}{\partial t_j}(a).$$

1. FUNCIÓN IMPLÍCITA

En esta sección tomaremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto.

DEFINICIÓN 1

Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y $\hat{f}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ campos escalares, se dice que f está definida de manera implícita con respecto a $\hat{f}$ si para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ se tiene que

$$\hat{f}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

TEOREMA 1

Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y $\hat{f}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ campos escalares tales que f está definido de manera implícita con respecto a $\hat{f}$. Si $\hat{f}$ es diferenciable, entonces para cada $k = 1, \ldots, n$, se tiene que

$$D_k f(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{D_k \hat{f}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}{D_{n+1} \hat{f}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}$$

para todo $x_1, \ldots, x_n \in \Omega$ tal que $D_{n+1} \hat{f}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \neq 0$.

Bajo el teorema anterior, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_k))}{\dfrac{\partial \hat{f}}{\partial x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))}$$

2. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

En esta sección asumiremos que $n > 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto e $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo.

DEFINICIÓN 2: Derivadas parciales de orden superior

Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que, para $i = 1, \dots, n$, existe $D_i f(x)$ exista para todo $x \in \Omega$, para $j = 1, \dots, n$ y $a \in \Omega$, se define la derivada parcial mixta por

$$D_{j,i} f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a) = D_j(D_i f)(a).$$

TEOREMA 2

Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar tal que sus derivadas parciales mixtas existan y sean continuas en Ω, entonces

$$D_j(D_i f)(a) = D_i(D_j f)(a)$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $a \in \Omega$.

DEFINICIÓN 3: Matriz hessiana

Dado $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable con continuidad en Ω, además consideramos $\nabla f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ como un campo vectorial. Si ∇f posee matriz jacobiana en $a \in \Omega$, entonces se define la matriz hessiana de f por

$$H_f(a) = (J_{\nabla f}(a))^T = \begin{bmatrix} D_{1,1} f(a) & D_{1,2} f(a) & \cdots & D_{1,n} f(a) \\ D_{2,1} f(a) & D_{2,2} f(a) & \cdots & D_{2,n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n,1} f(a) & D_{n,2} f(a) & \cdots & D_{n,n} f(a) \end{bmatrix}.$$

La matriz hessiana puede ser entendida, de cierto modo, como el representante de la segunda derivada de la función, la cual también es una aplicación lineal.

Si un campo escalar f es diferenciable y ∇f, visto como un campo vectorial, es diferenciable, entonces se dice que f es dos veces diferenciable.

Si las derivadas parciales mixtas de una función son continuas, entonces su matriz hessiana es simétrica. En este caso, se dice que la función es dos veces diferenciable con continudad.

TEOREMA 3: Fórmula de Taylor de primer orden

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo escalar diferenciable y* $a \in \Omega$*, entonces existe* $r > 0$ *tal que para todo* $h \in \mathbb{R}^n$ *que cumple* $\|h\| < r$*, se tiene que*

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \|h\| E(a,h),$$

donde $E(a,h) \to 0$ *cuando* $h \to 0$.

PROPOSICIÓN 4 (Aproximación lineal)**.** Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable y $a \in \Omega$, entonces la función definida por

$$F(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a),$$

es una buena aproximación lineal de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - f(x)}{\|x-a\|} = 0.$$

TEOREMA 5: Fórmula de Taylor de segundo orden

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *un campo escalar dos veces diferenciable y* $a \in \Omega$*, entonces existe* $r > 0$ *tal que para todo* $h \in \mathbb{R}^n$ *que cumple* $\|h\| < r$*, se tiene que*

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2!}[h]^T Hf(a)[h] + \|h\|^2 E(a,h),$$

donde $E(a,h) \to 0$ *cuando* $h \to 0$.

PROPOSICIÓN 6 (Aproximación cuadrática)**.** Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar dos veces diferenciable y $a \in \Omega$, entonces la función definida por

$$F(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2!}[x-a]^T Hf(a)[x-a],$$

es una buena aproximación cuadrática de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - f(x)}{\|x-a\|^2} = 0.$$

3. ROTACIONAL, DIVERGENCIA Y LAPLACIANO

En adelante asumiremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

DEFINICIÓN 4: Divergencia

Dado un campo vectorial $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *diferenciable, se define la divergencia de* F *por*

$$\operatorname{div}(F)(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 5

Dados un campo vectorial $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *diferenciable y* $x \in \Omega$*, si* $\operatorname{div}(F)(x) > 0$*, se dice que* x *es una fuente, y si* $\operatorname{div}(F)(x) < 0$*, se dice que* x *es un sumidero.*

Si se tiene que

$$\operatorname{div}(f) = 0$$

se dice que f es un campo incompresible.

DEFINICIÓN 6: Rotacional en $\mathbb{R}^2$

Si $n = 2$*, dado un campo vectorial* $F\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *diferenciable, se define el rotacional de* F *por*

$$\operatorname{rot}(F)(x,y) = D_1 f_2(x,y) - D_2 f_1(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$$

para $(x,y) \in \Omega$.

DEFINICIÓN 7

Si $n = 2$*, dados un campo vectorial* $F\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *diferenciable y* $(x,y) \in \Omega$*, si*

$$\operatorname{rot}(F)(x,y) > 0,$$

se dice que el campo tiene rotación antihoraria en a*, y si*

$$\operatorname{rot}(F)(x,y) < 0,$$

se dice que el campo tiene rotación horaria en a

DEFINICIÓN 8: Rotacional en $\mathbb{R}^3$

Si $n = 3$, dado un campo vectorial $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, se define el rotacional de F por

$$\operatorname{rot}(F)(x,y,z) = \begin{pmatrix} D_2f_3(x,y,z) - D_3f_2(x,y,z) \\ D_3f_1(x,y,z) - D_1f_3(x,y,z) \\ D_1f_2(x,y,z) - D_2f_1(x,y,z) \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}^T$$

para $(x,y,z) \in \Omega$.

Si se tiene que

$$\operatorname{rot}(f) = 0$$

se dice que f es un campo irrotacional.

Se suele usar la notación

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F \qquad \text{y} \qquad \operatorname{rot}(F) = \nabla \times F.$$

PROPOSICIÓN 7. Si $n = 3$, dado $f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable, se tiene que

$$\operatorname{rot}(\nabla f)(x,y,z) = 0$$

para $(x,y,z) \in \Omega$.

PROPOSICIÓN 8. Si $n = 3$, dado $F\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable, se tiene que

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F))(x,y,z) = 0$$

para $(x,y,z) \in \Omega$.

DEFINICIÓN 9: Laplaciano

Dado un campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciable, se define el laplaciano de f por

$$\Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla f)(x) = \sum_{i=1}^{n} D_{i,i} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Se suele usar la notación

$$\Delta f = \nabla^2 f.$$

1. Campos conservativos

Definición 1

Dado un campo vectorial $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ se dice que es conservativo si existe un campo escalar $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \nabla f(x)$$

para todo $x \in \Omega$. De ser este el caso, se dice que f es un potencial de F.

Proposición 1. Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable, se tiene que si F es un campo conservativo, entonces

$$D_i F_j(x) = D_j F_i(x)$$

para todo $x \in \Omega$ y todo $i, j = 1, \ldots, n$.

Definición 2

Dada una curva cerrada con parametrización $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, se dice que puede ser deformada continuamente a un punto $c \in \mathbb{R}^n$ en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe una función

$$G\colon [a,b] \times [0,1] \to \Omega$$

tal que

$$G(t,0) = \alpha(t) \qquad y \qquad G(t,1) = c$$

para todo $t \in [a,b]$.

Se dice que un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es simplemente conexo si toda curva cerrada puede ser deformada continuamente a un punto en Ω.

La idea intuitiva para un conjunto simplemente conexo es la de un conjunto que no posee "huecos".

PROPOSICIÓN 2. Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, con $n = 2, 3$, un campo vectorial diferenciable donde Ω es simplemente conexo, se tiene que F es un campo conservativo si y solo si

$$D_i F_j(x) = D_j F_i(x)$$

para todo $x \in \Omega$ y todo $i, j = 1, \ldots, n$.

PROPOSICIÓN 3. Si $n \in \{2, 3\}$, dado $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, si se tiene que $\operatorname{rot}(F) = 0$ y Ω es simplemente conexo, entonces F es conservativo.

2. OPTIMIZACIÓN

En esta sección asumiremos que $n > 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 3: Máximos, mínimos y extremos

Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a \in \Omega$. Se dice que f tiene un máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) en a si

$$f(x) \leq f(a)$$

(resp. $f(x) \geq f(a)$) para todo $x \in \Omega$. El valor $f(a)$ se llama máximo absoluto (resp. mínimo absoluto) de f en Ω.

Se dice que f tiene un máximo relativo (resp. mínimo absoluto) en a si existe $r > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(a)$$

(resp. $f(x) \geq f(a)$) para todo $x \in B(a, r)$.

Finalmente, a un máximo relativo o a un mínimo relativo se lo llama extremo de la función.

TEOREMA 4

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en el interior de Ω. Si f tiene un extremo en $a \in \operatorname{int}(\Omega)$, entonces

$$\nabla f(a) = 0.$$

Dado un campo escalar diferenciable $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ y $a \in \operatorname{int}(D)$. Si tenemos que $\nabla f(a) = 0$ se dice que a es un punto crítico de f. Esto no necesariamente implica que f tiene un extremo de la función, de ser este el caso, se dice que f tiene un punto de ensilladura en a.

DEFINICIÓN 4

Dada una matriz simétrica $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, se dice que la matriz es:

- *definida positiva si $x^T Mx > 0$ para todo $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, $x \neq 0$;*
- *definida negativa si $x^T Mx < 0$ para todo $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}$, $x \neq 0$; e*
- *indefinida si existen $x, y \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ tales que $x^T Mx > 0$ y $y^T My < 0$.*

TEOREMA 5: Criterio de la segunda derivada

Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar dos veces diferenciable en el interior de Ω y $a \in \operatorname{int}(\Omega)$ un punto crítico de f. Se tiene que

- *si $H_f(a)$ es definida positiva, entonces f alcanza un mínimo en a;*
- *si $H_f(a)$ es definida negativa, entonces f alcanza un máximo en a; y*
- *si $H_f(a)$ es indefinida, entonces f tiene un punto de ensilladura en a.*

PROPOSICIÓN 6 (Criterio de los valores propios)**.** Dada una matriz simétrica $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, se tiene que la matriz es:

- definida positiva si y solo si todos los valores propios de la matriz son positivos;
- definida negativa si y solo si todos los valores propios de la matriz son negativos;
- indefinida si y solo si tiene valores propios positivos y negativos.

PROPOSICIÓN 7 (Criterio de Sylvester)**.** Dada una matriz simétrica $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$, se tiene que la matriz es:

- definida positiva si y solo si todos los determinantes de los menores principales de M son positivos;

- definida negativa si y solo si todos los determinantes de los menores principales impares de M son negativos y los pares son positivos;
- indefinida si y solo si el determinantes de M es diferente de 0 y los determinantes de los menores principales no siguen los patrones antes señalados.

TEOREMA 8

En $\mathbb{R}^2$, sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar dos veces diferenciable en el interior de Ω y $a \in \operatorname{int}(\Omega)$ un punto crítico de f, se tiene que

- *si* $\det(H_f(a)) > 0$ *y* $D_{1,1}f(a) > 0$*, entonces f alcanza un mínimo en a;*
- *si* $\det(H_f(a)) > 0$ *y* $D_{1,1}f(a) < 0$*, entonces f alcanza un máximo en a; y*
- *si* $\det(H_f(a)) < 0$*, entonces a es un punto de ensilladura de f.*

1. MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En esta sección consideraremos resolver el problema:

$$\begin{cases} \max f(x) \\ \text{sujeto a:} \\ \quad g(x) = c. \end{cases}$$

Donde f y g son campos escalares dos veces diferenciables y $c \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 1

Sean $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares dos veces diferenciables y $c \in \mathbb{R}$. Denotemos

$$S = L_c(g) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}.$$

Si existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

- $\nabla g(a) \neq 0$ y
- f tiene un extremo para S en a,

entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

Así, para resolver el problema antes mencionado, empezamos definiendo

$$L(\lambda, x) = f(x) - \lambda(g(x) - c)$$

y procedemos a buscar los puntos críticos de manera usual. A esta función se la llama el Lagrangiano del problema.

TEOREMA 2

Sean $f, g_1, \dots, g_m \colon \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares dos veces diferenciables, y $c \in \mathbb{R}^m$. Denotemos

$$S = L_c(g) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = c_1 \wedge \cdots \wedge g_m(x) = c_m\}.$$

Si existe $a \in \mathbb{R}^n$ tal que

- $\nabla g_i(a) \neq 0$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$, y
- f tiene un extremo para S en a,

entonces existe un $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(a).$$

TEOREMA 3

Sean $f, g_1, \ldots, g_m \colon \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares dos veces diferenciables, y $c \in \mathbb{R}^m$. Denotemos

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) = c_1 \wedge \cdots \wedge g_m(x) = c_m\}.$$

si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, a) \in \mathbb{R}^{m+n}$ es un punto crítico de L definida por

$$L(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x) = f(x) - \lambda_1(g_1(x) - c_1) - \cdots - \lambda_m(g_m(x) - c_m),$$

entonces, definiendo por H_k a las menores principales de $H_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, a)$ y la siguiente secuencia

$$(-1)^m \det(H_{2m+1}), \qquad (-1)^m \det(H_{2m+2}), \qquad \ldots, \qquad (-1)^m \det(H_{m+n}),$$

tenemos el siguiente criterio:

- Si la secuencia anterior consta solo de números positivos, entonces f tiene un mínimo para S en a.
- Si la secuencia anterior empieza con un número negativo y luego se alternan los signos, entonces f tiene un máximo para S en a.
- Si no se tiene ningún caso anterior, pero $\det(H_L(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, a)) \neq 0$, entonces f tiene un punto silla para S en a.

TEOREMA 4

En $\mathbb{R}^2$, sean $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares dos veces diferenciables, y $c \in \mathbb{R}$. Denotemos

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = c\}.$$

si $(\lambda, a) \in \mathbb{R}^3$ es un punto crítico de L definida por

$$L(\lambda, x) = f(x) - \lambda(g(x) - c),$$

entonces tenemos el siguiente criterio:

- Si $\det(H_L(\lambda, a)) < 0$, entonces f tiene un mínimo para S en a.
- Si $\det(H_L(\lambda, a)) > 0$, entonces f tiene un máximo para S en a.

1. OPTIMIZACIÓN

Resolver un problema de optimización significará determinar los valores extremos de una función y los puntos donde los alcanza.
Si la función representa una determinada situación, el proceso de obtención de esa función a partir de la situación se conoce con el nombre de *modelización* o *modelamiento*. En este proceso, es importante enfatizar en la definición de la función (dominio, recorrido y regla de asignación).
Se pueden destacar cuatro elementos de importancia en la optimización que son

- Identificación de variables a utilizar.
- Planteamiento del problema, es decir, la definición de la función o funciones a emplearse.
- Optimizar las funciones correspondientes.
- Planteamiento de la respuesta.

EJERCICIO 1. Se tiene material para elaborar 150π cm^2 de láminas de aluminio. Si se desea construir un recipiente cilíndrico, determinar sus dimensiones para que su volumen sea máximo.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- r: radio del cilindro en cm.
- h: altura del cilindro en cm.
- $V(r,h)$: volumen del cilindro de radio r y altura h, en cm^3.
- $A(r,h)$: material utilizado en un cilindro de radio r y altura h, en cm^2.

Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} V: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,h) &\longmapsto V(r,h) = \pi r^2 h \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} A\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,h) &\longmapsto A(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Con esto, debemos optimizar

$$\begin{cases} \text{máx}\, V(r,h) \\ \text{sujeto a:} \\ \quad A(r,h) = 150\pi. \end{cases}$$

Luego del proceso de optimización, se tiene que las dimensiones para que el volumen sea máximo son 5 cm de radio y 10 cm de altura. □

2. Función inversa y Método de Newton

En esta sección tomaremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto.

Teorema 1

Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable y $a \in \Omega$. Si

$$\det(J_F(a)) \neq 0$$

entonces existe un conjunto abierto $U \subseteq \Omega$ que contiene a a tal que

$$F|_U\colon U \to F(U)$$

es biyectiva.

Definición 1: Método de Newton

Sea $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial dos veces diferenciable. Supongamos que existe $c \in \Omega$ tal que

$$F(c) = 0.$$

Se tiene que, bajo las hipótesis adecuadas, existe un conjunto abierto $U \subseteq \Omega$ que contiene a c tal que para cualquier $x_0 \in U$, la sucesión (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n - [J_F(x_n)]^{-1} F(x_n)$$

para $n \in \mathbb{N}$, toma valores cercanos a c a medida que n toma valores "suficientemente grandes".

3. Integrales dobles

En esta sección asumiremos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ y $c < d$ y definimos

$$R = [a, b] \times [c, d],$$

al cual llamaremos un rectángulo.

Definición 2

Dado un rectángulo R, una partición de orden n es un conjunto

$$P = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 : i = 0, \ldots, n\},$$

donde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \qquad \text{y} \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

- A los conjuntos
$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$
con $i, j = 1, \ldots, n$, se los llama subrectángulos de la partición.

- A las cantidades
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \text{y} \qquad \Delta y_i = y_i - y_{i-1},$$
con $i, j = 1, \ldots, n$, se las llama el ancho y el alto del subrectángulo, respectivamente.

- A la cantidad
$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j,$$
con $i, j = 1, \ldots, n$, se la llama área del subrectángulo.

- A un conjunto
$$C = \{c^{ij} \in \mathbb{R}^2 : c^{ij} \in R_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n\},$$
se lo llama conjunto de etiquetas para P.

- Al par (P,C) se lo llama una partición etiquetada de R.
- A la cantidad
$$|P| = \max_{i=1,\dots,n} \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$$
se la llama grosor de la partición.

DEFINICIÓN 3

Sean $f\colon R \to \mathbb{R}$ un campo escalar y (P,C) un partición etiquetada de R, entonces
$$S(f,P,C) = \sum_{i,j=1}^{n} f(c^{ij})\Delta A_{ij}$$
es la suma de Riemann de f respecto a la partición etiquetada (P,C).

DEFINICIÓN 4

Sea $f\colon R \to \mathbb{R}$ un campo escalar, se define la integral doble de f por
$$\iint_R f\,dA = \iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{|P|\to 0} S(f,P,C) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i,j=1}^{n} f(c^{ij})\Delta A_{ij},$$
siempre que el límite exista (el limite se toma sobre todas las particiones etiquetadas). Si el límite existe, se dice que la función es integrable.

PROPOSICIÓN 2. Sea $f\colon R \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si f es continua, entonces es integrable.

PROPOSICIÓN 3. Sea $f\colon R \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si f es acotada y si el conjunto de discontinuidades de f tiene área cero, entonces
$$\iint_R f\,dA$$
existe.

TEOREMA 4: Teorema de Fubini

Sea $f\colon R \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Supongamos que f es acotada y que S, el conjunto de discontinuidades de f, tiene área cero. Si cada recta paralela a los ejes de coordenadas interseca a S en una cantidad finita de puntos, entonces

$$\iint_R f\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

PROPOSICIÓN 5. Sean $f, g\colon R \to \mathbb{R}$ campos escalares integrables. Se tienen las siguientes propiedades:

- $f + g$ es integrable y
$$\iint_R (f+g)\,dA = \iint_R f\,dA + \iint_R g\,dA.$$
- cf es integrable, donde $c \in \mathbb{R}$ es cualquier constante, y
$$\iint_R cf\,dA = c \iint_R f\,dA.$$
- Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in R$, entonces
$$\iint_R f\,dA \leq \iint_R g\,dA.$$
- $|f|$ es integrable y
$$\left| \iint_R f\,dA \right| \leq \iint_R |f|\,dA.$$

A partir de aquí, tomaremos a Ω como un subconjunto cerrado de R.

Definición 1

Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Definimos la extensión de f a R por

$$f^{\text{ext}}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in \Omega, \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin \Omega, \end{cases}$$

para $(x,y) \in R$.

Definición 2

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, donde Ω es una región elemental, si R es cualquier rectángulo que contiene a Ω, definimos

$$\iint_\Omega f\,dA = \iint f^{\text{ext}}\,dA.$$

Definición 3

Se dice que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es una región elemental si puede ser descrita como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de alguna de las siguientes maneras:

- **Región de tipo I:** si

  $$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \gamma(x) \leq y \leq \delta(x),\, a \leq x \leq b\},$$

  donde $\gamma, \delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

- **Región de tipo II:** si

  $$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \alpha(y) \leq x \leq \beta(y),\, c \leq y \leq d\},$$

  donde $\alpha, \beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas.

- **Región de tipo III:** si Ω es de tipo 1 y de tipo 2.

TEOREMA 1

Sean Ω una región elemental en $\mathbb{R}^2$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo.

- Si Ω es te tipo I, entonces

$$\iint_\Omega f\,dA = \int_a^b \left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

- Si Ω es de tipo II, entonces

$$\iint_\Omega f\,dA = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

1. CAMBIO DE VARIABLE DE INTEGRALES DOBLES

Sea

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longmapsto T(u,v) \end{aligned}$$

una aplicación lineal con representante

$$[T] = A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tal que $\det(A) \neq 0$. Entonces la función es biyectiva, envía paralelogramos en paralelogramos y vértices de paralelogramos en vértices de paralelogramos. Además, si Ω^* es un paralelogramo, entonces $\Omega = T(\Omega^*)$ es un paralelogramo y

$$\text{Área de } \Omega = |\det(A)| \cdot (\text{Área de } \Omega^*).$$

En adelante, tomaremos la función inyectiva y diferenciable con continuidad

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longmapsto T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \end{aligned}$$

a la cual llamaremos una transformación de coordenadas.

PROPOSICIÓN 2. Sean Ω y Ω^* regiones elementales de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación de coordenadas tal que $T(\Omega^*) = \Omega$. Si

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\, dxdy = \iint_{\Omega^*} f(T(u,v))|\det(J_T(u,v))|\, dudv.$$

Si

$$\begin{array}{rrcl} T\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u,v) & \longmapsto & T(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \end{array}$$

es una transformación de coordenadas biyectiva, entonces

$$\begin{array}{rrcl} T^{-1}\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T^{-1}(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \end{array}$$

también es una transformación de coordenadas, además

$$\det(J_{T^{-1}}(x,y)) = \frac{1}{\det(J_T(u,v))},$$

con $(x,y) = T(u,v)$.

2. Integrales triples

En esta sección asumiremos $a, b, c, d, p, q \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, $c < d$ y $p < q$ y definimos

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$$

al cual llamaremos un bloque.

Definición 4

Dado un bloque B, una partición de orden n es un conjunto

$$P = \{(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3 : i = 0, \dots, n\},$$

donde

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

y

$$p = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = q$$

- A los conjuntos

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k],$$

con $i, j, k = 1, \ldots, n$, se los llama subbloques de la partición.

- A las cantidades

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \Delta y_j = y_j - y_{j-1} \qquad \text{y} \qquad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

con $i, j, k = 1, \ldots, n$, se las llama el ancho, el alto y la profundidad del subbloque, respectivamente.

- A la cantidad

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

con $i, j, k = 1, \ldots, n$, se la llama volumen del subbloque.

- A un conjunto

$$C = \{c^{ijk} \in \mathbb{R}^3 : c^{ijk} \in B_{ijk},\ i, j = 1, \ldots, n\},$$

se lo llama conjunto de etiquetas para P.

- Al par (P, C) se lo llama una partición etiquetada de B.

- A la cantidad

$$|P| = \max_{i=1,\ldots,n} \{\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i\}$$

se la llama grosor de la partición.

DEFINICIÓN 5

Sean $f\colon B \to \mathbb{R}$ un campo escalar y (P, C) una partición etiquetada de B, entonces

$$S(f, P, C) = \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c^{ijk}) \Delta V_{ijk}$$

es la suma de Riemann de f respecto a la partición etiquetada (P, C).

Definición 6

Sea $f\colon B \to \mathbb{R}$ un campo escalar, se define la integral triple de f por

$$\iiint_B f\,dV = \iiint_B f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{|P|\to 0} S(f,P,C) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i,j,k=1}^{n} f(c^{ijk})\Delta V_{ijk},$$

siempre que el límite exista (el limite se toma sobre todas las particiones etiquetadas). Si el límite existe, se dice que la función es integrable.

Proposición 3. Sea $f\colon B \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si f es continua, entonces es integrable.

Proposición 4. Sea $f\colon B \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si f es acotada y si el conjunto de discontinuidades de f tiene volumen cero, entonces

$$\iiint_B f\,dV$$

existe.

Teorema 5

Sea $f\colon B \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Supongamos que f es acotada y que S, el conjunto de discontinuidades de f, tiene volumen cero. Si cada recta paralela a los ejes de coordenadas interseca a S en una cantidad finita de puntos, entonces

$$\begin{aligned}
\iiint_B f\,dV &= \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_p^q f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_p^q \left(\int_c^d f(x,y,z)\,dy \right) dz \right) dx \\
&= \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_p^q f(x,y,z)\,dz \right) dx \right) dy \\
&= \int_c^d \left(\int_p^q \left(\int_a^b f(x,y,z)\,dx \right) dz \right) dy \\
&= \int_p^q \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)\,dy \right) dx \right) dz \\
&= \int_p^q \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz.
\end{aligned}$$

DEFINICIÓN 7

Se dice que W es una región elemental en el espacio si puede ser descrita como un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de alguna de las siguientes maneras:

- **Región de tipo I:** si
  (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), \gamma(x) \leq y \leq \delta(x), a \leq x \leq b\}$, o
  (b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c \leq y \leq d\}$.
- **Región de tipo II:** si
  (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z), \gamma(z) \leq y \leq \delta(z), p \leq z \leq q\}$, o
  (b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(y,z) \leq x \leq \beta(y,z), \varphi(y) \leq z \leq \psi(y), c \leq y \leq d\}$.
- **Región de tipo III:** si
  (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \gamma(x,z) \leq y \leq \delta(x,z), \alpha(z) \leq x \leq \beta(z), p \leq z \leq q\}$, o
  (b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \gamma(x,z) \leq y \leq \delta(x,z), \varphi(x) \leq z \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$.
- **Región de tipo IV:** si D es de tipo 1, 2 y 3.

A partir de aquí, tomaremos a D como un subconjunto cerrado de B.

DEFINICIÓN 8

Sean $f\colon D \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Definimos la extensión de f a B por

$$f^{\text{ext}}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in D, \\ 0 & \text{si } (x,y,z) \notin D, \end{cases}$$

para $(x,y,z) \in B$.

DEFINICIÓN 9

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, donde Ω es una región elemental, si B es cualquier bloque que contiene a Ω, definimos

$$\iiint_{\Omega} f\,dV = \iiint f^{\text{ext}}\,dV.$$

PROPOSICIÓN 6. Sea Ω una región elemental en $\mathbb{R}^3$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua.

- Si Ω es de tipo I, entonces

$$\iiint_{\Omega} f\,dV = \int_a^b \left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx,$$

o

$$\iiint_{\Omega} f\,dV = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx \right) dy.$$

- Si Ω es de tipo II, entonces

$$\iiint_{\Omega} f\,dV = \int_p^q \left(\int_{\gamma(z)}^{\delta(z)} \left(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dy \right) dz,$$

o

$$\iiint_{\Omega} f\,dV = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(\int_{\alpha(y,z)}^{\beta(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dz \right) dy.$$

- Si Ω es de tipo III, entonces

$$\iiint_{\Omega} f\,dV = \int_p^q \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} \left(\int_{\gamma(x,z)}^{\delta(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dx \right) dz,$$

o

$$\iiint_{\Omega} f\,dV = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\gamma(x,z)}^{\delta(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dz \right) dx.$$

3. CAMBIO DE VARIABLE PARA INTEGRALES TRIPLES

En adelante, tomaremos la función inyectiva y diferenciable con continuidad

$$\begin{array}{rccl} T\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v,w) & \longmapsto & T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \end{array}.$$

a la cual llamaremos una transformación de coordenadas del espacio uvw al plano xyx.

PROPOSICIÓN 7. Sean Ω y Ω^* regiones elementales de $\mathbb{R}^3$. Supongamos que $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación de coordenadas tal que $T(\Omega^*) = \Omega$. Si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f(T(u,v,w))\,|\det(J_T(u,v,w))|\,dudvdw.$$

1. APLICACIONES

Dada una región elemental Ω de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\iint_\Omega 1\,dxdy$$

es el área de la región Ω.

Dada una región elemental Ω de $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\iiint_\Omega 1\,dxdy$$

es el volumen de la región Ω.

DEFINICIÓN 1

Dados una región elemental Ω de $\mathbb{R}^2$ y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, se define el promedio de la función f por

$$\frac{\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy}{\iint_\Omega 1\,dxdy}$$

es el volumen de la región Ω.

Dados una región elemental Ω de $\mathbb{R}^2$ y $\delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si Ω representa una lámina y $\delta(x,y)$ representa la densidad de la lámina en el punto (x,y), entonces se tiene que el centro de masas $(\bar{x},\bar{y})$ está dado por

$$\bar{x} = \frac{\iint_\Omega x\delta(x,y)\,dxdy}{\iint_\Omega \delta(x,y)\,dxdy}$$

y

$$\bar{y} = \frac{\iint_\Omega y\delta(x,y)\,dxdy}{\iint_\Omega \delta(x,y)\,dxdy}.$$

Dados una región elemental Ω de $\mathbb{R}^3$ y $\delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si Ω representa un sólido y $\delta(x,y,z)$ representa la densidad del sólido en el punto (x,y,z), entonces se tiene que el centro de masas $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ está dado por

$$\overline{x} = \frac{\iiint_\Omega x\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \delta(x,y,z)\,dxdydz},$$

$$\overline{y} = \frac{\iiint_\Omega y\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \delta(x,y,z)\,dxdydz}$$

y

$$\overline{z} = \frac{\iiint_\Omega z\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint_\Omega \delta(x,y,z)\,dxdydz},$$

Dados una región elemental Ω de $\mathbb{R}^3$ y $\delta\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si Ω representa un sólido y $\delta(x,y,z)$ representa la densidad del sólido en el punto (x,y,z), entonces el momento de inercia con respecto al eje x está dado por

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\delta(x,y,z)\,dxdydz,$$

el momento de inercia con respecto al eje y está dado por

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\delta(x,y,z)\,dxdydz$$

y el momento de inercia con respecto al eje z está dado por

$$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\delta(x,y,z)\,dxdydz.$$

1. INTEGRALES DE LÍNEA EN CAMPOS ESCALARES

En lo siguiente consideraremos una curva C con una parametrización $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, donde α es una trayectoria derivable tal que α' es continua. Además, supondremos que Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que $C \subseteq \Omega$.

DEFINICIÓN 1: Integral de linea de campos escalares

Dado un campo escalar $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, se define la integral de linea del campo escalar f a lo largo de la trayectoria α por

$$\int_C f\,d\alpha = \lim_{|P|\to 0} f(\alpha(c_i))\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|,$$

siempre que el límite exista (el limite se toma sobre todas las particiones etiquetadas del intervalo $[a,b]$).

A esta integral también se la llama la integral del campo escalar f sobre la curva C. Otras notaciones para esta integral son:

$$\int_C f\,d\alpha = \int_\alpha f\,ds = \int_\alpha f(x,y)\,ds = \int_C f\,ds = \int_C f(x)\,ds = \int_C f(x)\,d\alpha$$

TEOREMA 1

Dado un campo escalar $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, si existe la integral de linea de f a lo largo de la trayectoria α, entonces se tiene que

$$\int_C f\,d\alpha = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|\,dt,$$

PROPOSICIÓN 2. Dados $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización equivalente de C, se tiene que

$$\int_C f\,d\alpha = \int_C f\,d\beta$$

DEFINICIÓN 2

Dada una curva C con una parametrización $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, se dice que C es una curva cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$ y se dice que es simple si es inyectiva.

Además, dada otra parametrización $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ de C que sea equivalente a α, se dice que las trayectorias preservan la orientación si $\alpha(a) = \beta(c)$ y $\alpha(b) = \beta(d)$, caso contrario se dice que invierten la orientación.

Si C es una curva cerrada se suele utilizar la notación

$$\oint_C f d\alpha = \int_C f d\alpha$$

2. INTEGRALES DE LÍNEA EN CAMPOS VECTORIALES

DEFINICIÓN 3: Integral de linea de campos vectoriales

Dado un campo vectorial $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, se define la integral de linea del campo vectorial F a lo largo de la trayectoria α por

$$\int_C F \cdot d\alpha = \lim_{|P| \to 0} F(\alpha(c_i)) \cdot (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})),$$

siempre que el límite exista (el limite se toma sobre todas las particiones etiquetadas del intervalo $[a,b]$).

A esta integral también se la llama la integral del campo vectorial F sobre la curva C. Otras notaciones para esta integral son:

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_\alpha F \cdot ds = \int_\alpha F(x) \cdot ds = \int_C F \cdot ds = \int_C F(x) \cdot ds = \int_C F(x) \cdot d\alpha$$

TEOREMA 3

Dado un campo vectorial $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$, si existe la integral de linea de F a lo largo de la trayectoria α, entonces se tiene que

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt,$$

En $\mathbb{R}^2$, si tenemos el campo vectorial $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)),$$

para todo $(x,y) \in \Omega$, donde M y N son campos escalares, se suele utilizar la notación

$$\int_C F \cdot d\alpha = \int_\alpha M\,dx + N\,dy = \int_\alpha M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

PROPOSICIÓN 4. Dados $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial y $\beta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización equivalente a α de C, se tiene que

- si α y β preservan la orientación, entonces $\int_C F \cdot d\alpha = \int_C F \cdot d\beta$; y
- si α y β invierten la orientación, entonces $\int_C F \cdot d\alpha = -\int_C F \cdot d\beta$.

Si C es una curva cerrada se suele utilizar la notación

$$\oint_C F \cdot d\alpha = \int_C F \cdot d\alpha$$

3. APLICACIONES

Dados una curva C de $\mathbb{R}^3$, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ y $\delta\colon C \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si C representa un alambre y $\delta(x,y,z)$ representa la densidad del alambre en el punto (x,y,z), entonces se tiene que el centro de masas $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ está dado por

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_C x\delta(x,y,z)\,d\alpha}{\displaystyle\int_C \delta(x,y,z)\,d\alpha},$$

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_C y\delta(x,y,z)\,d\alpha}{\displaystyle\int_C \delta(x,y,z)\,d\alpha}$$

y

$$\bar{z} = \frac{\displaystyle\int_C z\delta(x,y,z)\,d\alpha}{\displaystyle\int_C \delta(x,y,z)\,d\alpha}.$$

Dados una curva C de $\mathbb{R}^3$, $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ y $\delta\colon C \to \mathbb{R}$ un campo escalar, si C representa un alambre y $\delta(x,y,z)$ representa la densidad del alambre en el punto (x,y,z), entonces el momento de inercia con respecto al eje x está dado por

$$I_x = \int_C (y^2+z^2)\delta(x,y,z)\,d\alpha,$$

el momento de inercia con respecto al eje y está dado por

$$I_y = \int_C (x^2+z^2)\delta(x,y,z)\,d\alpha$$

y el momento de inercia con respecto al eje z está dado por

$$I_z = \int_C (x^2+y^2)\delta(x,y,z)\,d\alpha.$$

1. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

DEFINICIÓN 1: Conjuntos conexos

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que Ω es conexo (por caminos) si para todo par de puntos a y b de Ω existe una trayectoria continua α definida en un intervalo $[t_i, t_f]$ tal que $\alpha(t) \in \Omega$ para todo $t \in [t_i, t_f]$ y que $\alpha(t_i) = a$ y $\alpha(t_f) = b$.

De aquí en adelante, se supone $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto conexo por caminos.

DEFINICIÓN 2

Un campo vectorial $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ se dice que tiene integral independiente de camino si

$$\int_{C_1} F \cdot d\alpha = \int_{C_2} F \cdot d\beta$$

para todo par de trayectorias α y β que tienen los mismos puntos iniciales y finales.

PROPOSICIÓN 1. Sea $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial que tenga integral de linea independiente del camino, entonces, para toda curva cerrada C con parametrización α se tiene que

$$\oint_C F \cdot d\alpha = 0.$$

Si $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial que tiene integral de linea independiente del camino, entonces para una trayectoria α con punto inicial a y final b notaremos

$$\int_a^b F \cdot ds = \int_C F \cdot d\alpha.$$

TEOREMA 2: Primer Teorema Fundamental para Integrales de Linea

Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial que tenga integral de linea independiente del camino y $a \in \Omega$ un punto, entonces, si definimos el campo escalar

$$f(x) = \int_a^x F \cdot ds$$

para todo $x \in \Omega$, entonces f tiene gradiente y

$$\nabla f(x) = F(x)$$

para todo $x \in \Omega$, es decir, f es un potencial de F.

PROPOSICIÓN 3. Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial, se tiene que las siguientes tres proposiciones son equivalentes:

- F es un campo conservativo;
- F tiene integral de linea independiente de camino; y
- la integral de linea de f sobre toda curva cerrada es igual a 0.

TEOREMA 4: Segundo Teorema Fundamental para Integrales de Linea

Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial conservativo y $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función potencial de F. Para una trayectoria con punto inicial a y final b se tiene que

$$\int_a^b F \cdot ds = \int_a^b \nabla f \cdot ds = f(b) - f(a).$$

2. SUPERFICIES

En lo que sigue, tomaremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo.

DEFINICIÓN 3: Superficie parametrizada

Dada $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ una función, al conjunto $\Sigma = \operatorname{img}(\alpha)$ se lo llama la gráfica de α. A α se la llama una parametrización de Σ.

Si α es continua en Ω, a su gráfica se la llama la superficie descrita por α.

DEFINICIÓN 4: Curvas coordenadas

Dada una superficie Σ con parametrización $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ y $(u_0, v_0) \in \Omega$, se definen las trayectorias

$$\begin{aligned} \alpha_{v_0}\colon I_1 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u &\longmapsto \alpha_{v_0}(u) = \alpha(u, v_0) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \alpha_{u_0}\colon I_2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto \alpha_{u_0}(v) = \alpha(u_0, v), \end{aligned}$$

donde $I_1 = \{u \in \mathbb{R} : (u, v_0) \in \Omega\}$ y $I_2 = \{v \in \mathbb{R} : (u_0, v) \in \Omega\}$. A estas trayectorias se las llama curvas coordenadas de la superficie Σ en (u_0, v_0).

DEFINICIÓN 5: Vectores tangentes y normal

Dada una superficie Σ con parametrización $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ y $(u,v) \in \Omega$, se tiene que

$$T_\alpha^1(u,v) = \alpha_v'(u) = D_1\alpha(u,v) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(u,v)$$

y

$$T_\alpha^2(u,v) = \alpha_u'(v) = D_2\alpha(u,v) = \frac{\partial \alpha}{\partial v}(u,v)$$

son vectores tangentes a las curvas coordenadas en $x(u)$ y $y(v)$, respectivamente. Se los denomina vectores tangentes a la superficie en el punto $\alpha(u,v)$. Además, al vector

$$N(u,v) = T_\alpha^1(u,v) \times T_\alpha^2(u,v)$$

se lo llama vector normal estándar en el punto $\alpha(u,v)$.

Si no existe ambigüedad en cuanto a la parametrización de la superficie, se denotará por T^1, T^2, N a T_α^1, T_α^2, N_α, respectivamente.

DEFINICIÓN 6: Superficie suave

Dada una superficie Σ con parametrización $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, se dice que es suave si

$$N(u,v) \neq 0$$

para todo $(u,v) \in \Omega$.

PROPOSICIÓN 5. Dada una superficie suave Σ con parametrización $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$, se tiene que su área está dada por

$$\iint_\Omega \|N(u,v)\|\, dudv$$

1. INTEGRALES DE SUPERFICIE DE CAMPOS ESCALARES

En lo siguiente consideraremos una superficie suave Σ con una parametrización $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$.

DEFINICIÓN 1: Integral de superficie de campos escalares

Dado un campo escalar $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, se define la integral de superficie del campo escalar f sobre la superficie Σ parametrizada por α por

$$\iint_\Sigma f\, d\alpha = \lim_{|P|\to 0} f(\alpha(b_i, c_j))\|(\alpha(u_i, v_j) - \alpha(u_{i-1}, v_j)) \times (\alpha(u_i, v_j) - \alpha(u_i, v_{j-1}))\|,$$

siempre que el límite exista (el limite se toma sobre todas las particiones etiquetadas del conjunto Ω).

Otras notaciones para esta integral son:

$$\iint_\Sigma f\, d\alpha = \iint_\alpha f\, dS = \iint_\Sigma f\, dS$$

TEOREMA 1

Dado un campo escalar $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, si existe la integral de superficie de f sobre la superficie Σ parametrizada por α, entonces se tiene que

$$\iint_\Sigma f\, d\alpha = \iint_\Omega f(\alpha(u, v))\|N(u, v)\|\, dudv.$$

2. INTEGRALES DE SUPERFICIE DE CAMPOS VECTORIALES

DEFINICIÓN 2: Integral de superficie de campos vectoriales

Dado un campo vectorial $F\colon S \to \mathbb{R}^3$, se define la integral de superficie del campo vectorial F sobre la superficie Σ parametrizada por α por

$$\iint_\Sigma F\cdot d\alpha = \lim_{|P|\to 0} F(\alpha(b_i, c_j)) \cdot \big((\alpha(u_i, v_j) - \alpha(u_{i-1}, v_j)) \times (\alpha(u_i, v_j) - \alpha(u_i, v_{j-1}))\big),$$

siempre que el límite exista (el limite se toma sobre todas las particiones etiquetadas del conjunto Σ).

Otras notaciones para esta integral son:

$$\iint_{\Sigma} F \cdot d\alpha = \iint_{\alpha} F \cdot dS = \iint_{\Sigma} F \cdot dS.$$

TEOREMA 2

Dado un campo vectorial $F\colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$, si existe la integral de superficie de F obre la superficie Σ, entonces se tiene que

$$\iint_{\Sigma} F \cdot d\alpha = \iint_{\Omega} F(\alpha(u,v)) \cdot N(u,v)\, du dv.$$

3. CAMBIO DE PARÁMETRO

DEFINICIÓN 3: Parametrizaciones equivalentes

Dadas dos funciones $\alpha\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^3$ y $\beta\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$, se dice que α y β son equivalentes si existe una función $H\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ biyectiva y derivable, tal que

$$\alpha(u,v) = \beta(H(u,v))$$

para todo $(u,v) \in \Omega_1$.

PROPOSICIÓN 3. Dadas dos funciones $\alpha\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^3$ y $\beta\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$ que sean equivalentes, se tiene que

$$N_\alpha(u,v) = J_H(u,v) N_\beta(H(u,v))$$

para todo $(u,v) \in \Omega_1$.

DEFINICIÓN 4

Dadas dos funciones $\alpha\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^3$ y $\beta\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$ que sean equivalentes, se dice que

- preservan la orientación si $J_H(u,v) > 0$ para todo $(u,v) \in \Omega_1$.

- invierten la orientación si $J_H(u,v) < 0$ para todo $(u,v) \in \Omega_1$.

PROPOSICIÓN 4. Dados $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\beta\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización equivalente a α de Σ, se tiene que

$$\iint_\Sigma f\, d\alpha = \iint_\Sigma f\, d\beta$$

PROPOSICIÓN 5. Dados $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $\beta\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización equivalente a α de Σ, se tiene que

- si α y β preservan la orientación, entonces $\iint_\Sigma f \cdot d\alpha = \iint_\Sigma f \cdot d\beta$; y
- si α y β invierten la orientación, entonces $\iint_\Sigma f \cdot d\alpha = -\iint_\Sigma f \cdot d\beta$.

1. Teorema de Green

TEOREMA 1: Teorema de Green

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto cerrado, acotado y simplemente conexo tal que $\partial\Omega$ es una curva suave parametrizada por una trayectoria que recorre $\partial\Omega$ de manera antihoraria. Se tiene que

$$\iint_\Omega \operatorname{rot}(f)\, dA = \oint_{\partial\Omega} f \cdot ds.$$

Si tenemos que

$$f(x,y) = (M(x,y), N(x,y)),$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces el Teorema de Green se enuncia por

$$\iint_\Omega \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\, dxdy = \oint_{\partial\Omega} M\, dx + N\, dy.$$

2. Teorema de Gauss en el plano

TEOREMA 2: Teorema de Gauss en el plano

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto cerrado, acotado y simplemente conexo tal que ∂D es una curva suave parametrizada por una trayectoria $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ que recorre ∂D de manera antihoraria. Se define

$$n(t) = \frac{(\alpha_2'(t), -\alpha_1'(t))}{\|\alpha'(t)\|}$$

para $t \in I$. Se tiene que

$$\iint_\Omega \operatorname{div}(f)\, dA = \oint_{\partial\Omega} f \cdot n\, d\alpha.$$

3. Teorema de Stokes

Definición 1: Superficie orientable

Se dice que una superficie Σ es orientable si es posible definir un solo vector normal unitario en cada punto de Σ de modo que este sea continuo. Una vez definido el vector normal se dice que Σ es una superficie orientada.

Definición 2

Dada una superficie orientada Σ y una curva C sobre Σ se dice que la parametrización de C tiene orientación consistente con la parametrización de Σ si el vector normal de Σ sigue la regla de la mano derecha con respecto a C.

Teorema 3: Teorema de Stokes

Sea Σ una superficie orientada, acotada y suave en $\mathbb{R}^3$ tal que el borde de Σ, denotado por $\partial\Sigma$ es una curva suave, simple, cerrada y parametrizada con orientación consistente con la parametrización de Σ. Sea $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable, se tiene que

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(f) \cdot dS = \oint_{\partial\Sigma} f \cdot ds.$$

4. Teorema de Gauss

Teorema 4: Teorema de Gauss

Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^3$ tal que $\partial\Omega$ es una superficie suave, cerrada y parametrizada con orientación hacia fuera de Ω. Sea $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable, se tiene que

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(F)\, dV = \oiint_{\partial\Omega} F \cdot dS.$$

Proposición 5. Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^3$ tal que $\partial\Omega$ es una superficie suave, cerrada y parametrizada con orientación hacia fuera de Ω. Sean $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $g\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar, ambos diferenciables, se tiene que

$$\iiint_{\Omega} (F \cdot \nabla g + g\,\mathrm{div}(F))\,dV = \oiint_{\partial\Omega} gf \cdot dS.$$

PROPOSICIÓN 6 (Fórmula de Green)**.** Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^3$ tal que $\partial\Omega$ es una superficie suave, cerrada y parametrizada con orientación hacia fuera de Ω. Sean $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares dos veces diferenciables, se tiene que

$$\iiint_{\Omega} (\nabla f \cdot \nabla f + f\Delta f)\,dV = \oiint_{\partial\Omega} (f\nabla g) \cdot dS.$$

PROPOSICIÓN 7. Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^3$ tal que $\partial\Omega$ es una superficie suave, cerrada y parametrizada con orientación hacia fuera de Ω. Sean $F, G\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales dos veces diferenciables, se tiene que

$$\iiint_{\Omega} (G \cdot \mathrm{rot}(F) - F \cdot \mathrm{rot}(G))\,dV = \oiint_{\partial\Omega} F \times G \cdot dS.$$

Los anteriores se pueden ver como generalizaciones de integración por partes de la siguiente manera

$$\iiint_{\Omega} F \cdot \nabla g\,dV = \oiint_{\partial\Omega} gf \cdot dS - \iint_{\Omega} g\,\mathrm{div}(f)\,dV$$

o

$$\iiint_{\Omega} f\Delta g\,dV = \oiint_{\partial\Omega} (f\nabla g) \cdot dS - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g\,dV$$

o

$$\iiint_{\Omega} G \cdot \mathrm{rot}(G)\,dV = \oiint_{\partial\Omega} F \times G \cdot dS + \iiint_{\Omega} F \cdot \mathrm{rot}(G)\,dV.$$