Escuela Politécnica Nacional

Análisis Real • Prueba de Diagnóstico

28 de septiembre de 2015 *Mat. Andrés Merino*

1. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a, L \in \mathbb{R}$, escribe la definición de
$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$
2. Escribe la definición de supremo de un conjunto de números reales.
3. ¿Qué significa que una función sea creciente?
4. ¿Cómo se demuestra que una función es convexa?
5. Da un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tenga un punto crítico en 0, pero no sea un extremo.
6. Da un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea acotada superiormente y además sea estrictamente creciente.
7. Escribe la negación de la siguiente proposición:
$$(\forall x \in A)(x \in B \wedge x > 0).$$
8. Sea $a > 0$, demuestra que $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
9. Demuestra que la raíz de 2 es un número irracional.
10. Demostrar que el ínfimo del conjunto $(1, 5)$ es 1.

$\aleph$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • PRUEBA DE DIAGNÓSTICO

28 de septiembre de 2015 *Mat. Andrés Merino*

1. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a, L \in \mathbb{R}$, escribe la definición de
$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$
2. Escribe la definición de supremo de un conjunto de números reales.
3. ¿Qué significa que una función sea creciente?
4. ¿Cómo se demuestra que una función es convexa?
5. Da un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tenga un punto crítico en 0, pero no sea un extremo.
6. Da un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea acotada superiormente y además sea estrictamente creciente.
7. Escribe la negación de la siguiente proposición:
$$(\forall x \in A)(x \in B \wedge x > 0).$$
8. Sea $a > 0$, demuestra que $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
9. Demuestra que la raíz de 2 es un número irracional.
10. Demostrar que el ínfimo del conjunto $(1, 5)$ es 1.

ℵ

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • PRUEBA N° 2

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. A una función $g\colon A \to \mathbb{R}$ se la llama *Lipschitz continua* si existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in A$ se cumple
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$
Demostrar que si $f \in \mathbb{C}^1([a, b])$, entonces f es Lipschitz continua.

2. Sean x y y números reales positivos, demostrar que
$$\arctan(x + y) \leq \arctan(x) + \arctan(y).$$
Para esto, seguir los siguientes pasos:
   - Recordar que una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ se la llama cóncava si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0, 1]$ se cumple
$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$
   - Si una función cóncava es tal que $f(0) \geq 0$, entonces

   demostrar que toda función cóncava

   Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de números reales, L su límite y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $L > a$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > a$ para todo $n > N$. (2.5pt)

3. Sean A un subconjunto de los números reales acotado y no vacío, y $s = \sup(A)$, se define
$$B = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$
Demostrar que $\inf(B) = -s$. (2.5pt)

4. Sea A un subconjunto de los números reales, a $x \in \mathbb{R}$ se lo llama un punto de frontera si
$$(\forall \epsilon > 0)(B(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing \quad \text{y} \quad B(x, \epsilon) \cap A^c \neq \varnothing).$$
Al conjunto de todos los puntos de frontera de A se lo nota δA. Con esta definición, demostrar que A es abierto si y solo si $A \cap \delta A = \varnothing$. (2.5pt)

5. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales, se definen las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$s_n = \sup\{x_k : k \geq n\} \qquad \text{y} \qquad i_n = \inf\{x_k : k \geq n\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que estas sucesiones convergen y especificar su valor. A estos valores se los conoce como *límite superior* y *límite inferior*, respectivamente, notándolos por

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \qquad \text{y} \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Demostrar finalmente que $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$. (2.5pt)

6. Sean G y K subconjuntos de los números reales compactos y no vacíos, se define

$$G + K = \{x + y \in \mathbb{R} : x \in G \text{ y } y \in K\}.$$

Demostrar que $G + K$ es un conjunto compacto. (2.5pt)

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • PRUEBA N° 2

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. A una función $g\colon A \to \mathbb{R}$ se la llama *Lipschitz continua* si existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in A$ se cumple
$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$
Demostrar que si $f \in \mathbb{C}^1([a,b])$, entonces f es Lipschitz continua.

2. Sean x y y números reales positivos, demostrar que
$$\arctan(x+y) \leq \arctan(x) + \arctan(y).$$
Para esto, seguir los siguientes pasos:
   - Recordar que una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ se la llama cóncava si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0,1]$ se cumple
   $$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$
   - Si una función cóncava es tal que $f(0) \geq 0$, entonces

   demostrar que toda función cóncava

   Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de números reales, L su límite y $a \in \mathbb{R}$. Demostrar que si $L > a$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > a$ para todo $n > N$. (2.5pt)

3. Sean A un subconjunto de los números reales acotado y no vacío, y $s = \sup(A)$, se define
$$B = \{-x \in \mathbb{R} : x \in A\}.$$
Demostrar que $\inf(B) = -s$. (2.5pt)

4. Sea A un subconjunto de los números reales, a $x \in \mathbb{R}$ se lo llama un punto de frontera si
$$(\forall \epsilon > 0)(B(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing \quad \text{y} \quad B(x,\epsilon) \cap A^c \neq \varnothing).$$
Al conjunto de todos los puntos de frontera de A se lo nota δA. Con esta definición, demostrar que A es abierto si y solo si $A \cap \delta A = \varnothing$. (2.5pt)

5. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales, se definen las sucesiones $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$s_n = \sup\{x_k : k \geq n\} \qquad \text{y} \qquad i_n = \text{ínf}\{x_k : k \geq n\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que estas sucesiones convergen y especificar su valor. A estos valores se los conoce como *límite superior* y *límite inferior*, respectivamente, notándolos por

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \qquad \text{y} \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

Demostrar finalmente que $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. (2.5pt)

6. Sean G y K subconjuntos de los números reales compactos y no vacíos, se define

$$G + K = \{x + y \in \mathbb{R} : x \in G \text{ y } y \in K\}.$$

Demostrar que $G + K$ es un conjunto compacto. (2.5pt)

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • EXAMEN N° 2

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. A una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ se la llama *Lipschitz continua* si existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ se cumple $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Demostrar que si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, entonces f es Lipschitz continua. (1pt)

2. Sea $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que (2pt)

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^x f(t)dt,$$

para todo $x \in [0, +\infty)$, demostrar que f es la función constante 0. Sugerencia: Dada la función $g(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)dt$, calcular $g(0)$ y estudiar el signo y monotonía de la función.

3. Calcular el siguiente límite (3pt)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (nx)^{x/n} dx.$$

4. Considere la serie (4pt)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

- Hallar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia.
- Encontrar una expresión simple para la segunda derivada de f y el valor de $f(0)$ y $f'(0)$. ¿En qué intervalo está definida la segunda derivada?
- Integrando el resultado anterior, hallar una expresión para f.
- Calcular el valor de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}.$$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • EXAMEN N° 2

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. A una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ se la llama *Lipschitz continua* si existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ se cumple $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Demostrar que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, entonces f es Lipschitz continua. (1pt)

2. Sea $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que (2pt)

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^x f(t)dt,$$

para todo $x \in [0, +\infty)$, demostrar que f es la función constante 0. Sugerencia: Dada la función $g(x) = e^{-x} \int_0^x f(t)dt$, calcular $g(0)$ y estudiar el signo y monotonía de la función.

3. Calcular el siguiente límite (3pt)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (nx)^{x/n} dx.$$

4. Considere la serie (4pt)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

- Hallar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia.
- Encontrar una expresión simple para la segunda derivada de f y el valor de $f(0)$ y $f'(0)$. ¿En qué intervalo está definida la segunda derivada?
- Integrando el resultado anterior, hallar una expresión para f.
- Calcular el valor de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}.$$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • PRUEBA N° 1

NÚMEROS REALES Y SUCESIONES

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea A un subconjunto de números reales positivo acotado superiormente, sea $\alpha = \sup(A)$. Demostrar que $\sup\{x^2 : x \in A\} = \alpha^2$. (2pt)

Demostración. Supongamos que $\alpha > 0$, (el caso $\alpha = 0$ es trivial pues implicaría $A = \{0\}$). Sabemos que

a) $(\forall x \in A)(x \leq \alpha)$ y

b) $(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A)(\alpha - \epsilon < x)$.

Debemos demostrar que

P.D.1) $(\forall x \in A)(x^2 \leq \alpha^2)$ y

P.D.2) $(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A)(\alpha^2 - \epsilon < x^2)$.

Sea $x \in A$, por *a)*, se tiene que $x \leq \alpha$, además, por hipótesis $x \geq 0$, de donde

$$0 \leq x \leq \alpha,$$

lo cual implica

$$0 \leq x^2 \leq \alpha^2.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$, para $\frac{\epsilon}{2\alpha} > 0$, en *b)*, existe $x \in A$ tal que

$$\alpha - \frac{\epsilon}{2\alpha} < x,$$

es decir

$$\alpha - x < \frac{\epsilon}{2\alpha}.$$

Como $x \in A$, se tiene que $x \leq \alpha$, de donde $\alpha + x \leq 2\alpha$, por lo tanto,

$$\alpha - x < \frac{\epsilon}{\alpha + x},$$

por ende,

$$\alpha^2 - x^2 < \epsilon,$$

es decir,

$$\alpha^2 - \epsilon < x^2.$$

Por lo tanto, $\sup\{x^2 : x \in A\} = \alpha^2$. □

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, demostrar que existe una cantidad infinita de números racionales en el intervalo (a, b). (2pt)

Demostración. Por el absurdo, supongamos que existen una cantidad finita de racionales en el intervalo, es decir,

$$Q = \{r \in \mathbb{Q} : a < r < b\},$$

es finito. Dado que es finito, existe el máximo, sea $q = \text{máx}(Q)$. Puesto que $q \in (a, b)$, se tiene que

$$a < q < b.$$

Por la densidad de los números racionales, se tiene que existe un número racional p tal que

$$a < q < p < b,$$

de donde, $p \in Q$, lo cual es contradictorio ya que q era el máximo de este conjunto. Por lo tanto, el intervalo tiene una cantidad infinita de números racionales. $\square$

3. Demostrar, por la definición, que la sucesión $\left(\dfrac{n^2+n}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. (1pt)

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, para $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+n}{n^2+3} - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| &= \left|\frac{n^2+n}{n^2+3} - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| \\
&= \left|1 + \frac{n-3}{n^2+3} - 1 - \frac{m-3}{m^2+3}\right| \\
&= \left|\frac{n-3}{n^2+3} - \frac{m-3}{m^2+3}\right| \\
&\leq \left|\frac{n-3}{n^2+3}\right| + \left|\frac{m-3}{m^2+3}\right|
\end{aligned}$$

para $n, m > 3$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+n}{n^2+3} - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| &\leq \left|\frac{n-3}{n^2+3}\right| + \left|\frac{m-3}{m^2+3}\right| \\
&= \frac{n-3}{n^2+3} + \frac{m-3}{m^2+3} \\
&\leq \frac{n}{n^2} + \frac{m}{m^2} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.
\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad arquimediana para $2/\epsilon$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2}{\epsilon} < M,$$

Tomando $N = \text{máx}\{3, M\}$, se cumple, pues si $n, m > N$, entonces

$$\frac{2}{\epsilon} < m, n$$

y por lo tanto

$$\left|\frac{n^2+n}{n^2+3} - \frac{m^2+m}{m^2+3}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$ $\square$

4. Demostrar que

$$1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\cdots - 1} - 1} - 1} - 1}$$

existe, calcular su valor. (2pt)

Demostración. La expresión viene dada por la sucesión:

$$x_0 = 3 \qquad \text{y} \qquad x_n = 1 + \sqrt{x_{n-1} - 1}, \text{ para } n > 0.$$

Demostremos que la sucesión está acotada inferiormente por 2, es decir, demostraremos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 2$. Esto lo realizaremos por inducción.

a) Para $n = 0$, $x_0 = 3 > 2$.

b) Suponemos que se cumple para $n - 1$, es decir, suponemos que $x_{n-1} > 2$. Se tiene que

$$x_n = 1 + \sqrt{x_{n-1} - 1} > 1 + \sqrt{2 - 1} = 2.$$

Ahora, demostraremos que la sucesión es decreciente. Sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$x_n - 1 = \sqrt{x_{n-1} - 1},$$

es decir

$$(x_n - 1)^2 = x_{n-1} - 1.$$

Dado que $x_n - 1 > 1$, se tiene que

$$x_n - 1 < (x_n - 1)^2 = x_{n-1} - 1,$$

por lo tanto $x_n < x_{n-1}$, es decir, la sucesión es decreciente. Por lo tanto, al ser decreciente y acotada, se tiene que converge, sea x su límite. Así, tomando límites en

$$x_n = 1 + \sqrt{x_{n-1} - 1},$$

se tiene que

$$x = 1 + \sqrt{x - 1},$$

despejando, obtenemos que $x = 2$. □

5. Demostrar que si una sucesión creciente posee una subsucesión convergente, entonces la sucesión original también converge. (2pt)

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente, sea $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ su subsucesión convergente. Como $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, también es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$x_{\phi(n)} \leq M$$

para todo $n \in N$. Con esto, dado que la sucesión es creciente, para $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $m < \phi(m)$, y por lo tanto,

$$x_m \leq x_{\phi(m)} \leq M.$$

Es decir, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, además es creciente, por lo tanto, converge. □

6. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números distintos de 0 tal que converge a $L \in \mathbb{R}$, distinto de 0, demostrar que $1/x_n \to 1/L$ cuando $n \to +\infty$. (2pt)

Demostración. Revisar el libro de Bartle, página 65. □

7. Enuncie el Teoremas de Bolzano Weierstrass y el Teorema de los Intervalos Encajados de Cantor. (+1pt)

ℵ

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • PRUEBA N° 2

TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}$

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Demostrar que el conjunto de todos los números irracionales, es decir $\mathbb{Q}^c$, no es cerrado. Demostrar además que $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$. (2.5pt)

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathbb{Q}^c$ es cerrado, es decir, $\mathbb{Q}$ es abierto, por lo tanto $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Pero sabemos que $\operatorname{int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$, lo cual es contradictorio, por lo tanto, $\mathbb{Q}^c$ no es cerrado.

Por otro lado, siempre se tiene que $\overline{\mathbb{Q}^c} \subseteq \mathbb{R}$, por lo tanto, basta demostrar que $\mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{Q}^c}$. Sea $x \in \mathbb{R}$, se debe demostrar que $x \in \overline{\mathbb{Q}^c}$. Sea $\epsilon > 0$, para los números $x - \epsilon$ y $x + \epsilon$, se tiene que existe un número irracional $z \in \mathbb{Q}^c$ tal que

$$x - \epsilon < z < x + \epsilon,$$

por lo tanto, $z \in B(x, \epsilon) \cap \mathbb{Q}^c$, es decir

$$B(x, \epsilon) \cap \mathbb{Q}^c \neq \varnothing,$$

de donde, se concluye que $x \in \overline{\mathbb{Q}^c}$.

Se concluye que $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$. □

2. Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, demostrar que $\sqrt{2} \in A'$. (2.5pt)

Demostración. Recordemos que $\sup(A) = \sqrt{2}$, es decir,

a) $(\forall x \in A)(x \leq \sqrt{2})$ y

b) $(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A)(\sqrt{2} - \epsilon < x)$.

Se debe demostrar que $(\forall \epsilon > 0)((B(\sqrt{2}, \epsilon) \smallsetminus \{\sqrt{2}\}) \cap A \neq \varnothing)$.

Sea $\epsilon > 0$, por *b)*, existe $x \in A$ tal que

$$\sqrt{2} - \epsilon < x,$$

además, por *a)*, $x \leq \sqrt{2}$, de donde

$$x < \sqrt{2} + \epsilon,$$

es decir, $x \in B(\sqrt{2}, \epsilon)$. Por otro lado, ya que $x \in A$, se tiene que a es un quebrado y como $\sqrt{2}$ no es un quebrado, se tiene que $x \neq \sqrt{2}$. Con esto, se tiene quebrado

$$x \in \left(B(\sqrt{2}, \epsilon) \smallsetminus \left\{\sqrt{2}\right\}\right) \cap A,$$

es decir, $(B(\sqrt{2}, \epsilon) \smallsetminus \{\sqrt{2}\}) \cap A \neq \varnothing$, por lo tanto, $\sqrt{2} \in A'$. □

3. Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. demostrar que

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{y} \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

En general, ¿se cumple que $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$? (2.5pt)

Demostración.

a) Se tiene que

$$A \subseteq A \cup B \qquad \text{y} \qquad B \subseteq A \cup B,$$

por lo tanto
$$\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \qquad \text{y} \qquad \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B},$$
de donde
$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$
Por otro lado,
$$A \subseteq \overline{A} \qquad \text{y} \qquad B \subseteq \overline{B},$$
por lo tanto,
$$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$
Pero, como $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son cerrados, $\overline{A} \cup \overline{B}$ es un cerrado, por lo tanto
$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}.$$
Así, se concluye que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

b) Se tiene que
$$A \cap B \subseteq A \qquad \text{y} \qquad A \cap B \subseteq B,$$
por lo tanto
$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \qquad \text{y} \qquad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B},$$
de donde
$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

c) Tomemos $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{Q}^c$, se tiene quebrado
$$\overline{A} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \overline{B} = \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R},$$
por lo tanto,
$$\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}.$$
Por otro lado, $A \cap B = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \varnothing$, de donde,
$$\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing.$$
Así,
$$\overline{A} \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}.$$
□

4. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, demostrar que existe el supremo de K. Llamamos $b = \sup(K)$, demostrar también que $b \in K$. (2.5pt)

Demostración. Dado que K es compacto, se tiene que K es acotado, por lo tanto, por el Axioma de Completitud, tiene supremo.

Sea $b = \sup(K)$, sabemos que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de K, creciente, que converge a b. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de K y converge a b, entonces $b \in \overline{K}$. Pero como K es compacto, entonces es cerrado, es decir $\overline{K} = K$, por lo tanto, $b \in K$. □

5. Escribir la definición de que una serie sea condicionalmente convergente. Dar un ejemplo. (+1pt)

ℵ

Escuela Politécnica Nacional

Análisis Real • Prueba N° 3

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. A una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ se la llama *Lipschitz continua* si existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in A$ se cumple $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Demostrar que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, entonces f es Lipschitz continua.

2. Sean x y y números reales positivos, demostrar que

$$\arctan(x+y) \leq \arctan(x) + \arctan(y).$$

Para esto, seguir los siguientes pasos:

- Recordar que una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ se la llama cóncava si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0,1]$ se cumple

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

- Demostrar que si una función cóncava es tal que $f(0) \geq 0$, entonces es subaditiva.
- Concluir utilizando el criterio de la segunda derivada.

3. Sean $f \in \mathcal{C}^1[-1,1]$ tal que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, y

$$g(x) = 2x^4 + x + f(x).$$

Demostrar que existe $c \in (-1,1)$ tal que $g'(c) = 0$.

4. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, L \in \mathbb{R}$ tal que

- existe $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$,
- existe $\lim\limits_{y \to b} f(y) = L$ y
- existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq b$, para todo $x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$.

Demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = L$.

1. A una función $f: I \to \mathbb{R}$ se la llama *Lipschitz continua* si existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in A$ se cumple $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Demostrar que si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, entonces f es Lipschitz continua.

2. Sean x y y números reales positivos, demostrar que
$$\arctan(x + y) \leq \arctan(x) + \arctan(y).$$
Para esto, seguir los siguientes pasos:
   - Recordar que una función $f: I \to \mathbb{R}$ se la llama cóncava si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0, 1]$ se cumple
   $$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$
   - Demostrar que si una función cóncava es tal que $f(0) \geq 0$, entonces es subaditiva.
   - Concluir utilizando el criterio de la segunda derivada.

3. Sean $f \in \mathcal{C}^1[-1, 1]$ tal que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, y
$$g(x) = 2x^4 + x + f(x).$$
Demostrar que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $g'(c) = 0$.

4. Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, L \in \mathbb{R}$ tal que
   - existe $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$,
   - existe $\lim\limits_{y \to b} f(y) = L$ y
   - existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq b$, para todo $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$.

   Demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = L$.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • PRUEBA N° 3

INTEGRALES Y SUCESIONES DE FUNCIONES

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. A una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ se la llama *Lipschitz continua* si existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ se cumple $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Demostrar que si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es Lipschitz continua.

2. Sean $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y crecientes. Mostrar que

$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \geq \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right).$$

(Sugerencia: definir la función $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = x\int_0^x f(t)g(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right),$$

¿es h creciente? Comparar $h(0)$ y $h(1)$)

3. Calcular las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int_0^1 e^x de^{2x}$.

   b) $\displaystyle\int_0^3 x d(x + [x])$.

4. Estudie la convergencia puntual y uniforme de las siguientes funciones

   a) $f_n(x) = \cos^n(x)$, con $x \in [0, \pi]$.

   b) $g_n(x) = \dfrac{x}{2n^2x^2 + 8}$, con $x \in (0, 1]$.

ℵ

Escuela Politécnica Nacional

Análisis Real • Prueba N° 3

Integrales y Sucesiones de Funciones

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. A una función $f\colon I \to \mathbb{R}$ se la llama *Lipschitz continua* si existe $L > 0$ tal que para todo $x, y \in I$ se cumple $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Demostrar que si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es Lipschitz continua.

2. Sean $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas y crecientes. Mostrar que
$$\int_0^1 f(t)g(t)dt \geq \left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right).$$
(Sugerencia: definir la función $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que
$$h(x) = x\int_0^x f(t)g(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right),$$
¿es h creciente? Comparar $h(0)$ y $h(1)$)

3. Calcular las siguientes integrales
   a) $\displaystyle\int_0^1 e^x de^{2x}$.
   b) $\displaystyle\int_0^3 x d(x + [x])$.

4. Estudie la convergencia puntual y uniforme de las siguientes funciones
   a) $f_n(x) = \cos^n(x)$, con $x \in [0, \pi]$.
   b) $g_n(x) = \dfrac{x}{2n^2x^2 + 8}$, con $x \in (0, 1]$.

1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y acotada, demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf(A)$, donde $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que $\overline{A^c} = \operatorname{int}(A)^c$.

3. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, L \in \mathbb{R}$ tal que
   - existen $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} f(y) = L$ y
   - existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq b$, para todo $x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$.

   Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = L$.

4. Sea $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, el objetivo de este ejercicio es calcular
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\operatorname{sen}(nx)dx.$$
   - Indicar por qué no se pueden aplicar lo teoremas habituales de convergencia.
   - Utilizar integración por partes y el teorema del sánduche para calcular el límite.

5. El objetivo de este ejercicio es calcular el valor de la serie
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$
   para ello considerar la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\dfrac{(-x)^{2n-1}}{2n-1}$.
   - Hallar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia.
   - Encontrar una expresión simple para la derivada de f y el valor de $f(0)$. ¿En qué intervalo está definida la derivada?
   - Integrando el resultado anterior, hallar una expresión para f.
   - Calcular el valor de $f(1)$.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • EXAMEN SUPLETORIO

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y acotada, demostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf(A)$, donde $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, demostrar que $\overline{A^c} = \operatorname{int}(A)^c$.
3. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b, L \in \mathbb{R}$ tal que
   - existen $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, $\lim\limits_{y\to b} f(y) = L$ y
   - existe $\delta > 0$ tal que $g(x) \neq b$, para todo $x \in B(a,\delta) \smallsetminus \{a\}$.

   Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = L$.
4. Sea $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, el objetivo de este ejercicio es calcular
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\,\operatorname{sen}(nx)dx.$$
   - Indicar por qué no se pueden aplicar lo teoremas habituales de convergencia.
   - Utilizar integración por partes y el teorema del sánduche para calcular el límite.
5. El objetivo de este ejercicio es calcular el valor de la serie
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$
   para ello considerar la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\dfrac{(-x)^{2n-1}}{2n-1}$.
   - Hallar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia.
   - Encontrar una expresión simple para la derivada de f y el valor de $f(0)$. ¿En qué intervalo está definida la derivada?
   - Integrando el resultado anterior, hallar una expresión para f.
   - Calcular el valor de $f(1)$.