ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
ANÁLISIS REAL • EJERCICIOS DE REPASO
CONJUNTOS ABIERTOS

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sean A y B abiertos de $\mathbb{R}$, demostrar que $A \cap B$ es un abierto.

Demostración. Sean A y B abiertos de $\mathbb{R}$, es decir,

$$(\forall y \in A)(\exists \epsilon > 0)(B(y, \epsilon) \subseteq A), \tag{1}$$

y

$$(\forall y \in B)(\exists \epsilon > 0)(B(y, \epsilon) \subseteq B). \tag{2}$$

Demostraremos que $(\forall x \in A \cap B)(\exists \epsilon > 0)(B(x, \epsilon) \subseteq A \cap B)$.

Sea $x \in A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$, con esto, en (1) y (2), existen $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$B(x, \epsilon_1) \subseteq A \qquad \text{y} \qquad B(x, \epsilon_2) \subseteq B.$$

Tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$, se tiene que

$$B(x, \epsilon) \subseteq B(x, \epsilon_1) \qquad \text{y} \qquad B(x, \epsilon) \subseteq B(x, \epsilon_2),$$

por lo tanto,

$$B(x, \epsilon) \subseteq A \qquad \text{y} \qquad B(x, \epsilon) \subseteq B,$$

entonces $B(x, \epsilon) \subseteq A \cap B$. Por lo tanto, $A \cap B$ es un abierto. □

2. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos de $\mathbb{R}$, demostrar que $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ es un abierto.

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos, es decir,

$$(\forall i \in I)(\forall y \in A_i)(\exists \epsilon > 0)(B(y, \epsilon) \subseteq B). \tag{3}$$

Demostraremos que $(\forall x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i)(\exists \epsilon > 0)(B(x, \epsilon) \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i)$.

Sea $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$, con esto, en (3), existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x, \epsilon) \subseteq A_j,$$

además, $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, por lo tanto,

$$B(x, \epsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i,$$

es decir, $\bigcup_{i \in I} A_i$ es abierto. □

ℵ

Escuela Politécnica Nacional
Análisis Real • Ejercicios de repaso
Interior y Clausura

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

Sea A un subconjunto de los números reales.

1. Demostrar que $\text{int}(A) \subseteq A$.

Demostración. Sea $x \in \text{int}(A)$, entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x,\epsilon) \subseteq A,$$

como $x \in B(x,\epsilon)$, se concluye que $x \in A$, es decir, $\text{int}(A) \subseteq A$. □

2. Demostrar que $A \subseteq \overline{A}$.

Demostración. Sea $x \in A$, queremos demostrar que $(\forall \epsilon > 0)(B(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing)$. Sea $\epsilon > 0$, se tiene que

$$x \in B(x,\epsilon),$$

por lo tanto,

$$x \in B(x,\epsilon) \cap A,$$

es decir, $B(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing$, por lo tanto, $x \in \overline{A}$, es decir, $A \subseteq \overline{A}$. □

3. Demostrar que $\text{int}(A)$ es un abierto.

Demostración. Queremos demostrar que $(\forall x \in \text{int}(A))(\exists \epsilon > 0)(B(x,\epsilon) \subseteq \text{int}(A))$.

Sea $x \in \text{int}(A)$, entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x,\epsilon) \subseteq A.$$

Ahora, demostremos que $B(x,\epsilon) \subseteq \text{int}(A)$, sea $z \in B(x,\epsilon)$, como sabemos que $B(x,\epsilon)$ es abierto, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(z,\delta) \subseteq B(x,\epsilon) \subseteq A,$$

por lo tanto, $B(z,\delta) \subseteq A$, de donde $z \in \text{int}(A)$, así, $B(x,\epsilon) \subseteq \text{int}(A)$, es decir, $\text{int}(A)$ es un abierto. □

4. Demostrar que $\overline{A}$ es un cerrado.

Demostración. Queremos demostrar que $\overline{A}^c$ es un abierto, es decir, queremos demostrar que $(\forall x \in \overline{A}^c)(\exists \epsilon > 0)(B(x,\epsilon) \subseteq \overline{A}^c)$.

Sea $x \in \overline{A}^c$, es decir $x \notin \overline{A}$, de donde, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x,\epsilon) \cap A = \varnothing. \tag{1}$$

es decir,

$$B(x,\epsilon) \subseteq A^c.$$

Queremos demostrar que $B(x,\epsilon) \subseteq \overline{A}^c$, por reducción al absurdo, supongamos que

$$B(x,\epsilon) \not\subseteq \overline{A}^c,$$

es decir, existe $z \in B(x,\epsilon)$ tal que $z \notin \overline{A}^c$, es decir,

$$|x-z| < \epsilon \qquad \text{y} \qquad z \in \overline{A}.$$

Como $z \in \overline{A}$, para $r = \epsilon - |x-z| > 0$, se tiene que

$$B(z,r) \cap A \neq \varnothing,$$

es decir, existe $y \in B(z,r) \cap A$, de donde

$$|z-y| < r = \epsilon - |x-z| \qquad \text{y} \qquad y \in A.$$

Ahora, notemos que

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y| < |x-z| + \epsilon - |x-z| = \epsilon,$$

por lo tanto, $y \in B(x,\epsilon)$ y $y \in A$, lo que contradice (1). Por lo tanto, $B(x,\epsilon) \subseteq \overline{A}^c$, de donde, $\overline{A}$ es un cerrado. $\square$

5. Si U es un abierto de $\mathbb{R}$ tal que $U \subseteq A$, entonces $U \subseteq \text{int}(A)$.

Demostración. Supongamos que U es un abierto de $\mathbb{R}$ tal que $U \subseteq A$, queremos demostrar que $U \subseteq \text{int}(A)$. Sea $x \in U$, como U es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x,\epsilon) \subseteq U,$$

pero $U \subseteq A$, por lo tanto,

$$B(x,\epsilon) \subseteq A,$$

de donde, $x \in \text{int}(A)$, es decir, $U \subseteq \text{int}(A)$. $\square$

6. Si F es un cerrado de $\mathbb{R}$ tal que $A \subseteq F$, entonces $\overline{A} \subseteq F$.

Demostración. Supongamos que F es un cerrado de $\mathbb{R}$ tal que $A \subseteq F$, queremos demostrar que $\overline{A} \subseteq F$. Sea $x \in \overline{A}$, por reducción al absurdo, supongamos que $x \notin F$, es decir, $x \in F^c$. Como F es cerrado, entonces F^c es un abierto, por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(x,\epsilon) \subseteq F^c,$$

de donde,

$$B(x,\epsilon) \cap F = \varnothing.$$

Pero $A \subseteq F$, por lo tanto

$$B(x,\epsilon) \cap A \subseteq B(x,\epsilon) \cap F = \varnothing,$$

lo que contradice el hecho de que $x \in \overline{A}$, por lo tanto, $\overline{A} \subseteq F$. $\square$

Escuela Politécnica Nacional
Análisis Real • Ejercicios de repaso
Intersecciones de conjuntos

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Demostrar que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[0,1/n]=\{0\}$.

Demostración. Notemos que $0\in[0,1/n]$, para todo $n\in\mathbb{N}^*$, por lo tanto, $\{0\}\subseteq[0,1/n]$, para todo $n\in\mathbb{N}^*$, de donde

$$\{0\}\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[0,1/n].$$

Por otro lado, sea $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[0,1/n]$, se debe demostrar que $x\in\{0\}$, es decir, se debe demostrar que $x=0$. Por el absurdo, supongamos que $x\neq 0$. Utilizando la propiedad arquimediana para $1/x$, se tiene que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{x}<N.$$

Por otro lado, como $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[0,1/n]$, entonces

$$(\forall n\in\mathbb{N})(x\in[0,1/n]),$$

por lo tanto, para N, se tiene que

$$x\in[0,1/N],$$

es decir

$$0\geq x\leq\frac{1}{N},$$

de donde

$$N\leq\frac{1}{x}.$$

Lo cual es contradictorio, por lo tanto, $x=0$, es decir

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}[0,1/n]\subseteq\{0\}.$$

Con lo cual queda demostrada la igualdad de estos conjuntos. □

2. Demostrar que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n,+\infty)=\varnothing$.

Demostración. Por el absurdo, supongamos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n,+\infty)\neq\varnothing,$$

es decir, existe $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n,+\infty)$, lo que significa

$$(\forall n\in\mathbb{N})(x\in[n,+\infty)).$$

Por la propiedad arquimediana para x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x < N.$$

Por otro lado, para N, se tiene que

$$x \in [N, +\infty),$$

es decir

$$N \leq x.$$

Lo cual es contradictorio, por lo tanto,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty) = \varnothing. \qquad \square$$

ℵ

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ANÁLISIS REAL • EJERCICIOS DE REPASO

SUCESIONES

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que las subsucesiones $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a un mismo límite. Demuestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Demostración. Sea L el límite de las subsucesiones, y sea $\epsilon > 0$, existen $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$n > N_1 \Rightarrow |x_{2n} - L| < \epsilon,$$

y

$$n > N_2 \Rightarrow |x_{2n+1} - L| < \epsilon.$$

Tomemos $N = \text{máx}\{2N_1,\ 2N_2 + 1\}$, si $n > N$, se tienen los siguientes casos:

- *n es par*, por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$, y, al ser $n > 2N_1$, se tiene que $k > N_1$, por lo tanto
$$|x_n - L| = |x_{2k} - L| < \epsilon.$$
- *n es impar*, por lo tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k + 1$, y, al ser $n > 2N_2 + 1$, se tiene que $k > N_2$, por lo tanto
$$|x_n - L| = |x_{2k+1} - L| < \epsilon.$$

Con esto se concluye que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, y su límite es L. □

2. Si $b = \sup(A)$, existe una sucesión creciente de elementos de A que converge a b. Es más, si $b \notin A$, la sucesión es estrictamente creciente.

Demostración. Si $b \in A$, las sucesión constante $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos de A que converge a b.

Si $b \notin A$, dado que $b = \sup(A)$, se tiene que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists x \in A)(b - \epsilon < x).$$

Para $\epsilon = 1$, se tiene que, existe $x_1 \in A$ tal que

$$b - 1 < x_1.$$

Como $x_1 \leq b$, y $b \notin A$, se tiene que $x_1 < b$, por lo tanto, para $\epsilon = \text{mín}\{b - x_1, 1/2\} > 0$, existe $x_2 \in A$ tal que

$$b - \frac{1}{2} < x_2 \qquad \text{y} \qquad b - (b - x_1) < x_2,$$

es decir, $x_1 < x_2$.

Procediendo recursivamente, supongamos que, para $k \in \mathbb{N}$, tenemos $x_k \in A$ tal que $x_{k-1} < x_k$ y

$$b - \frac{1}{k} < x_k.$$

Como $b \notin A$, se tiene que $x_k < b$, por lo tanto, para $\epsilon = \text{mín}\{b - x_k, 1/(k+1)\} > 0$, existe $x_{k+1} \in A$ tal que

$$b - \frac{1}{k+1} < x_{k+1} \qquad \text{y} \qquad b - (b - x_k) < x_{k+1},$$

es decir, $x_k < x_{k-1}$. Así, se obtiene la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, la cual es estrictamente creciente, además, dado que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq b$, se tiene que

$$b - \frac{1}{n} < x_n < b.$$

Finalmente, como $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, se tiene que $x_n \to b$ cuando $n \to +\infty$. $\square$

3. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales y $L, M \in \mathbb{R}$ tales que $x_n \to L$ y $y_n \to M$, cuando $n \to +\infty$. Demostrar que $x_n y_n \to LM$, cuando $n \to +\infty$.

Demostración 1. Se tiene que

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |x_n - L| < \epsilon), \tag{1}$$

y

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |y_n - M| < \epsilon). \tag{2}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - LM| &= |x_n y_n - L y_n + L y_n - LM| \\ &\leq |x_n y_n - L y_n| + |L y_n - LM| \\ &= |x_n - L||y_n| + |L||y_n - M|. \end{aligned}$$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces está acotada, por lo tanto, existe $R > 0$ tal que $|y_m| \leq R$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$|x_n y_n - LM| \leq |x_n - L||y_n| + |L||y_n - M| \leq |x_n - L|R + |L||y_n - M|.$$

- Si $L \neq 0$, para $\epsilon/2R > 0$, en (1), existe $N_1 \in N$ tal que

  $$n > N_1 \Longrightarrow |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2R}.$$

  Y para $\epsilon/2|M| > 0$, en (2), existe $N_2 \in N$ tal que

  $$n > N_2 \Longrightarrow |y_n - M| < \frac{\epsilon}{2|M|}.$$

  Con esto, tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, se tiene que, si $n > N$, entonces

  $$|x_n y_n - LM| \leq |x_n - L|R + |L||y_n - M| < \frac{\epsilon}{2R}R + |L|\frac{\epsilon}{2|L|} = \epsilon.$$

- Si $L = 0$, , para $\epsilon/R > 0$, en (1), existe $N \in N$ tal que

  $$n > N \Longrightarrow |x_n - L| < \frac{\epsilon}{R}.$$

  Con esto, se tiene que, si $n > N$, entonces

  $$|x_n y_n - LM| \leq |x_n - L|R + |L||y_n - M| = |x_n - L|R < \frac{\epsilon}{2R}R = \epsilon. \qquad \square$$

4. Si una sucesión es acotada y posee un único punto de acumulación, entonces converge.

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada con un único punto de acumulación, llamemos a este punto L. Por reducción al absurdo, supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a L, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n > N \wedge |x_n - L| \geq \epsilon).$$

Utilizando esto,

- Para $0 \in \mathbb{N}$, existe $\phi(0) \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(0) > 0$ y $|x_{\phi(0)} - L| \geq \epsilon$.
- Para $\phi(0) \in \mathbb{N}$, existe $\phi(1) \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(1) > \phi(0)$ y $|x_{\phi(1)} - L| \geq \epsilon$.
- Supongamos que tenemos $\phi(n) \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(n) > \phi(n-1)$ y $|x_{\phi(n)} - L| \geq \epsilon$.
- Para $\phi(n) \in \mathbb{N}$, existe $\phi(n+1) \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(n+1) > \phi(n)$ y $|x_{\phi(n+1)} - L| \geq \epsilon$.

Por lo tanto, por recursión, tenemos una subsucesión $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$|x_{\phi(n)} - L| \geq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ también lo está. Aplicando el Teorema de Bolzano-Weierstrass a $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, existe una subsucesión $(x_{\psi(\phi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ que converge, es decir

$$x_{\psi(\phi(n))} \to M,$$

cuando $n \to +\infty$, para algún $M \in \mathbb{R}$, es decir, M es un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pero L es el único punto de acumulación por lo tanto $L = M$. Además, se tiene que

$$|x_{\psi(\phi(n))} - L| \geq \epsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando límites, se tiene que

$$|M - L| \geq \epsilon > 0,$$

por lo tanto $M \neq L$. Lo cual es contradictorio, por lo tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L. $\square$

ℵ

Escuela Politécnica Nacional
Análisis Real • Ejercicios de repaso
Supremos e Ínfimos

Semestre 2015-B *Mat. Andrés Merino*

1. Hallar el supremo de $A = \{1 - 1/(2n+1) : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Se tiene que $\sup(A) = 1$. Es decir, por demostrar que

- $(\forall x \in A)(x \leq 1)$, y
- Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $(\forall x \in A)(x \leq c)$, entonces $1 \leq c$.

O, de manera equivalente, por demostrar que

- $(\forall n \in \mathbb{N})(1 - 1/(2n+1) \leq 1)$, y
- Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $(\forall n \in \mathbb{N})(1 - 1/(2n+1) \leq c)$, entonces $1 \leq c$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 2n+1 > 0 &\Longrightarrow \frac{1}{2n+1} > 0 \\ &\Longrightarrow -\frac{1}{2n+1} < 0 \\ &\Longrightarrow 1 - \frac{1}{2n+1} < 1 \end{aligned}$$

Además, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(1 - 1/(2n+1) \leq c),$$

Por demostrar que $1 \leq c$. Por absurdo, supongamos que $c < 1$, aplicando propiedad arquimediana a $1/(1-c)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{1-c} < n,$$

Para este n, se tiene que

$$1 - 1/(2n+1) \leq c$$

Por otro lado, como $n < 2n+1$, se tiene que

$$\frac{1}{1-c} < 2n+1,$$

por lo tanto,

$$c < 1 - \frac{1}{2n+1},$$

lo cual es contradictorio, por lo tanto, $1 \leq c$. Es decir, en efecto, $\sup(A) = 1$. □

2. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado. Demostrar que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Demostración 1. Sean $\alpha = \inf(A)$ y $\beta = \sup(-A)$, es decir *a*) $(\forall x \in A)(\alpha \leq x)$.

b) Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $(\forall x \in A)(c \leq x)$, entonces $c \leq \alpha$.

c) $(\forall x \in -A)(x \leq \beta)$.

d) Si $d \in \mathbb{R}$ es tal que $(\forall x \in -A)(x \leq d)$, entonces $\beta \leq b$.

Sea $x \in A$, se tiene que $-x \in -A$. Por *c)*, se tiene que

$$-x \leq \beta,$$

es decir $-\beta \leq x$. Por lo tanto

$$(\forall x \in A)(-\beta \leq x),$$

de donde, por *b)*,

$$-\beta \leq \alpha.$$

Por otro lado, sea $x \in -A$, se tiene que $-x \in A$. Por *a)*, se tiene que

$$\alpha \leq -x,$$

es decir $x \leq -\alpha$. Por lo tanto

$$(\forall x \in -A)(x \leq -\alpha),$$

de donde, por *d)*,

$$\beta \leq -\alpha.$$

Con esto, se concluye que $\beta = -\alpha$, es decir, $\sup(-A) = -\operatorname{ínf}(A)$. □

Demostración 2. Sea $\alpha = \operatorname{ínf}(A)$, demostraremos que $-\alpha = \sup(-A)$ utilizando la caracterización con ϵ, es decir, trataremos de demostrar que

P.D.1 $(\forall x \in -A)(x \leq -\alpha)$ y

P.D.2 $(\forall \epsilon > 0)(\exists y \in -A)(-\alpha - \epsilon < y)$.

Como $\alpha = \operatorname{ínf}(A)$, se tiene que

a) $(\forall x \in A)(\alpha \leq x)$ y

b) $(\forall \epsilon > 0)(\exists y \in A)(y < \alpha + \epsilon)$.

Sea $x \in -A$, se tiene que $-x \in A$, por *a)*, se tiene que $\alpha \leq -x$ es decir

$$x \leq -\alpha.$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$, por *b)*, existe $y \in A$ tal que

$$y < \alpha + \epsilon,$$

por lo tanto,

$$-\alpha - \epsilon < -y,$$

pero $-y$ es elemento de $-A$, de donde, $z = -y \in -A$ tal que

$$-\alpha - \epsilon < z,$$

por lo tanto, $-\alpha = \sup(-A)$. □

3. Hallar el supremo e ínfimo de $(0, 1]$.

Solución. Sea $A = (0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$.

- Se tiene que $\sup(A) = 1$, pues, sea $x \in A$, por definición de A, se tiene que
$$x \leq 1.$$
Además, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que
$$(\forall x \in A)(x \leq c),$$
como $1 \in A$, aplicando la linea anterior, se tiene que $1 \leq c$. Es decir, en efecto $\sup(A) = 1$.
- Se tiene que $\text{ínf}(A) = 0$, pues, sea $x \in A$, se tiene que
$$0 < x,$$
de donde,
$$0 \leq x,$$
Además, sea $c \in \mathbb{R}$ tal que
$$(\forall x \in A)(c \leq x).$$
Por absurdo, supongamos que $c > 0$, tomando $x = \text{mín}\{1, c/2\} \in A$, se tiene que
$$c \leq c/2,$$
es decir
$$1 \leq 1/2,$$
lo cual es contradictorio, por lo tanto, $c \leq 0$. Es decir, en efecto $\text{ínf}(A) = 0$. $\square$

ℵ