Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

3 (1)

Cálculo en una variable
Resumen y ejercicios resueltos
1. Límites y continuidad

Proyecto CLAVEMAT

Fascículos de Matemática
del Proyecto CLAVEMAT

Proyecto CLAVEMAT

Cálculo en una variable

Resumen y ejercicios resueltos

1. Límites y continuidad

Fascículo de Matemática No. 3 (1)

CÁLCULO EN UNA VARIABLE: RESUMEN Y EJERCICIOS RESUELTOS
1. LÍMITES Y CONTINUIDAD

PROYECTO CLAVEMAT

Escrito por: Andrés Merino - Evelyn Cueva - Juan Carlos Trujillo
Responsable de la Edición: Andrés Merino
Revisión Académica: el texto aún no cuenta con revisión académica de pares

Registro de derecho autoral No.
ISBN: 978-0000-000-00

Publicado por el proyecto CLAVEMAT de la Escuela Politécnica Nacional, Ladrón de Guevara E11-253, Quito, Ecuador.

Primera edición: 2016
Primera impresión: 2016

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a todos los estudiantes de las carrera de Matemática, Ingeniería Matemática y Física que han colaborado en la resolución de varios ejercicios presentados en esta publicación, entre ellos a Carolina Grados, Yandira Cuvero, Alejandro Coloma, Zuly Salinas, Sintya Serrano, Sofía Jijón y Diego Morales.

Los Autores.

Índice general

Fascículo 1

Límites y continuidad

1.1. Definiciones y teoremas

Definición 1.1 (Definición de límite)**.** Sean:

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. f una función real definida en I, salvo, tal vez, en a; es decir, $I \subset \operatorname{Dom}(f) \cup \{a\}$.

Se dice que L *es el límite de* f *cuando* x *tiende a* a, y se escribe

$$L = \lim_{x \to a} f(x),$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si:

$$0 < |x - a| < \delta, \qquad \text{entonces} \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\right].$$

Observación. Para demostrar que un número L es el límite de f cuando x tiende al número a, se procede de la siguiente manera:

1. Se toma un $\epsilon > 0$ arbitrario pero fijo.
2. Se busca un número $\delta > 0$ que satisfaga la implicación siguiente:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

TEOREMA 1.1 (Unicidad del límite)**.** Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces el número L es el *único* número que satisface esta igualdad.

PROPOSICIÓN 1.2. Sean I, J dos intervalos abiertos, f y g dos funciones definidas en I y J, respectivamente, salvo, tal vez, en a y que satisfacen las siguientes condiciones:

1. $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I \cap J$ y $x \neq a$; y
2. existe L tal que:
$$L = \lim_{x \to a} g(x).$$

Entonces f también tiene límite en a y:

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

PROPOSICIÓN 1.3. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$. Entonces:

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \lim_{x \to a} (f(x) - L) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \lim_{x \to a} |f(x) - L|.$$

DEFINICIÓN 1.2 (Definición de función continua en un punto)**.** Una función real $f\colon A \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq A$ es un intervalo abierto, es *continua* en a si y solo si:

1. $a \in I$;
2. existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$; y
3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

OBSERVACIÓN. En otras palabras, una función es continua en a si y solo a está en el dominio de f y la función evaluada en a es igual al límite de la función f cuando x tiende a a.

DEFINICIÓN 1.3 (Definición de función continua en un intervalo)**.** Una función es *continua en el intervalo abierto I* si y solo si es continua en cada uno de los elementos de I.

PROPOSICIÓN 1.4. Sean I un intervalo abierto, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Entonces f

es continua en a si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

siempre que $|x - a| < \delta$ y $x \in I$.

PROPOSICIÓN 1.5. Si $L = \lim_{x \to a} f(x)$, existe un intervalo abierto I centrado en a tal que f está acotada en $I - \{a\}$; es decir, existen $M > 0$ y $r > 0$ tales que $|f(x)| < M$ para todo x tal que $0 < |x - a| < r$.

TEOREMA 1.6 (Propiedades algebraicas de los límites)**.** Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces:

1. *Límite de la suma*: existe el límite de $f(x) + g(x)$ y

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

2. *Límite del producto*: existe el límite de $f(x) \cdot g(x)$ y

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

3. *Límite del inverso multiplicativo*: si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$, existe el límite de $\dfrac{1}{g(x)}$ y

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to a} g(x)}.$$

COROLARIO 1.7. Sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces:

1. *Límite del producto de un escalar por una función*: existe el límite de $\alpha f(x)$ y

$$\lim_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x).$$

2. *Límite de la resta*: existe el límite de $f(x) - g(x)$ y

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x).$$

3. *Límite de una combinación lineal*: existe el límite de $\alpha f(x) + \beta g(x)$ y

$$\lim_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x \to a} f(x) + \beta \lim_{x \to a} g(x).$$

4. *Límite del cociente*: existe el límite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ siempre que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ y
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

PROPOSICIÓN 1.8 (Propiedades algebraicas de la continuidad)**.** Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ son continuas en a. Entonces la *suma* $(f+g)$, la *resta* $(f-g)$, el *producto* $(f\cdot g)$ y el *cociente* (f/g) (siempre que $g(a) \neq 0$) son funciones continuas en a.

PROPOSICIÓN 1.9 (Generalización de las propiedades algebraicas)**.** Sean $n \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \dots, f_n$ tales que existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f_i(x)$ para todo i tal que $1 \leq i \leq n$. Entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x\to a} f_i(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to a} \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lim\limits_{x\to a} f_i(x)$
3. Si f_i es continua en a para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ y $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i$ son continuas en a.

PROPOSICIÓN 1.10 (Límite de un polinomio y una función racional)**.** Si P y Q son dos polinomios, entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ siempre que $Q(a) \neq 0$.

De aquí se tiene que todo polinomio es una función continua en $\mathbb{R}$ y toda función racional es continua en $\mathbb{R}$ excepto en aquellos números en los que el denominador es igual a cero.

TEOREMA 1.11 (Límite de una composición)**.** Si existe el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ y f es continua en b, entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ y:
$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

TEOREMA 1.12 (Cambio de variable para límites)**.** Sean f y g dos funciones reales. Si:

1. existe $b = \lim_{x\to a} g(x)$; y
2. se satisfacen una de las dos siguientes condiciones:
   a) La función f es continua en b.
   b) Existe $\lim_{y\to b} f(y)$ y existe un intervalo $(a-r, a+r)$ tal que

   $$g(x) \neq b$$

   para todo $x \in (a-r, a+r)$.

Entonces:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y).$$

OBSERVACIÓN. Para calcular el límite de una composición como la siguiente

$$\lim_{x\to a} f(g(x)),$$

se puede usar el *cambio de variable*

$$y = g(x)$$

siempre que se cumplan las condiciones de teorema anterior. Esta manera de calcular el límite de $f(g(x))$ es denominado *método del cambio de variable*.

TEOREMA 1.13 (Teorema del sandwich)**.** Sean $a \in \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ y $h\colon C \to \mathbb{R}$ tres funciones tales que sus dominios contienen un intervalo abierto I centrado en a, excepto, quizás, el punto a. Supongamos que para todo $x \in I$, se verifican las desigualdades:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \text{ para todo } x \in I$$

y las igualdades:

$$L = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$

Entonces

$$L = \lim_{x\to a} g(x).$$

DEFINICIÓN 1.4 (Definición de límites unilaterales)**.** Sean:

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene el número a; y
3. f una función real definida en I, salvo, tal vez, en a; es decir, $I \subset \text{Dom}(f) \cup \{a\}$.

Entonces:

$$L = \lim_{x \to a^+} f(x),$$

(se lee: L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a *a por la derecha*) si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que $0 < x - a < \delta$ (es decir, siempre que $x > a$ y $x - a < \delta$).

Análogamente:

$$L = \lim_{x \to a^-} f(x),$$

(se lee: L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a *a por la izquierda*) si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

siempre que $0 < a - x < \delta$ (es decir, siempre que $x < a$ y $a - x < \delta$).

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)[0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon].$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)[0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon].$$

TEOREMA 1.14. L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a si y solo si existen los dos límites unilaterales y son iguales a L. Es decir, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

PROPOSICIÓN 1.15 (Propiedades de los límites unilaterales)**.** Los límites unilaterales verifican las mismas propiedades que satisfacen los límites y que fueron enunciadas anteriormente.

DEFINICIÓN 1.5 (Función continua por derecha en un punto)**.** Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq A$ es un intervalo abierto, es *continua por la derecha en a* si y solo si:

1. $a \in I$;
2. existe $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; y
3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

DEFINICIÓN 1.6 (Función continua por izquierda en un punto)**.** Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, donde $I \subseteq A$ es un intervalo abierto, es *continua por la izquierda en a* si y solo si:

1. $a \in I$;
2. existe $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$; y
3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

PROPOSICIÓN 1.16. Una función es continua en a si y solo si es continua en a por la derecha y es continua en a por la izquierda.

DEFINICIÓN 1.7 (Límites infinitos)**.** Sean:

1. a un número real;
2. I un intervalo abierto que contiene el número a; y
3. f una función real definida en I, salvo, tal vez, en a; es decir, $I \subset \operatorname{Dom}(f) \cup \{a\}$.

Se dice que *f tiende a infinito cuando x tiende al número a*, y se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, si y solo si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > R,$$

siempre que $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Análogamente, se dice que f *tiende a menos infinito cuando* x *tiende al número* a, y se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, si y solo si para todo $R < 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < R,$$

siempre que $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y

$$0 < |x - a| < \delta.$$

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff (\forall R > 0)(\exists \delta > 0)[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > R].$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff (\forall R < 0)(\exists \delta > 0)[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < R].$$

DEFINICIÓN 1.8 (Ampliación de límites laterales)**.** Con el mismo significado para f, L y a de la definición de límite, se dice que:

1. $f(x)$ tiende a L *por la derecha* cuando x tiende al número a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L^{+},$$

   si y solo si $L = \lim_{x \to a} f(x)$ y existe $r > 0$ tal que $f(x) > L$ siempre que $x \in (a - r, a + r)$.

2. $f(x)$ tiende a L *por la izquierda* cuando x tiende al número a, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L^{-},$$

   si y solo si $L = \lim_{x \to a} f(x)$ y existe $r > 0$ tal que $f(x) < L$ siempre que $x \in (a - r, a + r)$.

TEOREMA 1.17. Sean I un intervalo abierto, $a \in I$ y f una función real tal que

$I \subset \mathrm{Dom}(f) \cup \{a\}$. Entonces:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$ si y solo si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^-$ si y solo si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposición 1.18. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, entonces f no está acotada superiormente en ningún intervalo centrado en a.

Proposición 1.19. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, entonces f no está acotada inferiormente en ningún intervalo centrado en a.

Proposición 1.20 (Propiedades de límites infinitos positivos)**.** Sean f y g dos funciones reales. Entonces:

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty.$$

2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\beta > 0$, entonces: $\lim\limits_{x\to a}[\beta f(x)] = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\beta < 0$, entonces: $\lim\limits_{x\to a}[\beta f(x)] = -\infty$.
4. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ o g está acotada inferiormente en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = +\infty.$$

5. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x) > 0$ o g está acotada inferiormente por un número positivo en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty.$$

6. Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ o f está acotada por números positivos en un intervalo alrededor de a y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^+$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

7. Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ o f está acotada en un intervalo alrededor de a y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

PROPOSICIÓN 1.21 (Propiedades de límites infinitos negativos)**.** Sean f y g dos funciones reales. Entonces:

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces:
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = +\infty.$$
2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\beta > 0$, entonces: $\lim_{x\to a}[\beta f(x)] = -\infty$.
3. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\beta < 0$, entonces: $\lim_{x\to a}[\beta f(x)] = +\infty$.
4. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x)$ o g está acotada superiormente en un intervalo alrededor de a, entonces:
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = -\infty$$
5. Si $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ o g está acotada inferiormente por un número positivo en un intervalo alrededor de a, entonces:
$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty.$$
6. Si existe $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ o f está acotada por números positivos en un intervalo alrededor de a y $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$, entonces:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$
7. Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ o f está acotada en un intervalo alrededor de a y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

PROPOSICIÓN 1.22 (Propiedades de límites infinitos mixtos)**.** Sean f y g dos funciones reales. Entonces:

1. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, entonces:
$$\lim_{x\to a} \left[f(x)g(x)\right] = -\infty.$$
2. Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x) < 0$ o g está acotada superiormente

por un número negativo en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = -\infty.$$

3. Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0$ o f está acotada por números negativos en un intervalo alrededor de a y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^+$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

4. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to a} g(x) < 0$ o g está acotada superiormente por un número negativo en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = +\infty.$$

5. Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) < 0$ o f está acotada por números negativos en un intervalo alrededor de a y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0^-$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

PROPOSICIÓN 1.23 (Formas indeterminadas)**.** No hay reglas fijas para los límites de diferencias o cocientes de funciones que ambas tienden a $\pm\infty$, productos de funciones donde una de ellas tiende 0 y la otra a $\pm\infty$, o cocientes de funciones donde ambas tienden a 0, pues, para algunas funciones toman un valor, para otras, un valor distinto; y en algunos casos, ni siquiera existen. A estos límites se los denomina *formas indeterminadas*.

DEFINICIÓN 1.9 (Definición de límites al infinito)**.** Sean:

1. L un número real;
2. I un intervalo abierto del tipo $(a, +\infty)$; y
3. f una función real definida en I; es decir, $I \subset \mathrm{Dom}(f)$.

Se dice que L *es el límite de f cuando x tiende a $+\infty$*, y se escribe

$$L = \lim_{x\to+\infty} f(x),$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que $x \in \text{Dom}(f)$ y $x > R$.

Análogamente, si

1. L un número real;
2. I un intervalo abierto del tipo $(-\infty, a)$; y
3. f una función real definida en I; es decir, $I \subset \text{Dom}(f)$,

se dice que *L es el límite de f cuando x tiende a $-\infty$*, y se escribe

$$L = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe $R < 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

siempre que $x \in \text{Dom}(f)$ y $x < R$.

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists R > 0)[R < x \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon].$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \epsilon < 0)(\exists R > 0)[x < R \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon].$$

PROPOSICIÓN 1.24 (Propiedades de límites al infinito)**.** Sean f y g dos funciones reales. Entonces:

1. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

2. Si existe $\lim_{x \to +\infty} f(x) > 0$ o f está acotada por números positivos en un intervalo del tipo $]a, +\infty[$, con $a \in \mathbb{R}$, y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0^+$, entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

3. Si existe $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$ o f está acotada por números negativos en un intervalo del tipo $]a, +\infty[$, con $a \in \mathbb{R}$, y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

4. Si existe $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$ o f está acotada por números positivos en un intervalo del tipo $]a, +\infty[$, con $a \in \mathbb{R}$, y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^-$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

5. Si existe $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$ o f está acotada por números negativos en un intervalo del tipo $]a, +\infty[$, con $a \in \mathbb{R}$, y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0^-$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

6. Si f está acotada y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

1.2. Tabla de límites básicos

Sea $a \in \mathbb{R}$. A menos que se diga lo contrario, se supondrá que a es una constante; es decir, que no depende de x.

T1. $\lim_{x \to a} k = k$ donde $k \in \mathbb{R}$ no depende de x.

T2. $\lim_{x \to a} x = a$.

T3. $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$.

T4. $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$.

T5. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, si $n \in \mathbb{N}$.

T6. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, si $n \in \mathbb{N}$ es impar.

T7. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, si $n \in \mathbb{N}$ es par y $a > 0$.

T8. $\lim_{x \to a} b^x = b^a$, si $b > 0$ no depende de x.

T9. $\lim_{x \to +\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < b < 1, \\ +\infty & \text{si } 1 < b. \end{cases}$

T10. $\lim_{x \to -\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < b < 1, \\ 0 & \text{si } 1 < b. \end{cases}$

T11. $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$, si $a > 0$.

T12. $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

T13. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$.

T14. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$.

T15. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

T16. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

T17. $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty \iff \lim_{x \to a} f(x) = 0^+$.

T18. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^-$.

T19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

T20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$.

T21. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ si existen $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, con $L > 0$.

T22. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

T23. $\lim\limits_{x\to a} \left(1+\dfrac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

1.3. Soluciones

Para demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se suele proceder de la siguiente manera. Se toma $\epsilon > 0$. Nuestro objetivo es encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$|f(x) - L| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Para ello, debemos trabajar con el lado izquierdo de la desigualdad (1.1) hasta obtener, si fuera posible, una desigualdad del siguiente tipo:

$$|f(x) - L| \leq |x - a| g(x) \tag{1.2}$$

para todo $x \in \text{dom}\,(f) - \{a\}$.

Si la expresión $g(x)$ fuera una constante, independiente de x, por ejemplo M, tendríamos:

$$|f(x) - L| \leq |x - a| M \tag{1.3}$$

para todo $x \in \text{dom}\,(f) - \{a\}$. Entonces, para que la desigualdad (1.1) se verifique, es suficiente que

$$|x - a| M < \epsilon$$

para $x \in \text{dom}\,(f) - \{a\}$; es decir, es suficiente que

$$|x - a| < \frac{\epsilon}{M}$$

para $x \in \text{dom}\,(f) - \{a\}$. Por lo tanto, si definiéramos

$$\delta = \frac{\epsilon}{M},$$

tendríamos que, si $0 < |x - a| < \delta$, se verificaría

$$|f(x) - L| = |x - a| M < \delta M = \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon.$$

El caso de que $g(x)$ no fuera una función constante, lo que se suele hacer es encontrar un $\delta' > 0$ tal que $(a - \delta', a + \delta') \subseteq \text{dom}\,(f) \cup \{a\}$ y

$$|g(x)| \leq M,$$

para todo $x \in (a - \delta', a + \delta')$. Entonces, es suficiente tomar δ así:

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{M}, \delta'\right\}.$$

EJERCICIO 1.1. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 3}(8x-15)=9$.

Demostración. En este caso, $f(x)=8x-15$ y $\operatorname{dom}(f)=\mathbb{R}$. Sea $\epsilon>0$. Debemos hallar un $\delta>0$ tal que si $0<|x-3|<\delta$, se verifique la desigualdad

$$|(8x-15)-9|<\epsilon. \tag{1.4}$$

Para hallar el número δ, observemos que:

$$\begin{aligned}|(8x-15)-9| &= |8x-24|\\ &= |8(x-3)|\\ &= 8|x-3|\end{aligned}$$

para todo $x\in\operatorname{dom}(f)$. Entonces, para que la desigualdad (1.4) se verifique, es suficiente que

$$8|x-3|<\epsilon,$$

que equivale a

$$|x-3|<\frac{\epsilon}{8}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta=\frac{\epsilon}{8},$$

tenemos que, si $0<|x-3|<\delta$, se verificaría

$$|(8x-15)-9|=8|x-3|<8(\delta)=8\left(\frac{\epsilon}{8}\right)=\epsilon. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.2. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)=12$.

Demostración. En este caso, $f(x)=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$ y $\operatorname{dom}(f)=\mathbb{R}$. Sea $\epsilon>0$. Debemos hallar un $\delta>0$ tal que, si $0<|x-8|<\delta$, se verifique la desigualdad

$$\left|\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)-12\right|<\epsilon. \tag{1.5}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}\left|\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)-12\right| &= \left|\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-8\right|\\ &= \left|\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x}+4\right)\right|\end{aligned}$$

$$= \left|\sqrt[3]{x} - 2\right| \left|\sqrt[3]{x} + 4\right|;$$

por lo tanto

$$\left|\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right) - 12\right| = \left|\sqrt[3]{x} - 2\right| \left|\sqrt[3]{x} + 4\right| \tag{1.6}$$

para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$.

Queremos expresar el lado derecho de esta igualdad como el producto $|x - 8|g(x)$. Para ello, utilicemos la siguiente identidad (verdadera para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$):

$$x - 8 = \left(\sqrt[3]{x} - 2\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right).$$

De ésta, obtenemos

$$\sqrt[3]{x} - 2 = \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4},$$

para todo x tal que $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4 \neq 0$.

Ahora bien, puesto que el cálculo del límite de $f(x)$ es cuando x tiende a 8, podemos suponer que $x \in (8 - \delta', 8 + \delta')$ con $\delta' = 1$. Esto significa que $x > 0$, con lo que nos aseguramos

$$\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4 > 4 > 0$$

para todo $x \in (7, 9)$, de donde la igualdad (1.6) puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$\left|\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right) - 12\right| = \frac{|x - 8| \left|\sqrt[3]{x} + 4\right|}{\left|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right|} \tag{1.7}$$

para todo $x \in (7, 9)$.

Ya hemos logrado expresar el lado derecho de la igualdad (1.6) como el producto

$|x - 8|g(x)$, donde

$$g(x) = \frac{\left|\sqrt[3]{x} + 4\right|}{\left|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right|}.$$

para todo $x \in (7, 9)$.

Ahora tratemos de acotar superiormente $g(x)$ en $(7, 9)$ o en un subconjunto de este intervalo. En primer lugar, tenemos que

$$
\begin{aligned}
x \in \ (8-1, 8+1) \iff & \ 7 < x < 9 && (1.8)\\
\iff & \ -1 < x - 8 < 1 \\
\iff & \ |x-8| < 1. && (1.9)
\end{aligned}
$$

A continuación, de (1.8), vamos a "construir" $g(x)$. Como la raíz cúbica es una función creciente, se tiene:

$$
\begin{aligned}
7 < x < 9 &\iff \sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{9} \\
&\iff 0 < \sqrt[3]{7} + 4 < \sqrt[3]{x} + 4 < \sqrt[3]{9} + 4 \\
&\implies -\left(\sqrt[3]{9} + 4\right) < \sqrt[3]{x} + 4 < \sqrt[3]{9} + 4 \\
&\iff \left|\sqrt[3]{x} + 4\right| < \sqrt[3]{9} + 4;
\end{aligned}
$$

es decir, se tiene que:

$$
7 < x < 9 \implies \left|\sqrt[3]{x} + 4\right| < \sqrt[3]{9} + 4. \tag{1.10}
$$

Por otro lado:

$$
7 < x < 9 \iff 2\sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{x} < 2\sqrt[3]{9} \quad \text{y} \quad 7 < x < 9 \iff \sqrt[3]{7^2} < \sqrt[3]{x^2} < \sqrt[3]{9^2},
$$

de donde, $7 < x < 9$ implica

$$
\sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{9^2} + 2\sqrt[3]{9},
$$

y se sigue que

$$
\begin{aligned}
7 < x < 9 &\iff \sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} < \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{9^2} + 2\sqrt[3]{9} \\
&\iff \sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} + 4 < \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4 < \sqrt[3]{9^2} + 2\sqrt[3]{9} + 4 \\
&\iff \frac{1}{\sqrt[3]{9^2} + 2\sqrt[3]{9} + 4} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} < \frac{1}{\sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} + 4} \\
&\implies \frac{-1}{\sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} + 4} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} < \frac{1}{\sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} + 4} \\
&\iff \frac{1}{\left|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right|} < \frac{1}{\sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} + 4};
\end{aligned}
$$

es decir:

$$7 < x < 9 \implies \frac{1}{\left|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right|} < \frac{1}{\sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} + 4}. \tag{1.11}$$

Finalmente, es fácil verificar que [1]

$$\frac{\sqrt[3]{9} + 4}{\sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} + 4} < 1.$$

Por tanto, de (1.10) y (1.11), obtenemos

$$\frac{|x-8|\left|\sqrt[3]{x} + 4\right|}{\left|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right|} < |x-8|$$

siempre que $|x-8| < 1$. De esta última desigualdad y de (1.7), tenemos que si $|x-8| < 1$, se cumple:

$$\left|\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right) - 12\right| < |x-8|. \tag{1.12}$$

Entonces, para que se verifiquen las desigualdades (1.5) y (1.12), es necesario que

$$|x-8| < 1 \quad \text{y} \quad |x-8| < \epsilon.$$

De modo que, si definimos

$$\delta = \text{mín}\{1, \epsilon\},$$

obtenemos que $0 < |x-8| < \delta$ implica

$$\left|\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right) - 12\right| < \epsilon. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.3. Demostrar que $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 - 8}{x+2} = -8$.

Demostración. En este caso, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x+2}$ y $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - (-2)| < \delta$, se verifique la

[1] Para verificar esta desigualdad, procederíamos a verificar que $\sqrt[3]{9} + 4 < \sqrt[3]{7^2} + 2\sqrt[3]{7} + 4$, para lo cual deberíamos verificar, a su vez, que $\sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{7^2}$, lo cual es verdadero, pues la función raíz cúbica es una función creciente y $9 < 7^2$.

desigualdad

$$\left| \frac{2x^2 - 8}{x+2} - (-8) \right| < \epsilon. \tag{1.13}$$

Observemos que:

$$\left| \frac{2x^2 - 8}{x+2} - (-8) \right| = 2 \left| \frac{(x+2)^2}{x+2} \right|$$

para todo $x \neq -2$. Además, si suponemos que x toma valores tales que $0 < |x+2|$, la expresión anterior queda en:

$$\left| \frac{2x^2 - 8}{x+2} - (-8) \right| = 2 \left| x+2 \right|.$$

Entonces, para que la desigualdad (1.13) se verifique, es suficiente que

$$2|x+2| < \epsilon,$$

lo que equivale a

$$|x+2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \frac{\epsilon}{2},$$

tenemos que si $0 < |x+2| < \delta$, se verificaría que

$$\left| \frac{2x^2 - 8}{x+2} - (-8) \right| < \epsilon. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.4. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-1} = -3$.

Demostración. En este caso, $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{x-1}$ y $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$\left| \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-1} - (-3) \right| < \epsilon.$$

Observemos que:

$$\left| \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-1} - (-3) \right| = 2 \left| \frac{(x-1)^2}{x-1} \right|$$

si $x \neq 1$. Por lo tanto, el δ buscado es $\frac{\epsilon}{2}$. □

EJERCICIO 1.5. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} = -5$.

Demostración. En este caso, $f(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2}$ y $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} - \{1,2\}$. Sea $\epsilon > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta$ y $x \neq 2$, se verifique la desigualdad

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} - (-5)\right| < \epsilon. \tag{1.14}$$

Podemos observar que:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} - (-5)\right| &= 7\left|\frac{(x-1)^2}{(x-2)(x-1)}\right| \\ &= \frac{7}{|x-2|}|x-1|\end{aligned}$$

para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$. Para acotar superiormente el factor $\dfrac{1}{|x-2|}$, supongamos que $x \in (1-\delta', 1+\delta')$ para $\delta' = \frac{1}{2}$[2]; es decir, supongamos que

$$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \tag{1.15}$$

que equivale a suponer que

$$|x-1| < \frac{1}{2}. \tag{1.16}$$

Ahora, a partir de (1.16) y (1.15), construimos el factor $\dfrac{1}{x-2}$:

$$\begin{aligned}|x-1| < \frac{1}{2} &\Longrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow -\frac{3}{2} < x-2 < -\frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{|x-2|} < 2 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{|x-2|}|x-1| < 2|x-1|.\end{aligned}$$

[2] No es difícil mostrar que las hipérbolas $\frac{1}{|x-2|}$ no están acotadas superiormente para valores de $\delta' \geq 1$. Por ello, se tomó un valor menor que 1.

Por tanto, si $0 < |x-1| < \dfrac{1}{2}$ y $x \neq 2$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} - (-5)\right| &= \frac{7}{|x-2|}|x-1| \\ &< 14|x-1|;\end{aligned}$$

es decir, si $0 < |x-1| < \dfrac{1}{2}$ y $x \neq 2$, tenemos

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} - (-5)\right| < 14|x-1|. \tag{1.17}$$

Entonces, para que las desigualdades (1.17) y (1.14) se cumplan, es necesario que:

$$|x-1| < \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad |x-1| < \frac{\epsilon}{14}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{14}\right\},$$

tenemos que si $0 < |x-1| < \delta$ y $x \in \operatorname{dom}(f)$, se verificaría que

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2} - (-5)\right| < \epsilon. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.6. Demostrar que: $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} = +\infty.$

Demostración. En este caso, $f(x) = \dfrac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|}$ y $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} - \{2, -\frac{3}{5}\}$. Sea $R > 0$. Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$, se verifique la desigualdad

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} > R. \tag{1.18}$$

Observemos que:

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} = \frac{(5-x)(2x-1)}{|x-2||5x+3|} \tag{1.19}$$

Acabamos de obtener una expresión de la forma $\dfrac{g(x)}{|x-2|}$, con

$$g(x) = \frac{(5-x)(2x-1)}{|5x+3|},$$

donde $\operatorname{dom}(g) = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{5}\}$.

Ahora procedamos a acotar inferiormente $g(x)$. Para esto, supongamos que x toma valores cercanos a 2; es decir, supongamos que $x \in \ (2-1, 2+1)$. Entonces obtenemos:

$$1 < x < 3 \tag{1.20}$$

que equivale a:

$$|x-2| < 1. \tag{1.21}$$

De (1.20) se obtiene que:

$$2 < 5-x < 4 \quad , \quad 1 < 2x-1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{18} < \frac{1}{|5x+3|}$$

por lo tanto:

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|5x+3|} > \frac{1}{9},$$

de donde:

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|x-2||5x+3|} > \frac{1}{9|x-2|}.$$

Entonces, para que la desigualdad (1.18) se verifique es necesario que:

$$|x-2| < 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{9|x-2|} > R,$$

lo que equivale a

$$|x-2| < 1 \quad \text{y} \quad |x-2| < \frac{1}{9R}.$$

Por lo tanto, si definimos

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{9R}\right\},$$

tenemos que si $0 < |x-2| < \delta$, se verificaría que

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} > R. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.7. Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0$.

Demostración. En este caso $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $\operatorname{dom}(f)=\mathbb{R}-\{0\}$. Sea $\epsilon>0$. Debemos hallar un $R<0$ tal que si $x<R$, se verifique la desigualdad

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}-0\right|<\epsilon. \tag{1.22}$$

Sabemos que para todo $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, se tiene $|\operatorname{sen} x|\leq 1$; por lo tanto, se verifica $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}$ para todo $x\neq 0$.

Ahora bien, para que la desigualdad (1.22) se verifique, es suficiente que $\dfrac{1}{|x|}<\epsilon$, lo que equivale a $\dfrac{1}{\epsilon}<|x|$; por lo tanto, para que (1.22) se verifique, es suficiente que

$$x>\frac{1}{\epsilon}\quad\text{o}\quad x<-\frac{1}{\epsilon}.$$

Podemos, entonces, definir

$$R=-\frac{1}{\epsilon},$$

de donde, $x<R$ implica $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}-0\right|<\epsilon$ que es lo que queríamos demostrar. $\square$

EJERCICIO 1.8. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

Solución. Sea $h\colon[-5,5]-\{4\}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x)=\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}.$$

Dado que h es una función que puede ser vista como el cociente de dos funciones, la primera acción que llevaríamos a cabo para calcular $\displaystyle\lim_{x\to4}h(x)$, sería utilizar el teorema del límite de un cociente, 1.7. Para ello, deberemos averiguar, en primer lugar, si el límite del denominador de la función h cuando x tiende a 4 es distinto de 0. Sin embargo, por los teoremas de: álgebra de límites, 1.6, límite de una composición, 1.11; y los límites de una constante, ***T1***, y límite de la identidad, ***T2***, se tiene:

$$\lim_{x\to4}1-\sqrt{5-x}=1-\sqrt{5-\lim_{x\to4}x}=1-\sqrt{5-4}=1-1=0.$$

De manera que no es posible aplicar teorema referido.

Por lo tanto, para poder calcular este límite seguiremos otra estrategia[3]. Observemos que, para todo $x \in [-5, 5]$ y $x \neq 4$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} &= \left(\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}\right) \\
&= \frac{9-(5+x)}{1-(5-x)}\left(\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}\right) \\
&= -\frac{4-x}{4-x}\left(\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}\right);
\end{aligned}$$

es decir, tenemos que

$$\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = -\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

para todo $x \in [-5, 5]$ y $x \neq 4$.

Ahora bien, si definimos para todo $x \in [-5, 5]$ y $x \neq 4$,

$$g(x) = -\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}},$$

obtenemos que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in [-5, 5]$ y $x \neq 4$, y podemos, por lo tanto, aplicar 1.2, siempre que exista $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$. Entonces, procedamos a verificar la existencia de éste último límite.

En este caso sí es posible aplicar el teorema del límite de un cociente, pues al ser el numerador y denominador funciones continuas, obtenemos:

$$\lim_{x \to 4} -\left(3+\sqrt{5+x}\right) = -6 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 4} 1+\sqrt{5-x} = 2,$$

de donde al ser el límite del denominador distinto de 0, el teorema del límite de un cociente, 1.7, nos permite proceder de la manera siguiente:

$$\lim_{x \to 4} g(x) = \lim_{x \to 4} -\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

[3]Ésta no es la única forma de calcular este límite. Por ejemplo, si consideramos las funciones $g(x) = \sqrt{5+x}$ y $f(x) = \frac{3-x}{1-\sqrt{10-x^2}}$ para todo $x \in [-5, 5]$ y $x \neq 4$, obtenemos que $h(x) = f(g(x))$ para todo $x \in [-5, 5] - \{4\}$, y, una vez verificadas las hipótesis del teorema de cambio de variable, 1.12, podemos aplicarlo para calcular el límite requerido.

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 4} 1+\sqrt{5-x}}{\lim\limits_{x\to 4} -\left(3+\sqrt{5+x}\right)}$$
$$= \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

De modo que, por el teorema 1.2, se tiene que

$$\lim_{x\to 4} h(x) = \lim_{x\to 4} g(x) = -\frac{1}{3}. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.9. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Solución. Sea $f\colon (-1,1)-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}.$$

Es claro que no podemos aplicar el teorema del límite de un cociente directamente, sino después de "racionalizar" $f(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\
&= \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.
\end{aligned}$$

Ahora, por el teorema 1.2, tenemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 1. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.10. Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Solución. Sea $f\colon (0,+\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}.$$

Para calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, es necesario, antes, manipular $f(x)$ algebraicamente[4].

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} &= \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}}.
\end{aligned}$$

Observemos que nuestro problema se reduce a calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}}.$$

Puesto que, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = 0$ por ***T13***, el límite del denominador es distinto de cero y podemos aplicar el teorema de límite de un cociente, 1.6. De donde:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}}} = 1. \qquad \square$$

[4]Nótese que, si $f(x) = \varphi(x)/\psi(x)$, $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = 0$, y existe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, entonces, necesariamente $\lim\limits_{x\to a} \varphi = 0$, pues $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\psi(x)) = L\cdot 0$. Por lo tanto se tiene una condición necesaria para la existencia del límite de $f(x)$, aunque en la mayoría de casos esta condición también es suficiente, por lo tanto, debemos manipular algebraicamente la expresión $f(x)$ para encontrar su límite.

EJERCICIO 1.11. Calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

Solución. Sea $f\colon \mathbb{R}-\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}. \tag{1.23}$$

Dado que:

$$x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2),$$

obtenemos de (1.23) que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$, con $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida[5] por:

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2+ax+a^2}.$$

Por lo tanto, por el teorema 1.2, tenemos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \frac{a-1}{3a^2}. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.12. Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

Solución. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(h) = \frac{(x+h)^3-x^3}{h}.$$

Para calcular el límite de ésta función, desarrollemos $f(h)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} &= \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} \\ &= \left(3x^2+3xh-h^2\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2+3xh-h^2\right) = 3x^2. \qquad \square$$

[5]Nótese que x^2+ax+a^2 es distinto de 0 para todo $x \in \mathbb{R}$, pues el discriminante del polinomio de segundo grado es negativo.

EJERCICIO 1.13. Calcule $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}$.

Solución. Sea $f\colon \mathbb{R} - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a}.$$

Sean $g\colon \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ y $h(x) = x - a$. Entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{(x-a)} = \lim_{x \to a} g(h(x)).$$

Verifiquemos si las funciones g y h satisfacen las condiciones del teorema de cambio de variable, 1.12.

Puesto que:

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} (x-a) = 0,$$

en 1.12, $b = 0$.

Ahora, debemos determinar si g es continua en 0 o si existen $\lim\limits_{y \to 0} g(y)$ y un intervalo centrado en a en el cual $h(x)$ es diferente de 0 (salvo, tal vez, en a).

Como g no es continua en 0, pero existe

$$\lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1,$$

por ***T19***, debemos hallar un $r > 0$ tal que $h(x) \neq 0$ para todo $x \in (a-r, a+r)$. Entonces, puesto que $h(x) = x - a$ se anula únicamente en a, podemos tomar cualquier $r > 0$, por ejemplo $r = 1$.

Ahora, todas las condiciones del teorema de cambio de variable, 1.12, son satisfechas,por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} g(h(x)) &= \lim_{y \to 0} g(y) \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1, \end{aligned}$$

es decir:

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a} = 1. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.14. Calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$.

Solución. Sea $f\colon \mathbb{R} - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}.$$

Debemos encontrar

$$\lim_{x\to a} f(x).$$

En primer lugar, no podemos aplicar el teorema del límite de un cociente. Por ello, vamos a operar con el numerador de $f(x)$ de tal manera que podamos utilizar la fórmula ***T19***; para ello, utilicemos la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Para todo $x \neq a$, obtenemos:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot 2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a};$$

es decir:

$$f(x) = \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

Vamos a utilizar el teorema del límite del producto de funciones, 1.6. Para ello, vamos a calcular antes los límites

$$\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}.$$

1. Puesto que la función coseno es continua, por el límite de una composición, 1.11, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) &= \cos\left(\lim_{x\to a}\frac{x+a}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{a+a}{2}\right).\end{aligned}$$

   Por lo tanto:

$$\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = \cos a. \tag{1.24}$$

2. Por 1.2 y el teorema de cambio de variable 1.12, mediante un procedimiento parecido al ejercicio anterior, tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)} = 1, \tag{1.25}$$

pues

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{2} = 0.$$

Finalmente, de (1.24) y (1.25),

$$\lim_{x\to a} f(x) = \cos a \cdot 1 = \cos a. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.15. Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$.

Solución. Sea $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

Realicemos el cambio de variable considerando la función $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ definida por:

$$g(x) = \arctan x.$$

Al ser esta una función biyectiva, es inversible, y se tiene que:

$$f(x) = f\left(g^{-1}\left(g(x)\right)\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$; por tanto, podemos aplicar el teorema de cambio de variable 1.12 a las funciones $f \circ g^{-1}$ y g. En efecto:

- $b = \lim_{x\to 0} \arctan x = 0$, puesto que g es una función continua;
- por 1.6 y ***T19***

$$\lim_{t\to 0} f\left(g^{-1}(t)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{\frac{\operatorname{sen} t}{t}} = 1;$$

- $g(x) = 0$ solo cuando $x = 0$.

Por tanto, por el teorema de cambio de variable obtenemos que:

$$\lim_{x\to 0} f\left(g^{-1}(g(x))\right) = \lim_{t\to 0} f\left(g^{-1}(t)\right) = 1;$$

de donde[6]:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.16. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 2x}{\operatorname{sen} 3x}$.

Solución. Sea $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{\arctan 2x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Para todo $x \neq 0$, podemos expresar $f(x)$ de la siguiente manera:

$$\frac{\arctan 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{2}{3}\,\frac{\arctan 2x}{2x} \cdot \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}.$$

Entonces, f es el producto de dos funciones y, por 1.6, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}},$$

ya que cada límite del lado derecho de la igualdad existe. En efecto:

- El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan 2x}{2x}$, se calcula mediante el cambio de variable $t = \arctan 2x$, de donde $2x = \tan t$. Como $x \to 0$, por la continuidad de la función arcotangente, $t \to 0$; por lo tanto, se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan 2x}{2x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = 1;$$

[6]Podemos generalizar esta forma de calcular límites de la siguiente manera: si necesitáramos calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, y definiríamos $u = g(x)$ donde g es una función biyectiva, tenemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{u\to b} f\left(g^{-1}(u)\right)$ con $b = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Cuando utilicemos de esta manera el teorema del cambio de variable, escribiremos $u \to b$ cuando $x \to a$ (u tiende a b cuando x tiende a a). Nótese que el requisito de la biyectividad de la función g es suficiente para satisfacer los requisitos del teorema de cambio de variable.

- Por 1.6 y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x} = 1 \neq 0$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

□

EJERCICIO 1.17. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{1-\sqrt{x}}$.

Solución. Sea $f\colon [0,+\infty) - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{1-\sqrt{x}}.$$

Sea $u = x-1$, entonces $u \to 0$ si $x \to 1$; por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{1-\sqrt{x}} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+u)\right)}{1-\sqrt{1+u}}, \tag{1.26}$$

si el límite del lado derecho existiera. Por lo tanto, intentemos calcular este último. Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta,$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+u)\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{u}{2}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi u}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right) \\
&= -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right).
\end{aligned}$$

De modo que, el límite del lado derecho de la igualdad (1.26), se reduce a:

$$\lim_{u\to 0} \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{1-\sqrt{1+u}}. \tag{1.27}$$

Pero:

$$\frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{1-\sqrt{1+u}} = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{\frac{\pi u}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{1-\sqrt{1+u}}.$$

Ahora bien, por un lado, tenemos:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{\frac{\pi u}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1, \tag{1.28}$$

donde $t = \dfrac{\pi u}{2}$.

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} \frac{\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{1-\sqrt{1+u}} &= \lim_{u\to 0} \left(\frac{\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{1-\sqrt{1+u}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+u}}{1+\sqrt{1+u}} \right) \\
&= -\lim_{u\to 0} \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{1+u}) \\
&= -\pi,
\end{aligned}$$

de donde, junto con (1.28), se tiene que:

$$\lim_{u\to 0} \frac{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{1-\sqrt{1+u}} = -1\cdot(-\pi) = \pi.$$

Entonces, por (1.26) y (1.27):

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}} = \pi. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.18. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

Solución. Sea $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$[7] la función definida por:

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}.$$

[7]En este caso, $\operatorname{dom}(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{x \in \mathbb{R} : 2k\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}\} - \{0\}$, pero para el cálculo de $\lim_{x\to 0} f(x)$, es suficiente tomar un subconjunto de éste.

Si multiplicamos al numerador y al denominador por

$$(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x),$$

y utilizamos ***T19*** junto con el teorema de producto de límites, 1.6, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)}=\frac{1}{4}.\qquad\square$$

EJERCICIO 1.19. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}$.

Solución. Sea $g\colon \mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}\}\longrightarrow\mathbb{R}$, la función definida por:

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}.$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}&=\frac{\cos x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{\cos x-\operatorname{sen} x}\\&=-\frac{\cos x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{\operatorname{sen} x-\cos x}=-\cos x,\end{aligned}$$

pues $\operatorname{sen} x-\cos x\neq 0$ para $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$, con $k\in\mathbb{Z}$. Entonces:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}-\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}.\qquad\square$$

EJERCICIO 1.20. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}$.

Solución. Sea $f\colon\mathbb{R}-\{1,2,0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}.$$

Para poder utilizar ***T21***, debemos probar la existencia de los límites del exponente y de la base.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}=\frac{3}{2}$, por 1.6, puesto que el límite del denominador es distinto de 0.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, por ***T19***.

Puesto que el límite de la base es mayor que 0, concluimos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}. \qquad \square$$

EJERCICIO 1.21. Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

Solución. Sea $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$, la función definida por:

$$f(x) = (\tan x)^{\tan 2x}.$$

Si analizamos los límites de la base y del exponente, se tiene que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan x = \tan\frac{\pi}{4} = 1,$$

ya que la función tangente es continua; y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x$ no existe, puesto que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+} \tan 2x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \tan 2x = +\infty,$$

entonces, no podemos aplicar el límite sobre potencias de funciones, ***T21***, directamente. Sin embargo, sí lo podemos utilizar realizando previamente una manipulación algebraica, obteniendo:

$$\begin{aligned}(\tan x)^{\tan 2x} &= (1+(\tan x-1))^{\tan 2x}\\ &= (1+(\tan x-1))^{\frac{\tan x-1}{\tan x-1}\tan 2x}\\ &= \left((1+(\tan x-1))^{\frac{1}{\tan x-1}}\right)^{(\tan x-1)\tan 2x};\end{aligned}$$

es decir:

$$(\tan x)^{\tan 2x} = \left((1+(\tan x-1))^{\frac{1}{\tan x-1}}\right)^{(\tan x-1)\tan 2x}.$$

Ahora, por ***T23***, tenemos que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [1+(\tan x-1)]^{\frac{1}{\tan x-1}} = e, \tag{1.29}$$

ya que $(\tan x-1)\to 0$ cuando $x\to\frac{\pi}{4}$.

Además, como

$$\begin{aligned}(\tan x - 1)\tan 2x &= (\tan x - 1)\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\\ &= (\tan x - 1)\frac{2\tan x}{(1-\tan x)(1+\tan x)},\end{aligned}$$

y si tomamos $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, tenemos que:

$$(\tan x - 1)\tan 2x = -2\frac{\tan x}{1+\tan x};$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x - 1)\tan 2x &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[-2\frac{\tan x}{1+\tan x}\right]\\ &= -2\frac{1}{1+1};\end{aligned}$$

es decir:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x - 1)\tan 2x = -1. \tag{1.30}$$

Ahora ya podemos aplicar ***T21***, pues el límite de la base y es igual a e, que es mayor que 0, y el límite del exponente también existe. Entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\left(1+(\tan x - 1)\right)^{\frac{1}{\tan x - 1}}\right)^{(\tan x - 1)\tan 2x}\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\left(1+(\tan x - 1)\right)^{\frac{1}{\tan x - 1}}\right)^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x - 1)\tan 2x}\\ &= e^{-1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x} = \frac{1}{e}.$$ □

EJERCICIO 1.22. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

Solución. En este caso, $f(x) = \sqrt[x]{1-2x}$ y $\operatorname{dom}(f) = (-\infty, \frac{1}{2}] - \{0\}$. Los límites de la base y del exponente son, respectivamente, los siguientes:

$$\lim_{x\to 0}(1-2x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Como el límite del exponente no existe, no podemos aplicar el límite de potencia de funciones, ***T21***. Pero puesto que:

$$\begin{aligned}
\sqrt[x]{1-2x} &= (1-2x)^{\frac{1}{x}} \\
&= (1+(1-2x-1))^{\frac{1}{x}} \\
&= (1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}\frac{-2x}{x}} \\
&= \left((1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-2}
\end{aligned}$$

para todo $x \leq \frac{1}{2}$ y $x \neq 0$, y por ***T23***, conocemos que:

$$\lim_{x\to 0} (1+(-2x))^{\frac{1}{-2x}} = e,$$

podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 0} \left((1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{-2} = e^{-2}. \qquad \square$$

Cálculo en una variable

El presente fascículo recolecta las principales definiciones, proposiciones y teoremas sobre Límites y Continuidad, vistos en el curso de Cálculo en Una Variable, dictado en la carrera de Matemática de la Escuela Politécnica Nacional. Además, presenta un compendio de ejercicios resueltos referentes a este tema, los cuales han sido desarrollados por Andrés Merino y Evelyn Cueva, estudiantes de la Facultad de Ciencias, bajo la supervisión de Juan Carlos Trujillo, profesor del Departamento de Matemática.
Cualquier corrección, propuesta de cambio o mejora del presente trabajo se la puede realizar al correo: `mat.andresmerino@gmail.com`.

Proyecto CLAVEMAT

ISBN 978-0000-000-00-2

9 780000 000002 >