PARÁMETROS DE CALIFICACIÓN

El puntaje de cada pregunta es 2,0 puntos y se distribuye en cada una de las preguntas de la siguiente manera:

Pregunta 1: 1,0 puntos por cada literal.

Pregunta 2: 0,5 puntos por cada uno de los literales a) y c); y 1,0 puntos el literal b).

Pregunta 3: 1,5 puntos por el literal a); y 0,5 puntos por el literal b).

Pregunta 4: 1,0 puntos por cada literal.

Pregunta 5: 1,0 puntos por cada literal.

RESOLUCIÓN

1. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, determinar el valor de

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)$.

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}2k$.

Solución.

a) Aplicando las propiedades de la suma, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1) &= \sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n(n+1) + n\\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\end{aligned}$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n}2k &= 2+4+\sum_{k=3}^{n}2k-2-4\\ &= \sum_{k=1}^{n}2k-6\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}k-6\\ &= 2\frac{n(n+1)}{2}-6\\ &= n(n+1)-6.\end{aligned}$$

□

Solución alternativa.

a) Primero, notemos que

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2,$$

por lo tanto, haciendo el cambio de variable

$$l = k-1,$$

tenemos que

k	l
1	0
n	$n-1$

Por lo tanto, la suma queda

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} l^2$$
$$= \frac{(n-1)(n)(2(n-1)+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

b) Tenemos el cambio de variable

$$l = k-2, \qquad k = l+2,$$

tenemos que

k	l
3	1
n	$n-2$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n} 2k &= \sum_{l=1}^{n-2} 2(l+2) \\
&= \sum_{l=1}^{n-2} (2l+4) \\
&= 2\sum_{l=1}^{n-2} l + 4\sum_{l=1}^{n-2} 1 \\
&= 2\frac{(n-2)((n-2)+1)}{2} + 4(n-2) \\
&= (n-2)(n-1) - 4(n-2) \\
&= n(n+1) - 6.
\end{aligned}$$ □

2. Considere el intervalo $[1,6]$ y la función

$$\begin{aligned} f : [1,6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 4-x. \end{aligned}$$

a) Sean P la partición uniforme de orden 5 del intervalo y C las etiquetas izquierdas de esta, escribir P y C.

b) Dibujar la función f y los rectángulos que determinan $S(f,P,C)$.

c) Utilizando el gráfico, ¿cuál es le valor de $S(f,P,C)$?

Solución.

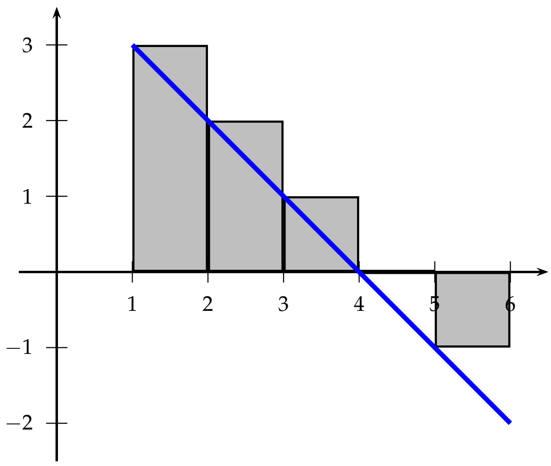
a) Tomemos $a=1$ y $b=63$. Como P es una partición uniforme de orden 5, tenemos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6-1}{5} = 1,$$

por lo tanto, tenemos que

$$P = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad \text{y} \qquad C = \{1,2,3,4,5\}.$$

b) El gráfico es:



c) Utilizando el gráfico anterior, tenemos que $S(f,P,C)$ es la suma de las áreas de los rectángulos del gráfico, por lo tanto

$$S(f,P,C) = 3+2+1+0-1 = 5.$$ □

3. Considere el intervalo $[1,3]$ y la función

$$\begin{aligned} f\colon [1,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{3}. \end{aligned}$$

a) Sean P la partición uniforme de orden $n \in \mathbb{N}^*$ del intervalo y C las etiquetas izquierdas de esta. Determinar $S(f,P,C)$.

b) Utilizar el literal anterior para determinar $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución.

a) Tomemos $a = 1$ y $b = 3$. Como P es una partición uniforme, tenemos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n},$$

Ahora, para las etiquetas, tenemos que

$$c_k = a + (k-1)\Delta x = 1 + \frac{2}{n}(k-1)$$

con $k = 1, \ldots, n$. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} S(f,P,C) &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}(k-1)\right)^2}{3}\frac{2}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (4 - 8k + 4k^2 - 4n + 4kn + n^2)\frac{2}{3n^3} \\ &= \frac{2}{3n^3}\left(4\sum_{k=1}^{n} k^2 + (4n-8)\sum_{k=1}^{n} k + (4 - 4n + n^2)\sum_{k=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{2}{3n^3}\left(4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (4n-8)\frac{n(n+1)}{2} + (4-4n+n^2)n\right) \\ &= \frac{2}{3n^3}\left(\frac{13n^3 - 12n^2 + 2n}{3}\right) \\ &= \frac{2}{9}\left(13 - \frac{12}{n} + \frac{2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

b) Como f es una función polinomial, es continua, y por lo tanto, integrable. Con esto, utilizando el literal anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S(f,P,C) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{9}\left(13 - \frac{12}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \\ &= \frac{26}{9}. \end{aligned}$$

□

4. Utilizando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo para determinar la derivada de las funciones definidas por

a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt.$

b) $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{t}{t^1+1}\,dt.$

Solución.

a) Dado que la función $t \mapsto \operatorname{sen}(t^2)$ es la composición de una función trigonométrica con una función polinómica, se tiene que es continua, por lo tanto

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt\right) = \operatorname{sen}(x^2),$$

para $x \in \mathbb{R}$.

b) Dado que la función $t \mapsto \frac{t}{t^1+1}$ es continua en todo $x \neq -1$ y la función $x \to x^2$ es derivable, se tiene que

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \frac{t}{t^1+1}\,dt\right) = \frac{x^2}{x^2+1}(x^2)' = \frac{2x^3}{x^2+1},$$

para $x \neq 1$. □

5. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx.$

b) $\displaystyle\int x^2\cos(2x)\,dx.$

Solución.

a) Considerando el cambio de variable

$$u = 2 + \operatorname{sen}(x), \qquad du = \cos(x)dx,$$

con esto, se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}}\\ &= \int u^{-1/2}du\\ &= \frac{u^{1/2}}{1/2} + C\\ &= 2\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)} + C\end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

b) Mediante el método de integración con partes, tomemos

$$u = x^2, \qquad du = 2xdx$$

y

$$v = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}, \qquad dv = \cos(2x)dx$$

con lo cual

$$\int x^2\cos(2x)\,dx = \frac{x^2\operatorname{sen}(2x)}{2} - \int x\operatorname{sen}(2x)dx.$$

Nuevamente por el método de integración por partes, tomemos

$$u = x, \qquad du = dx$$

y

$$v = -\frac{\cos(2x)}{2}, \qquad dv = \operatorname{sen}(2x)dx,$$

con lo que se tiene

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen}(2x)dx &= \frac{x^2 \operatorname{sen}(2x)}{2} - \left(-\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx\right) \\ &= \frac{x^2 \operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{x\cos(2x)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + C\end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. □

Parámetros de calificación

El puntaje de cada pregunta es 2,0 puntos y se distribuye en cada una de las preguntas de la siguiente manera:

Pregunta 1: 0,7 puntos por cada uno de los literales a) y b); y 0,6 puntos el literal c).

Pregunta 2: 1,0 puntos por cada literal.

Pregunta 3: 1,0 puntos por cada literal.

Pregunta 4: 1,0 puntos por cada literal.

Pregunta 5: 1,0 puntos por cada literal.

El puntaje de la pregunta extra es de 0,5 puntos por cada literal.

Resolución

1. Considere el intervalo $[0,8]$ y la función

$$\begin{aligned} f:[0,8] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3-x}{2}. \end{aligned}$$

a) Sean P la partición uniforme de orden 4 del intervalo y C las etiquetas centrales de esta. Dibujar la función f y los rectángulos que determinan $S(f,P,C)$.

b) Sean P la partición uniforme de orden $n \in \mathbb{N}^*$ del intervalo y C las etiquetas izquierdas de esta. Determinar $S(f,P,C)$.

c) Utilizar el literal anterior para determinar $\displaystyle\int_0^8 f(x)\,dx$.

Solución.

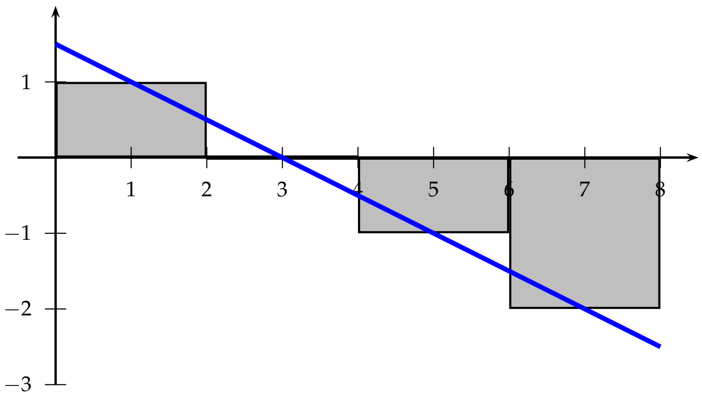
a) Tomemos $a=0$ y $b=8$. Como P es la partición es uniforme de orden 4, tenemos que

$$\Delta x = \frac{8-0}{4} = 2,$$

por lo tanto, tenemos que

$$P = \{0,2,4,6,8\} \qquad \text{y} \qquad C = \{1,3,4,7\}.$$

Con esto, el gráfico es:



b) Tomemos $a = 0$ y $b = 2$. Como P es una partición uniforme, tenemos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8}{n},$$

Ahora, para las etiquetas, tenemos que

$$c_k = a + (k-1)\,\Delta x = \frac{8}{n}(k-1)$$

con $k = 1, \ldots, n$. Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
S(f, P, C) &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{3 - \frac{8}{n}(k-1)}{2}\,\frac{8}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-8k + 3n + 8)\frac{4}{n^2} \\
&= \frac{4}{n^2}\left(-8\sum_{k=1}^{n} k + (3n+8)\sum_{k=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{4}{n^2}\left(-8\frac{n(n+1)}{2} + (3n+8)n\right) \\
&= \frac{4}{n^2}\left(-n^2 + 4n\right) \\
&= -4 + \frac{16}{n}.
\end{aligned}$$

c) Como f es una función polinomial, es continua, y por lo tanto, integrable. Con esto, utilizando el literal anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^8 f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S(f, P, C) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(-4 + \frac{16}{n}\right) \\
&= -4.
\end{aligned}$$

□

2. *a*) Sea $n \in \mathbb{N}^*$, determinar el valor de $\displaystyle\sum_{k=10}^{n} (6k^2 - 2k)$.

   b) Utilizando el primer teorema fundamental del cálculo para determinar la derivada de función definida por $G(t) = \displaystyle\int_{-1}^{2t} \frac{\ln(x^2)}{x^2+1}\,dx$, para $t \in \mathbb{R}$.

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=10}^{n} (6k^2 - 2k) &= \sum_{k=1}^{9} (6k^2 - 2k) + \sum_{k=10}^{n} (6k^2 - 2k) - \sum_{k=1}^{9} (6k^2 - 2k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (6k^2 - 2k) - \sum_{k=1}^{9} (6k^2 - 2k) \\
&= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k - 6\sum_{k=9}^{n} k^2 + 2\sum_{k=9}^{n} k \\
&= 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} - 6\frac{9(9+1)(18+1)}{6} + 2\frac{9(9+1)}{2} \\
&= n(n+1)(2n+1) - n(n+1) - 1620.
\end{aligned}$$

□

b) Dado que la función $x \mapsto \frac{\ln(x^2)}{x^2+1}$ es continua por ser combinación de funciones continua y las funciones $t \mapsto -1$ y $t \mapsto 2t$ son derivables, se tiene que

$$G'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-1}^{2t} \frac{\ln(x^2)}{x^2+1}\,dx\right) = \frac{\ln((2t)^2)}{(2t)^2+1}(2t)' - \frac{\ln((-1)^2)}{(-1)^2+1}(-1)' = \frac{2\ln(4t^2)}{4t^2+1},$$

para $t \in \mathbb{R}$.

3. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(\theta)\,d\theta.$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x+4}{(x-2)(x+1)}\,dx.$

Solución.

a) Notemos que

$$\int \operatorname{sen}^3(\theta)\,d\theta = \int \operatorname{sen}^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta = \int (1-\cos^2(\theta))\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta,$$

con esto, tomemos el cambio de variable

$$u = \cos(\theta) \qquad \text{y} \qquad du = -\operatorname{sen}(\theta)\,dx,$$

tenemos

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(\theta)\,d\theta &= \int (1-\cos^2(\theta))\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta\\ &= \int u^2 - 1\,du\\ &= \frac{1}{3}u^3 - u + c\\ &= \frac{1}{3}\cos^3(\theta) - \cos(\theta) + c.\end{aligned}$$

□

b) Utilizando fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{(x-2)(x+1)}\,dx &= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= \int \frac{2}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx\\ &= 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

4. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\operatorname{sen}(x)\,dx.$

Solución.

a) Tomemos el cambio de variable

$$x = 2\,\text{sen}(u) \qquad dx = 2\cos(u)\,du$$

con lo cual, tenemos

x	u
0	0
2	π

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_0^\pi \sqrt{4-4\,\text{sen}^2(u)}\cos(u)\,dx \\ &= \int_0^\pi 2\cos^2(u)\,du \\ &= (u+\cos(u)\,\text{sen}(u))\big|_0^\pi \\ &= \pi.\end{aligned}$$

b) Tomando

$$u = x, \qquad du = dx$$

y

$$v = -\cos(x) \qquad dv = \text{sen}(x)\,dx$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\,\text{sen}(x)\,dx &= -x\cos(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx \\ &= -\pi\cos(\pi) + 0\cos(0) + \text{sen}(x)\Big|_0^\pi \\ &= \pi + \text{sen}(\pi) - \text{sen}(0) \\ &= \pi.\end{aligned}$$

□

5. Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,dx.$ *b*) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x}{x^2-4}\,dx.$

Solución.

a) Tomemos $b > 2$ y calculemos

$$\int_2^b \frac{3}{x^4}\,dx = -\frac{2}{x^3}\Big|_2^b = -\frac{1}{b^3} + \frac{1}{8}.$$

Con esto, tomando el límite, se tiene que

$$\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{3}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$

b) Dado que la función $x \mapsto \frac{2x}{x^2-4}$ tiene una asíntota en 2, se debe estudiar como una integral impropia. Para esto, tomemos $b \in \,]0,[$ y calculemos

$$\int_0^b \frac{2x}{x^2-4}\,dx.$$

Para esto, considerando el cambio de variable

$$u = x^2 - 4, \qquad du = 2x\,dx,$$

se tiene

x	u
0	-4
b	b^2-4

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{2x}{x^2-4}\,dx &= -\int_{-4}^{b^2-4} \frac{1}{u}\,du\\ &= \ln|u|\Big|_{-4}^{b^2-4}\\ &= \ln(b^2-4)-\ln(4).\end{aligned}$$

Con esto, tomando el límite

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x}{x^2-4}\,dx &= \lim_{b\to 2^+}\int_0^b \frac{2x}{x^2-4}\,dx\\ &= \lim_{b\to 2^+}\big(\ln(b^2-4)-\ln(4)\big)\\ &= -\infty,\end{aligned}$$

por lo tanto, la integral diverge. □

- Por puntaje extra:

  a) Enuncie el segundo teorema fundamental del cálculo, ¿para qué se lo usa?

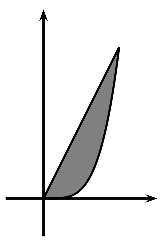
  b) ¿De dónde surge la fórmula de integración por partes? Cuando se aplica este método, ¿cómo se selecciona la u y el dv?

---

1. Determinar (utilizando directamente la fórmula) el área de la región comprendida entre el eje x y las curvas de ecuación $y = x\,\mathrm{sen}(x)$, $x = 0$ y $x = \pi$. (2pt)

   Solución. Consideremos la función
   $$\begin{aligned} f\colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x\,\mathrm{sen}(x), \end{aligned}$$
   la fórmula para calcular el área indicada es
   $$\int_0^{\pi} f(x)\,dx,$$
   por lo tanto, debemos calcular
   $$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(x)\,dx.$$
   Tomando
   $$u = x, \qquad du = dx$$
   y
   $$v = -\cos(x) \qquad dv = \mathrm{sen}(x)\,dx$$
   Tenemos que
   $$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x\,\mathrm{sen}(x)\,dx &= -x\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos(x)\,dx \\ &= -\pi\cos(\pi) + 0\cos(0) + \mathrm{sen}(x)\Big|_0^{\pi} \\ &= \pi + \mathrm{sen}(\pi) - \mathrm{sen}(0) \\ &= \pi. \end{aligned}$$
   Por lo tanto, el área de la región solicitada es π unidades cuadradas. □

2. La región del siguiente gráfico:



   está delimitada por las curvas de ecuaciones
   $$y = 2x \qquad \text{y} \qquad y = 2x^2$$

   a) Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje y. (2pt)
   b) En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido. (0.5pt)
   c) Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje y. (2pt)

d) En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido. (0.5pt)

Solución.

a) Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^2 \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme del intervalo $[0,1]$, de grosor Δx, con etiquetas $\{x_k : k = 1, \ldots n\}$, se genera una capa cilíndrica de radio x_k, altura $g(x_k) - f(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k \left(g(x_k) - f(x_k)\right) \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k \left(2x_k - 2x_k^2\right) \Delta x. \end{aligned}$$

b) Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x \left(g(x) - f(x)\right) \, dx \\ &= \int_0^1 2\pi x \left(2x - 2x^2\right) \, dx. \end{aligned}$$

□

c) Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y/2 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{y/2} \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme del intervalo $[0,2]$, de grosor Δy, con etiquetas $\{y_k : k = 1, \ldots n\}$, se genera una arandela de radio mayor $g(y_k)$, radio menor $f(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((g(y_k))^2 - (f(y_k))^2\right) \Delta y \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\sqrt{\frac{y_k}{2}}\right)^2 - \left(\frac{y_k}{2}\right)^2\right) \Delta y. \end{aligned}$$

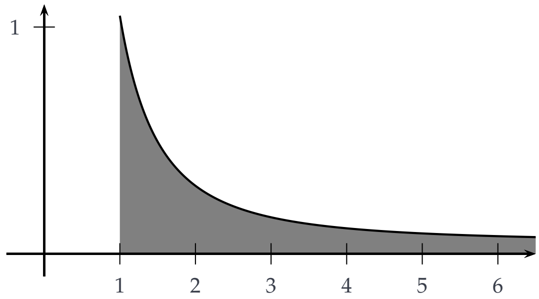
d) Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi \left((g(y))^2 - (f(y))^2\right) \, dy \\ &= \int_0^2 \pi \left(\left(\sqrt{\frac{y}{2}} - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)^2\right) \, dy. \end{aligned}$$

3. La región comprendida por el eje x y la gráfica de la función

$$\begin{aligned} f\colon [1,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

se muestra en el siguiente gráfico:



Como se observa, la región no está acotada, pero *¡sí se puede calcular su área!*

a) ¿Cómo sería la fórmula para calcular el área de este tipo de regiones? ¿Pueden este tipo de regiones tener un área finita? (1pt)

b) Aplique la fórmula que plantea para calcular el área de la región del gráfico. (1.5pt)

Solución.

a) Consideremos la región comprendida entre la función positiva

$$f\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$$

y el eje x, tenemos que el área puede ser aproximada mediante

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

donde, la aproximación será mejor mientras b tome valores mayores, llegando a ser igual cuando b tienda a $+\infty$, por lo tanto, la fórmula el cálculo de esta área sería

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx,$$

Si la integral anterior existe, el área de la región es finita.

b) Debemos calcular

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\, dx,$$

para esto, tomemos $b > 1$ y calculemos

$$\int_1^b \frac{1}{x^4}\, dx = -\frac{1}{3x^3}\bigg|_1^b = -\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3}.$$

Con esto, tomando el límite, se tiene que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$ □

4. Escriba la definición de suma de Riemann, ¿cómo ayuda esta definición al momento de resolver problemas de aplicaciones del cálculo integral? (1.5pt)

Solución. La definición de suma de Riemann es:

Sean $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ un función y (P, C) una partición etiquetada de $[a, b]$ de orden n, entonces

$$S(f, P, C) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

es la **suma de Riemann de f respecto a la partición etiquetada** (P, C).

Esta definición nos ayuda dado que permite aproximar, por ejemplo, área de regiones complejas, mediante la suma de áreas de regiones más simples como lo son los rectángulos; luego de esto, al tomar el límite, esta suma se transforma en una integral, la cual nos da el valor exacto del área. Es decir, la suma de Riemann nos ayudad puesto que aproxima problemas complejos mediante problemas más simples. □

Parámetros de calificación

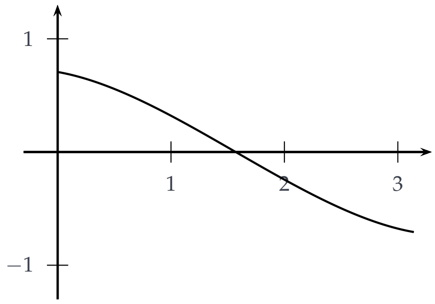
El puntaje de cada pregunta es 2,0 puntos.

Resolución

1. Utilizando directamente la fórmula, calcule el área comprendida entre la gráfica de la función

$$\begin{aligned} f : [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}} \end{aligned}$$

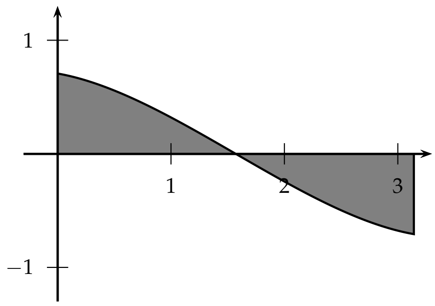
y el eje x. Notar que la gráfica de la función es:



Solución. Tenemos que el área entre las gráficas de las funciones es

$$A = \int_0^{\pi} |f(x) - 0|\, dx,$$

para calcular esta integral, primero, grafiquemos la región:



debemos determinar el punto donde la función toma el valor de 0, notemos que para $x \in [0,\pi]$, se tiene que

$$f(x) = 0 \iff \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}} = 0 \iff \cos(x) = 0 \iff x = \pi/2.$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |f(x)|\, dx &= \int_0^{\pi/2} |f(x)|\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |f(x)|\, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} f(x)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-f(x))\, dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx.$$

Analicemos la integral

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx,$$

considerando el cambio de variable

$$u = 2+\operatorname{sen}(x), \qquad du = \cos(x)dx,$$

se tiene que

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx = 2\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)} + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$. Con lo cual,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} |f(x)|\,dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}}\,dx.\\ &= \left(2\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \left(2\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\\ &= 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\\ &= 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

por lo tanto, el área es $4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$. □

2. El extremo izquierdo de una varilla de π metros se ubica en el centro de coordenadas de un plano cartesiano, con esto, se tiene que su densidad está dada por

$$\begin{aligned}\delta\colon [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \operatorname{sen}(x).\end{aligned}$$

Determinar la masa de esta varilla, además, determinar el punto en el que se podría equilibrar la varilla (utilizar directamente las fórmulas).

Solución. La masa de la varilla está dada por

$$m = \int_0^{\pi} \delta(x)\,dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2.$$

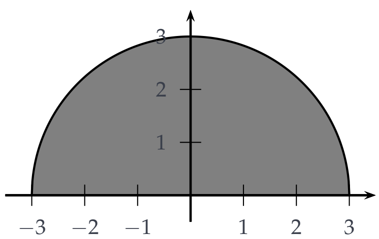
Por otro lado, su momento de inercia respecto al origen del sistema coordenado es

$$M_0 = \int_0^{\pi} x\delta(x)\,dx = \int_0^{\pi} x\operatorname{sen}(x)\,dx = (\operatorname{sen}(x) - x\cos(x))\Big|_0^{\pi} = 0 - \pi(-1) - (0-0) = \pi.$$

Con esto, tenemos que su centro de gravedad está en

$$\bar{x} = \frac{M_0}{m} = \frac{\pi}{2}.$$ □

3. Un sólido tiene por base la figura que se muestra a continuación:



Este es un semicírculo de radio 3, además, las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados. Plantee una suma de Riemann que aproxime el valor del volumen de este sólido, con ayuda de esto, plantee una integral que calcule el valor del volumen del sólido.

Solución. Para el intervalo $[-3,3]$, sea $P = \{x_k : k = 0, \ldots, n\}$ una partición regular de grosor $\Delta x > 0$ y orden $n \in \mathbb{N}^*$, con etiquetado $C = \{x_k : k = 1, \ldots, n\}$. Para $k = 1, \ldots, n$, en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, la figura generada la podemos aproximar con un prisma de cara cuadrada, cuyo grosor es Δx, y el lado de su cara cuadrada es $\sqrt{9 - x_k^2}$, de donde, el área de la cara del prisma sería

$$\left(\sqrt{9 - x_k^2}\right)^2,$$

con esto, el volumen de este prisma es

$$\left(\sqrt{9 - x_k^2}\right)^2 \Delta x.$$

Así, el volumen del sólido (que llamaremos V) puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{9 - x_k^2}\right)^2 \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} (9 - x_k^2) \Delta x. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que el valor exacto del volumen del sólido es

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} (9 - x_k^2) \Delta x = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx. \qquad \square$$

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y

$$f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$$

una función. Mediante sumas de Riemann, explique detalladamente cómo se podría aproximar la superficie que se genera al revolucionar la gráfica de la función f al rededor del eje x. Con esto, plantee la fórmula, mediante una integral, que calcula el valor exacto de la superficie.

Solución. Sea $P = \{x_k : k = 0, \ldots, n\}$ una partición regular del intervalo $[a, b]$ de grosor $\Delta x > 0$ y orden $n \in \mathbb{N}^*$, con etiquetado $C = \{x_k : k = 1, \ldots, n\}$. Para $k = 1, \ldots, n$, en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, la figura generada la podemos aproximar con un cono truncado con

- altura Δx;
- radio mayor $f(x_k)$;
- radio menor $f(x_{k-1})$;
- generatriz $\sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2}$.

Con esto, el área de la superficie puede ser aproximada por

$$\pi \left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2}$$

Así, el área de la superficie (que llamaremos A) pude ser aproximada por

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2} \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x}\right)^2} \Delta x. \end{aligned}$$

Ahora, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi \left(f(x_{k-1}) + f(x_k) \right) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x} \right)^2} \Delta x \\ &= \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \end{aligned}$$

□

5. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y $n \in \mathbb{N}^*$. Tomando

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_k = a + k\Delta x \qquad \text{y} \qquad y_k = f(x_k),$$

para $k = 0, \ldots, n$, la aproximación por la regla de trapecios de orden n de la integral de f es

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta x.$$

Explicar detalladamente el origen de esta fórmula.

Solución. □

---

1. Explique las relaciones que existen entre los límites iterados y el límite de una función. (1.0pt)

Solución. En $\mathbb{R}^2$, sean $f:\Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $a = (a_1, a_2) \in \Omega'$, si existen

$$\lim_{(x,y)\to a} f(x,y), \qquad \lim_{x\to a_1}\lim_{y\to a_2} f(x,y) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to a_2}\lim_{x\to a_1} f(x,y),$$

entonces todos estos son iguales. □

2. Sea

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,2)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^4+(y-2)^2}. \end{aligned}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\lim\limits_{y\to 2} f(x,y)$. (1.0pt)

b) Calcule el límite de la función cuando (x,y) tiende a $(1,2)$ por la trayectoria de ecuación $y-2=(x-1)^2$. (1.0pt)

Solución.

a) Para $x \neq 1$ fijo, calculemos

$$\lim_{y\to 2}\frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^4+(y-2)^2} = \frac{(x-1)^2(2-2)}{(x-1)^4+(2-2)^2} = \frac{0}{(x-1)^4} = 0,$$

con esto, calculemos

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2}\frac{(x-1)^2(y-2)}{(x-1)^4+(y-2)^2}\right) = \lim_{x\to 2}(0) = 0.$$

Así,

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 2} f(x,y) = 0.$$

b) Definamos la trayectoria r por

$$\begin{aligned} \alpha: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (t, 2+(t-1)^2). \end{aligned}$$

Determinemos el valor t tal que $\alpha(t) = \big(t, 2+(t-1)^2\big) = (1,2)$, en este caso, $t=1$. Ahora, calculemos el límite de f a través de la trayectoria definida por α,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1} f(\alpha(t)) &= \lim_{t\to 1} f\left(t, 2+(t-1)^2\right) \\ &= \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^2(2+(t-1)^2-2)}{(t-1)^4+(2+(t-1)^2-2)^2} \\ &= \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^4}{2(t-1)^4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

3. Sea el campo escalar

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2+3xy. \end{aligned}$$

a) Utilizando la definición, calcule las derivadas parciales de f en el punto $(1,0)$. (1.0pt)

b) En base a lo anterior, determine $\nabla f(1,0)$. (0.4pt)

c) Utilizando el literal anterior, determine $f'((1,0);(-1,1))$. (0.4pt)

d) Si nos ubicamos en el punto $(1,0)$ y nos movemos con dirección $(-1,1)$, ¿la función crece o decrece? (0.2pt)

Solución.

a) Por definición de derivada parcial se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) &= f'((1,0);(1,0)) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+3(1+h)(0)-((1)^2+3(1)(0))}{h} \\ &= 2.\end{aligned}$$

De manera similar se calcula la segunda derivada parcial

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) &= f'((1,0);(0,1)) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1,h)-f(1,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(1)^2+3(1)(h)-((1)^2+3(1)(0))}{h} \\ &= 3.\end{aligned}$$

b) Se tiene que

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) = (2,3).$$

c) Tenemos que

$$f'((1,0);(-1,1)) = \nabla f(1,0)\cdot(-1,1) = (2,3)\cdot(-1,1) = 1.$$

d) Dado que $f'((1,0);(-1,1))$ es positivo, la función crece. □

4. Considere que diseña un robot para escalar una montaña. Cuando el robot está en las coordenadas $(1,2)$, los giroscopios de este detectan que la pendiente en la dirección $(1,1)$ es 1 mientras que la pendiente en la dirección $(-1,1)$ es -2. Con esto datos, determine (explicando el procedimiento) la dirección que debe seguir el robot para descender por la montaña lo más rápido posible. Además, determine (explicando el procedimiento) la dirección que debe seguir el robot si se desea que este se mantenga a una altitud constante. (2.0pt)

Solución. Supongamos que la altura de la montaña está dada por un campo escalar

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

La dirección que debe seguir el robot para descender por la montaña lo más rápido posible es $-\nabla f(1,2)$, por lo tanto, buscaremos el gradiente de f en $(1,2)$.

Con los datos, tenemos que

$$f'((1,2);(1,1)) = 1 \qquad \text{y} \qquad f'((1,2);(-1,1)) = -2,$$

por otro lado, sabemos que

$$f'((1,2);(1,1)) = \nabla f(1,2) \cdot (1,1) \qquad \text{y} \qquad f'((1,2);(-1,1)) = \nabla f(1,2) \cdot (-1,1),$$

por lo tanto

$$\nabla f(1,2) \cdot (1,1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \nabla f(1,2) \cdot (-1,1) = -2.$$

Si tomamos $\nabla f(1,2) = (u,v)$, tenemos que

$$1 = \nabla f(1,2) \cdot (1,1) = (u,v) \cdot (1,1) = u + v$$

y

$$-2 = \nabla f(1,2) \cdot (-1,1) = (u,v) \cdot (-1,1) = -u + v,$$

por lo tanto

$$u = 3/2 \qquad \text{y} \qquad v = -1/2.$$

Con esto, se tiene que

$$\nabla f(1,2) = (3/2, -1/2),$$

por lo tanto, la dirección que se debe seguir para descender lo más rápido posible es $(-3/2, 1/2)$.

Por otro lado, dado que el gradiente es perpendicular a la curva de nivel, la cual es la trayectoria por la cual la altitud es constante, para determinar la dirección que debe seguir el robot para que mantenga una altitud constante debe ser perpendicular al vector gradiente; por lo tanto, buscamos un vector perpendicular al gradiente, se este (a,b), necesitamos que

$$0 = (a,b) \cdot \nabla f(1,2) = (a,b) \cdot (3/2, -1/2) = 3a/2 - b/2.$$

Con esto, tomando un valor arbitrario para a, por ejemplo $a = 1$, tenemos que $b = 3$, con lo cual, la dirección buscada es $(1,3)$. $\square$

5. Considere el campo vectorial

$$\begin{aligned} G\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x^2yz,\ zx - y,\ z - x). \end{aligned}$$

   a) ¿El punto $(1,1,0)$ es una fuente o un sumidero? (0.5pt)

   b) Calcule $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(G))(x,y,z)$. (1.5pt)

Solución.

a) Para determinar si es una fuente o sumidero calculemos la divergencia en este punto. Tenemos que

$$\operatorname{div}(G)(x,y,z) = \frac{\partial G}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial G}{\partial y}(zx - y) + \frac{\partial G}{\partial z}(z - x) = 2xyz - 1 + 1 = 2xyz.$$

Evaluando en el punto $(1,1,0)$, tenemos que

$$\operatorname{div}(G)(1,1,0) = 2(1)(1)(0) = 0,$$

por lo tanto, este punto no es una fuente ni un sumidero.

b) Por propiedades, sabemos que

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(G))(x,y,z) = 0. \qquad \square$$

6. Considere el campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \cos(2x)e^{1-y}. \end{aligned}$$

   a) Determine $\nabla f(0,1)$ y $H_f(0,1)$. (0.8pt) *b*) Determine la aproximación cuadrática de f en el punto $(0,1)$. (0.8pt)

c) Utilice el literal anterior para calcula aproximadamente el valor de $\cos(0{,}2)e^{0{,}1}$. (0.4pt)

Solución.

a) Tenemos que

$$\nabla f(x,y) = (-2\operatorname{sen}(2x)e^{1-y}, -\cos(2x)e^{1-y})$$

y

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -4\cos(2x)e^{1-y} & 2\operatorname{sen}(2x)e^{1-y} \\ 2\operatorname{sen}(2x)e^{1-y} & \cos(2x)e^{1-y} \end{pmatrix}.$$

Evaluando en $(0,1)$ tenemos que

$$\nabla f(0,1) = (0,-1) \qquad \text{y} \qquad H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) La aproximación cuadrática de f en el punto $(0,1)$ está dada por

$$\begin{aligned} Q_f(x,y) &= f(0,1) + \nabla f(0,1)\cdot((x,y)-(0,1)) + \frac{1}{2}((x,y)-(0,1))H_f(0,1)((x,y)-(0,1))^T \\ &= 1 + (0,-1)\cdot(x,y-1) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= 2 - y - 2x^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2. \end{aligned}$$

c) Notemos que

$$\cos(0{,}2)e^{0{,}1} = f(0{,}1, 0{,}9) \approx Q_f(0{,}1, 0{,}9) = 2 - (0{,}9) - 2(0{,}1)^2 + \frac{1}{2}(0{,}9-1)^2 = 1{,}085. \qquad \square$$

1. Considere el intervalo $[0, 10]$ y la función

$$\begin{aligned} f\colon [-3,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x+1. \end{aligned}$$

a) Sean P la partición uniforme de orden 6 del intervalo y C las etiquetas derechas de esta. Dibujar la función f y los rectángulos que determinan $S(f, P, C)$.
b) Sean P la partición uniforme de orden $n \in \mathbb{N}^*$ del intervalo y C las etiquetas derechas de esta. Determinar $S(f, P, C)$.
c) Utilizar el literal anterior para determinar $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$.

Solución.

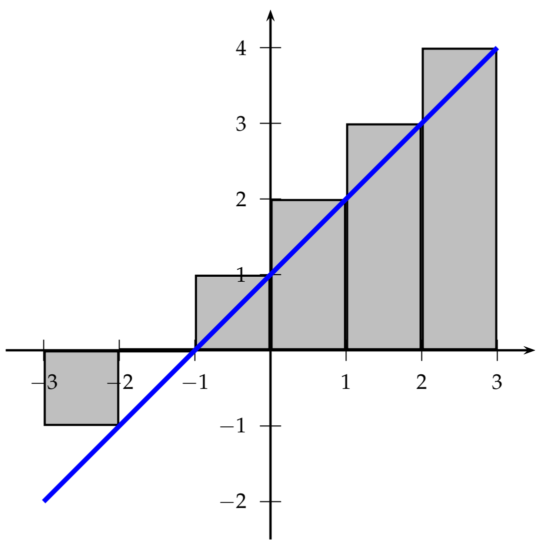
a) Tomemos $a = -3$ y $b = 3$. Como P es la partición es uniforme de orden 6, tenemos que

$$\Delta x = \frac{3-(-3)}{6} = 1,$$

por lo tanto, tenemos que

$$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \qquad \text{y} \qquad C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Con esto, el gráfico es:



b) Tomemos $a = -3$ y $b = 3$. Como P es una partición uniforme, tenemos que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6}{n},$$

Ahora, para las etiquetas, tenemos que

$$c_k = a + k\Delta x = -3 + \frac{6}{n}k$$

con $k = 1, \ldots, n$. Con esto, tenemos que

$$S(f, P, C) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \left(-3 + \frac{6}{n}k + 1\right) \frac{6}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (6k - 2n) \frac{6}{n^2} \\
&= \frac{6}{n^2} \left(6 \sum_{k=1}^{n} k - 2n \sum_{k=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{6}{n^2} \left(6 \frac{n(n+1)}{2} - 2n^2\right) \\
&= \frac{6}{n^2} \left(n^2 + 3n\right) \\
&= 6 + \frac{18}{n}.
\end{aligned}$$

c) Como f es una función polinomial, es continua, y por lo tanto, integrable. Con esto, utilizando el literal anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S(f,P,C) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{18}{n}\right) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

□

2. *a*) Utilizando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo calcular $\displaystyle\int_0^2 x\cos(\pi x^2)\,dx$.

   b) Utilizando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo determinar la derivada de la función definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt$, para $x > 0$.

Solución.

a) Tomemos el cambio de variable

$$u = \pi x^2 \qquad du = 2\pi x\,dx$$

con lo cual, tenemos

x	u
0	0
2	4π

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x\cos(\pi x^2)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi} \cos(u)\,du \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{sen}(u)\right)\Big|_0^{4\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{sen}(4\pi) - \operatorname{sen}(0)\right) = 0.
\end{aligned}$$

b) Dado que la función definida por

$$t \mapsto \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$$

es continua entre 1 y x^2 y la función $x \to x^2$ es derivable, se tiene que

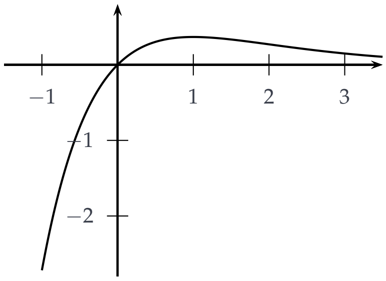
$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\,dt\right) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}(x^2)' = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}(2x) = \frac{2\operatorname{sen}(x^2)}{x}.$$

□

3. Utilizando directamente la fórmula, calcule el área comprendida entre la gráfica de la función

$$\begin{aligned} f\colon [-1,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto xe^{-x} \end{aligned}$$

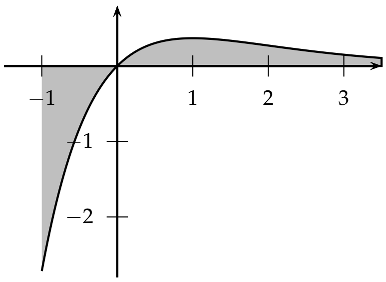
y el eje x. Note que la gráfica de la función es



Solución. Tenemos que el área entre las gráficas de las funciones es

$$A = \int_{-1}^{+\infty} |f(x) - 0|\, dx,$$

para calcular esta integral, primero, grafiquemos la región:



debemos determinar el punto donde la función toma el valor de 0, notemos que para $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

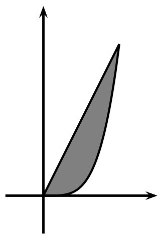
$$f(x) = 0 \iff xe^{-x} = 0 \iff x = 0.$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} |f(x)|\, dx &= \int_{-1}^{0} |f(x)|\, dx + \int_{0}^{+\infty} |f(x)|\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} (-f(x))\, dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\, dx \\ &= \int_{-1}^{0} -xe^{-x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\, dx \\ &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

□

4. La región del siguiente gráfico:



está delimitada por las curvas de ecuaciones

$$y = 2x \qquad \text{y} \qquad y = 2x^2$$

a) Mediante una partición en el eje y, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje y.

b) En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

c) Mediante una partición en el eje x, plantee una suma de Riemann que aproxime el volumen de sólido de revolución generado por la región al girar en torno al eje y.

d) En base al literal anterior, plantee una integral para calcular el volumen del sólido.

Solución.

a) Dado que realizaremos la partición en el eje y, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y/2 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{y/2} \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme del intervalo $[0,2]$, de grosor Δy, con etiquetas $\{y_k : k = 1, \ldots n\}$, se genera una arandela de radio mayor $g(y_k)$, radio menor $f(y_k)$ y espesor Δy, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left((g(y_k))^2 - (f(y_k))^2 \right) \Delta y \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \pi \left(\left(\sqrt{\frac{y_k}{2}} \right)^2 - \left(\frac{y_k}{2} \right)^2 \right) \Delta y. \end{aligned}$$

b) Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi \left((g(y))^2 - (f(y))^2 \right) \, dy \\ &= \int_0^2 \pi \left(\left(\sqrt{\frac{y}{2}} - \left(\frac{y}{2} \right)^2 \right)^2 \right) \, dy. \end{aligned}$$

□

c) Dado que realizaremos la partición en el eje x, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} g\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} f\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x^2 \end{aligned}$$

Si llamamos V al volumen del sólido y realizamos una partición uniforme del intervalo $[0,1]$, de grosor Δx, con etiquetas $\{x_k : k = 1, \ldots n\}$, se genera una capa cilíndrica de radio x_k, altura $g(x_k) - f(x_k)$ y espesor Δx, por lo tanto tenemos que el volumen puede ser aproximado por

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k \left(g(x_k) - f(x_k) \right) \Delta x \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k \left(2x_k - 2x_k^2 \right) \Delta x. \end{aligned}$$

d) Del literal anterior, tomando el límite cuando Δx tiende a 0, tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x \left(g(x) - f(x) \right) \, dx \\ &= \int_0^1 2\pi x \left(2x - 2x^2 \right) \, dx. \end{aligned}$$

5. La Sonda Solar Parker es una misión de la NASA cuyo objetivo es acercarse a la corona del Sol. Suponga que la sonda detecta que en un punto determinado del espacio, la temperatura en la dirección $(1,1,1)$ disminuye a razón de dos unidades, en la dirección $(1,0,1)$ aumenta a razón de una unidad y en la dirección $(0,-1,1)$ disminuye en razón de una unidad. Si, además de esto, la sonda detecta que está en

un lugar donde la temperatura puede afectar su funcionamiento y debe alejarse de tal manera que la temperatura disminuya a la mayor razón, ¿qué dirección debe seguir la sonda?

Solución. Sean $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función que modela la temperatura y $a \in \mathbb{R}^3$ el punto donde se encuentra la sonda. Se conoce que

$$f'(a;(1,1,1)) = -2, \qquad f'(a;(1,0,1)) = 1 \qquad \text{y} \qquad f'(a;(0,-1,1)) = -1.$$

Se busca la dirección de máximo decrecimiento de la función, la cual es contraria al gradiente, por lo tanto, debemos calcular $\nabla f(a)$. Sabemos que

$$f'(a;(1,1,1)) = \nabla f(a)\cdot(1,1,1), \qquad f'(a;(1,0,1)) = \nabla f(a)\cdot(1,0,1) \qquad \text{y} \qquad f'(a;(0,-1,1)) = \nabla f(a)\cdot(0,-1,1$$

por lo tanto

$$\nabla f(a)\cdot(1,1,1) = -2, \qquad \nabla f(a)\cdot(1,0,1) = 1 \qquad \text{y} \qquad \nabla f(a)\cdot(0,-1,1) = -1$$

Si tomamos $\nabla f(a) = (u,v,w)$, tenemos que

$$-2 = \nabla f(a)\cdot(1,1,1) = (u,v,w)\cdot(1,1,1) = u+v+w,$$

$$1 = \nabla f(a)\cdot(1,0,1) = (u,v,w)\cdot(1,1,1) = u+w$$

y

$$-1 = \nabla f(a)\cdot(0,-1,1) = (u,v,w)\cdot(-1,1) = -v+w,$$

por lo tanto

$$u = 5 \qquad v = -3 \qquad \text{y} \qquad w = -4.$$

Con esto, se tiene que

$$\nabla f(a) = (5,-3,-4),$$

por lo tanto, la dirección que debe seguir la sonda es $(-5,3,4)$. □

6. Suponga que dentro de un lago existe una isla. Se conoce que la isla está en las coordenadas $(1,0)$ y la orilla del lago es la curva de ecuación $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$. Se desea determinar el punto de la orilla desde el cual se pueda construir un puente hacia la isla con la menor longitud posible. De un estudio previo, se sabe que en las coordenadas $(1/2,\ 3/2)$ de la orilla, la función de distancia tiene un punto crítico, determinar la naturaleza de este punto.

Solución. Se tiene que se debe minimizar la función

$$\begin{aligned} d\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto (x-1)^2 + y^2 \end{aligned}$$

con la restricción

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8.$$

Para esto, planteamos el lagrangeano del problema y obtenemos

$$L(\lambda,x,y) = x^2 + (y-1)^2 - \lambda(5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8),$$

para $(\lambda,x,y) \in \mathbb{R}^3$. Calculamos el gradiente de este:

$$\nabla L(\lambda,x,y) = \begin{pmatrix} -5x^2 + 6xy - 5y^2 + 8 \\ 2(x-1) - 10\lambda x + 6\lambda y \\ 2y - 10\lambda y + 6\lambda x \end{pmatrix}^T.$$

Sabemos que

$$\nabla L\left(\lambda, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = (0,0,0),$$

por lo tanto

$$\lambda = \frac{1}{4}.$$

Ahora tenemos que la hessiana es

$$H_L(\lambda, x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 6y - 10x & 6x - 10y \\ 6y - 10x & 2 - 10\lambda & 6\lambda \\ 6x - 10y & 6\lambda & 2 - 10\lambda \end{pmatrix},$$

evaluando, obtenemos

$$H_L(1/4, 1/2, 3/2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -12 \\ 4 & -1/2 & 3/2 \\ -12 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Dado que se tiene una restricción y que

$$(-1)^1 \det(H_L(1/4, 1/2, 3/2)) = 64,$$

se tiene que es un mínimo. □

- Por puntaje extra:

  a) Enuncie el segundo teorema fundamental del cálculo, ¿para qué se lo usa?

  b) ¿De dónde surge la fórmula de integración por partes? Cuando se aplica este método, ¿cómo se selecciona la u y el dv?
