Semestre 2019-2 Andrés Merino

1. Se tiene una imagen con escala HD (16 : 9), si se desea que al imprimirla tenga 10 cm de alto, ¿cuáles deben ser sus dimensiones? (1.0pt)

Solución.

Variables: Tomamos

- b: longitud de la base de la foto impresa, en cm.

Planteamiento: Para que se mantengan las proporciones, se debe cumplir que:

$$\frac{b}{10} = \frac{16}{9}$$

Resolución: Despejamos b y obtenemos

$$b = \frac{16}{9}10 = \frac{160}{9} = 17{,}78.$$

Respuesta: Las dimensiones deben ser $17{,}78 \times 10$ cm. □

2. Se tiene un foto de 16×10 cm. Si queremos reducir su área en un 50 % sin alterar sus proporciones, ¿cuáles deben ser sus nuevas medidas? (1.5pt)

Solución.

Variables: Tomamos

- b: ancho de la foto ampliada, en cm.
- h: alto de la foto ampliada, en cm.

Planteamiento: El área de la foto original es de 160 cm^2, por lo tanto, para que el área se amplíe 25 % se necesita que

$$b \cdot h = 160 - 160\frac{50}{100} = 80. \tag{1}$$

Por otro lado, para que se preserven las proporciones se necesita que

$$\frac{b}{h} = \frac{16}{10} \tag{2}$$

Resolución: Despejamos b en la ecuación (2) y tenemos

$$b = \frac{16}{10}h, \tag{3}$$

reemplazamos en (1), tenemos que

$$\left(\frac{16}{10}h\right) \cdot h = 80.$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{16}{10}h\right) \cdot h = 80 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{16}{10}h^2 = 80 \\
&\Longleftrightarrow \quad h^2 = \frac{10}{16} \cdot 80 \\
&\Longleftrightarrow \quad h = \sqrt{50} \approx 7{,}07.
\end{aligned}$$

Reemplazamos en (3) para obtener el valor de b:

$$b = \frac{16}{10}\left(\sqrt{50}\right) \approx 11{,}31.$$

Respuesta: Las nuevas medidas de la foto deben ser $11{,}31 \times 7{,}07$ cm, aproximadamente. □

3. Se han generado 2 animaciones, la primera de ellas con 1500 cuadros y la segunda con 1000 cuadros. Si se desea que la primera animación se reproduzca a 10 cuadros por segundo más rápida que la segunda y que juntas tengan una duración de medio minuto, ¿a qué velocidad se debe renderizar cada animación? (1.5pt)

Solución.

Variables: Tomamos

- v_1: velocidad de la primera animación, en cuadros por segundo.
- v_2: velocidad de la segunda animación, en cuadros por segundo.

Planteamiento: Para que la primera animación se reproduzca al doble de velocidad de la segunda se necesita que

$$v_1 = v_2 + 10. \tag{4}$$

Por otro lado, para que las animaciones duren medio minuto, se necesita que

$$\frac{1500}{v_1} + \frac{1000}{v_2} = 30 \tag{5}$$

Resolución: Reemplazamos (5) en (4), tenemos que

$$\frac{1500}{v_2 + 10} + \frac{1000}{v_2} = 30.$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1500}{v_2 + 10} + \frac{1000}{v_2} = 30 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2500v_2 + 10000}{(v_2 + 10)v_2} = 30 \\
&\Longleftrightarrow \quad 30{v_2}^2 - 2200v_2 - 10000 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad v_2 \approx -4{,}29 \quad \vee \quad v_2 \approx 77{,}63
\end{aligned}$$

Eliminamos la respuesta negativa y reemplazamos la positiva en en (4) para obtener el valor de v_1:

$$v_1 \approx (77{,}63) + 10 = 87{,}63.$$

Respuesta: La primera animación se debe renderizar a 88 cuadros por segundo y la segunda a 78 cuadros por segundo, aproximadamente. □

4. Resolver las siguientes inecuaciones:

   a) $5(2-3x) \leq -15$ (1.0pt)

   b) $\dfrac{8-5x}{x-x^2} \leq 1$ (1.5pt)

Solución.

a) Notemos que

$$\begin{aligned} 5(2-3x) \leq -15 &\iff 2-3x \leq -3 \\ &\iff -3x \leq -5 \\ &\iff x \geq \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

por lo tanto, la respuesta es

$$S = \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[.$$

b) Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{8-5x}{x-x^2} \leq 1 &\iff \frac{8-5x}{x-x^2} - 1 \leq 0, \\ &\iff \frac{8-5x-(x-x^2)}{x-x^2} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2+6x+8}{x-x^2} \leq 0 \\ &\iff \frac{(x-2)(x-4)}{x(1-x)} \leq 0 \end{aligned}$$

con esto, realizamos la tabla de factores:

	$]-\infty,0[$	0	$]0,1[$	1	$]1,2[$	2	$]2,4[$	4	$]4,+\infty[$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	0	$-$

Como buscamos los menores o iguales que 0, tenemos que la respuesta es

$$S =]-\infty, 0[\cup]1, 2] \cup [4, +\infty[.$$ □

5. Considere la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2-x}. \end{aligned}$$

En $x = -1$, ¿la función crece o decrece? (1.5pt)

Solución. Para responder la pregunta, primero calculemos la variación promedio de la función entre x y $x+h$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{x+h}{2-(x+h)} - \dfrac{x}{2-x}}{h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{(2-x)(x+h)-(2-x-h)x}{(2-x-h)(2-x)}}{h}\\
&= \frac{\dfrac{2h}{(2-x-h)(2-x)}}{h}\\
&= \frac{2h}{(2-x-h)(2-x)h}\\
&= \frac{2}{(2-x-h)(2-x)}.
\end{aligned}
$$

Ahora, calculemos la variación instantánea de la función tomando $h=0$:

$$\frac{2}{(2-x-0)(2-x)} = \frac{2}{(2-x)^2}.$$

Finalmente, evaluemos en $x=-1$ y tenemos que la variación instantánea de la función es ese punto es

$$\frac{2}{(2-(-1))^2} = \frac{2}{9}.$$

Como este número es positivo, tenemos que la función crece. $\square$

6. Considere las funciones

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (5t,\ 2-t^2) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x+3 \end{aligned}$$

Determine el valor de $g(1)$, $g(-1)$, $g(x+t)$ y $(g\circ f)(t)$, donde $x,t\in\mathbb{R}$.

Solución. Tenemos que

$$g(1) = (5,1), \qquad g(1) = (-5,1), \qquad g(x+t) = (5(x+t), 2-(x+t)^2)$$

y

$$(g\circ f)(t) = g(f(t)) = g(t+3) = (5(t+3), 2-(t+3)^2). \qquad \square$$

7. Se quiere imprimir en una pancarta dos imágenes cuadradas, una de ellas es a color y la otra es blanco y negro. El precio por imprimir la imagen a color es de \$10 el metro cuadrado y el de imprimir a blanco y negro es de \$7 el metro cuadrado. Por otra parte, la longitud de la pancarta debe ser 8 metros.

   a) Modele el costo de imprimir la pancarta en función de la longitud del lado de la imagen a color. (1.5pt)

   b) Si el lado de la imagen a color es de 3 metros, ¿cuánto costará la impresión? (0.5pt)

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- x: longitud del lado de la imagen a color, en m.
- y: longitud del lado de la imagen a blanco y negro, en m.
- $C(x)$: costo de imprimir la pancarta en función de la longitud de lado de la imagen a color, en dólares.

Planteamiento: Tenemos que la función del área es:

$$\begin{aligned} C\colon]0,8[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 10x^2 + 7y^2. \end{aligned}$$

Ahora, para que la pancarta mida 8 m es necesario que

$$x + y = 8,$$

de donde

$$y = 8 - x,$$

con esto, la función C nos queda

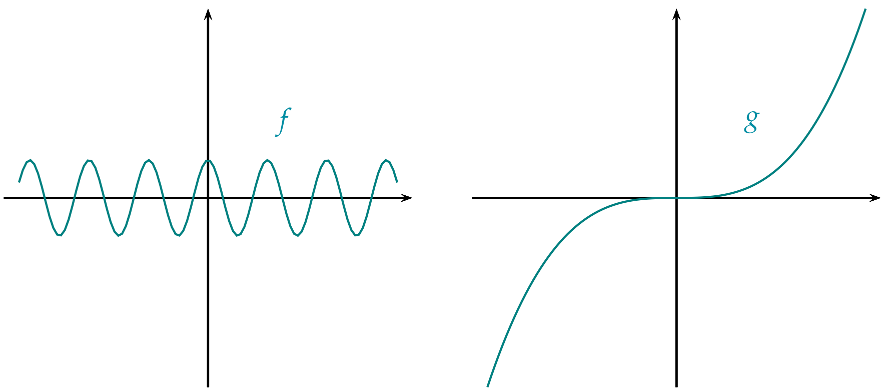
$$\begin{aligned} C\colon]0,8[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 10x^2 + 7(8-x)^2 = 17x^2 - 112x + 448. \end{aligned}$$

b) Evaluemos la función C en 3,

$$C(3) = 17(3)^2 - 112(3) + 448 = 265.$$

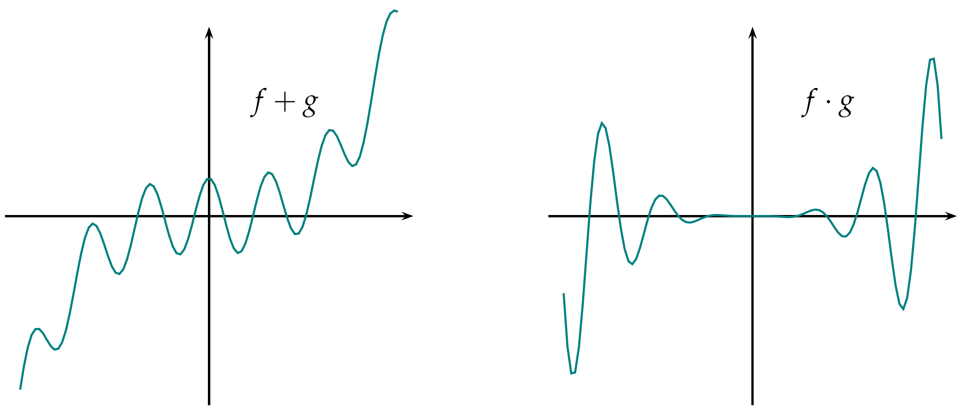
Por lo tanto, el costo de la impresión cuando el lado de la imagen a color sea 3 metros es de \$265. □

8. Considere las siguientes funciones: (1.0pt)



Determine gráficamente las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ (en gráficos separados).

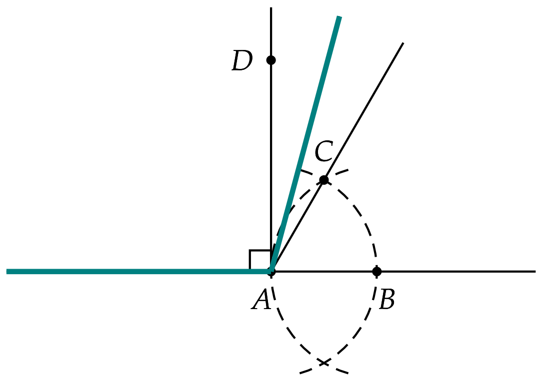
Solución. Tenemos las siguientes gráficas



□

1. Construir un ángulo de de 105°, explicando cada paso. (2.0pt)

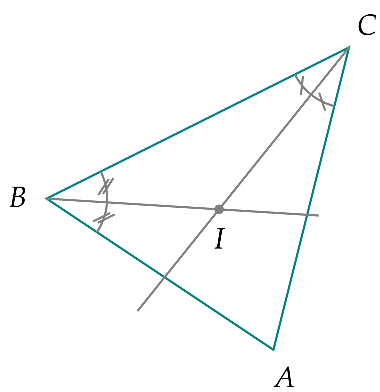
Solución.



a) Sobre una recta, colocamos un punto cualquiera A.
b) Con centro en A y cualquier radio, trazamos un círculo, a uno de los puntos en los que corta a la recta original lo llamamos B.
c) Con centro en B y radio hasta A, trazamos otro círculos. En una de las intersecciones entre los dos círculos colocamos el punto C.
d) Sobre el punto A, levantamos una recta perpendicular a la recta original, sobre esta perpendicular colocamos un punto cualquiera D.
e) Trazamos la bisectriz del ángulo CAD.
f) El ángulo coloreado es un ángulo de 105°. □

2. Dibujar un triángulo cualquiera (no equilátero ni isósceles) y encontrar su incentro (intersección de las bisectrices) explicando cada paso. (2.0pt)

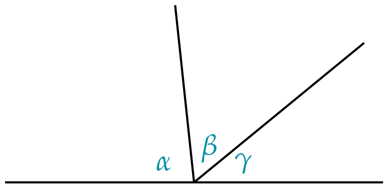
Solución.



a) Trazamos el triángulo ABC.
b) Trazamos la bisectriz del ángulo ABC y la bisectriz del ángulo BCA.

c) Colocamos el punto I en la intersección de las dos bisectrices, este punto es el incentro del triángulo. □

3. En la figura



el ángulo α es el doble de β y β es el triple de γ, encontrar la medida de los ángulos. (2.0pt)

Solución.

Variables: Tomamos

- α: medida del ángulo descrito en la figura.
- β: medida del ángulo descrito en la figura.
- γ: medida del ángulo descrito en la figura.

Planteamiento: Para que los ángulos guarden las relaciones descritas es necesario que

$$\alpha = 2\beta \qquad \text{y} \qquad \beta = 3\gamma$$

Por otro lado, dado que los ángulos forman un ángulo de 180°, se necesita que

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. \tag{1}$$

Resolución: Reemplazando en la ecuación (1), tenemos que

$$2\beta + 3\gamma + \gamma = 180^\circ,$$

reemplazando nuevamente,

$$2(3\gamma) + 3\gamma + \gamma = 180^\circ,$$

de donde se tiene que

$$10\gamma = 180^\circ,$$

y por lo tanto

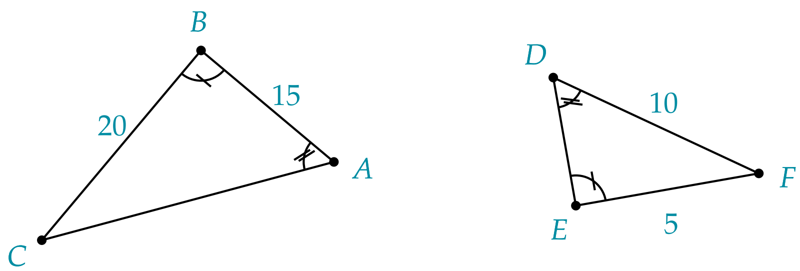
$$\gamma = 18^\circ.$$

Con esto, tenemos que

$$\beta = 54^\circ \qquad \text{y} \qquad \alpha = 108^\circ.$$

Respuesta: La medida del ángulo α es 108°, la del ángulo β es de 54° y la del ángulo γ es 18°. □

4. Los siguientes triángulos son semejantes, encontrar las medidas de los lados faltantes. (2.0pt)



Solución. Definamos

- x: Medida faltante en el primer triángulo
- y: Medida faltante en el segundo triángulo.

Gracias a que los triángulos son semejantes, se tiene que

$$\frac{20}{5} = \frac{15}{y} = \frac{x}{10},$$

por lo tanto, se tienen las siguientes igualdades:

$$\frac{15}{y} = \frac{20}{5} \quad \text{y} \quad \frac{x}{10} = \frac{20}{5},$$

de las cuales se sigue que

$$y = \frac{15 \cdot 5}{20} = 3{,}75 \quad \text{y} \quad x = \frac{20 \cdot 10}{5} = 40.$$

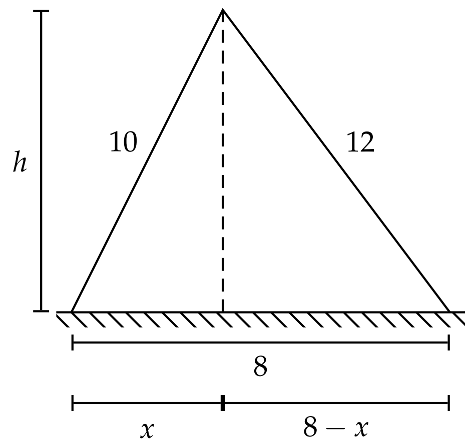
Así, las medidas faltantes en el primer y segundo triángulo son de 3.75 y 40, respectivamente. $\square$

5. Si al juntar dos escaleras de 10 m y 12 m se coloca sus bases a 8 m, ¿qué altura se alcanza?

Solución. Definimos

- x: la distancia entre la base de la escalera de 10 m a la base de la altura, en metros.
- h: la altura que que alcanzan las escaleras, en metros.

Tenemos el siguiente gráfico:



En los triángulos rectángulos que se obtiene, aplicamos el teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$x^2 + h^2 = 10^2 \quad \text{y} \quad (8 - x)^2 + h^2 = 12^2.$$

Resolviendo, tenemos que

$$x = \frac{5}{4} = 1{,}25,$$

reemplazando en la primera ecuación, tenemos que

$$(1,25)^2 + h^2 = 10^2,$$

de donde

$$h = \sqrt{10^2 - (1,25)^2} \approx 9{,}92.$$

Por lo tanto, se alcanza una altura aproximadamente 9.92 metros. $\square$

6. Si en un momento del día la sombra de un árbol mide 3 metros y la sombra de una persona mide 1 metro, determina la altura del árbol si se sabe que la altura de la persona es 1.60 m. (1.0pt)

Solución. Definamos

- h: altura del árbol en en m.

Por la proporcionalidad de los triángulos semejantes, tenemos

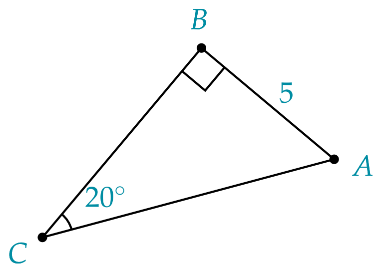
$$\frac{h}{1,6} = \frac{3}{1}, \tag{2}$$

de donde se sigue que

$$h = 3 \cdot 1{,}6 = 4{,}8.$$

Entonces, la altura del árbol es de 4.8 metros. □

7. En el siguiente triángulo rectángulo, determina las medidas de los lados restantes. (2.0pt)



Solución.

Variables: Tomemos

- x: medida del cateto restante y: medida de la hipotenusa.

Planteamiento: Utilizando el Teorema de Pitágoras, tenemos que

$$y^2 = 5^2 + x^2,$$

por otro lado, por la definición de la razón seno, tenemos que

$$\operatorname{sen}(20^\circ) = \frac{5}{y}.$$

Resolución: De la segunda ecuación, tenemos que

$$y = \frac{5}{\operatorname{sen}(20^\circ)} \approx 14{,}62,$$

reemplazando en la primera ecuación

$$(14{,}62)^2 \approx 5^2 + x^2,$$

de donde

$$x \approx \sqrt{(14{,}62)^2 - 5^2} \approx 13{,}74.$$

Respuesta: La medida del cateto faltante es de 13,74, aproximadamente, mientras que la de la hipotenusa es de 14,62 unidades, aproximadamente. □

- *Por puntaje extra:* Si de una cartulina de 12 cm por 13 cm se desea recortar cuadrados de las esquina para formar una caja sin tapa. Determinar las longitudes que puede tener el corte para que la caja tenga una capacidad mayor a 110 cm^3. (2.0pt)

1. Considere los puntos

$$A = (-3, 1) \qquad \text{y} \qquad B = (1, 3),$$

y la recta ℓ de ecuación

$$6x - 2y - 10 = 0.$$

a) Determine la ecuación de la mediatriz de los puntos A y B. (1.5pt)

b) Determine la pendiente de la recta ℓ. ¿Es ℓ perpendicular a la mediatriz de A y B? (0.5pt)

c) Determine el punto donde la recta ℓ corta a la mediatriz de los puntos A y B. (1.0pt)

Solución.

a) Primero, determinemos el punto medio entre A y B, llamémoslo C:

$$C = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(-2, 4) = (-1, 2)\,.$$

Ahora, determinemos la ecuación de la recta que pasa por A y B, tenemos que es:

$$y - 1 = \frac{3-1}{1-(-3)}(x - (-3))$$

que equivale a

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Por lo tanto, le pendiente de esta recta es $m_1 = \frac{1}{2}$.
Ahora, ya que la mediatriz es perpendicular, si m_2 es la pendiente de esta, es necesario que

$$m_1 m_2 = -1,$$

notemos que

$$m_1 m_2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}m_2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_2 = -2$$

Por lo tanto, la mediatriz es la recta de pendiente $m_2 = -2$ que pasa por el punto $D = (-1, 2)$, por lo tanto si ecuación es

$$y - 2 = -2\,(x - (-1))$$

que equivale a

$$y = -2x.$$

b) Para determinar la pendiente de la recta ℓ, despejemos y de su ecuación, obtenemos:

$$y = 3x - 5,$$

por lo tanto, la pendiente de esta recta es $m_3 = 3$.
Por otro lado, como

$$m_2 m_3 = (-2)3 = -6 \neq -1,$$

se tiene que las rectas no son perpendiculares.

c) Para determinar el punto donde las rectas se corta, resolvemos el sistema dado por las ecuaciones:

$$y = -2x \qquad \text{y} \qquad y = 3x - 5,$$

con lo que obtenemos $x = 1$ y $y = -2$, por lo tanto, el punto donde se cortan las rectas es $(1, -2)$. □

2. Determinar la ecuación y el foco de la parábola que pasa por los puntos $(0,0)$, $(60,0)$ y $(30,18)$, considere que la ecuación de la parábola es de la forma $x^2 + Dx + Ey + F = 0$. (2.0pt)

Solución. Dado que la parábola pasa por los tres puntos, se tiene que

- Para el punto $(0,0)$, se debe cumplir que
$$(0)^2 + D(0) + E(0) + F = 0$$
lo que equivale a
$$F = 0. \tag{1}$$
- Para el punto $(60,0)$, se debe cumplir que
$$(60)^2 + D(60) + E(0) + F = 0$$
lo que equivale a
$$60D + F = -3600. \tag{2}$$
- Para el punto $(30,18)$, se debe cumplir que
$$(30)^2 + D(30) + E(18) + F = 0$$
lo que equivale a
$$30D + 18E + F = -900. \tag{3}$$

Así, resolvemos el sistema dado por (1), (2) y (3):

$$\begin{cases} F = 0, \\ 60D + F = -3600, \\ 30D + 18E + F = -900. \end{cases}$$

Con esto, tenemos que

$$D = -60 \qquad E = 50 \qquad \text{y} \qquad F = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación es:

$$x^2 - 60x + 50y = 0.$$

Ahora, completando cuadrados, tenemos que la ecuación es equivalente a

$$(x-30)^2 = -50(y-18).$$

Dado que la ecuación estándar de la parábola que se abre para abajo es

$$(x-h)^2 = -4p(y-k),$$

tenemos que

$$h = 30, \qquad k = 18 \qquad \text{y} \qquad p = \frac{25}{2};$$

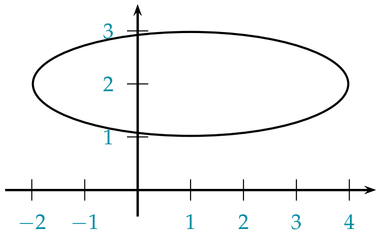
por lo tanto, el foco de la parábola está en las coordenadas

$$\left(30, 18 - \tfrac{25}{2}\right) = \left(30, \tfrac{11}{2}\right). \qquad \square$$

3. El lugar geométrico de ecuación

$$x^2 - 2x + 9y^2 - 36y + 28 = 0$$

se lo muestra en la siguiente gráfica:



a) Determinar la ecuación de la gráfica trasladada -2 unidades en el eje y y reflejada por el eje x, además, graficarla aproximadamente. (1.0pt)

b) Determinar la ecuación de la gráfica reflejada por el eje x y trasladada -2 unidades en el eje y, además, graficarla aproximadamente. (1.0pt)

Solución.

a) Para esto, debemos realizar la transformación

$$(x, y) \mapsto (x, y-2) \mapsto (x, -(y-2)) = (x, -y+2)$$

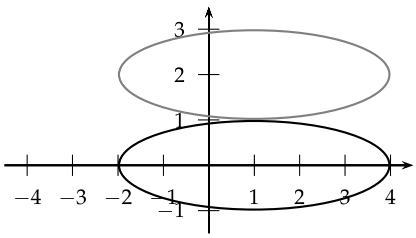
en la ecuación, así, obtenemos la nueva ecuación:

$$x^2 - 2x + 9(-y+2)^2 - 36(-y+2) + 28 = 0$$

que equivale a

$$x^2 - 2x + 9y^2 - 8 = 0$$

y su gráfica es



b) Para esto, debemos realizar la transformación

$$(x, y) \mapsto (x, -y) \mapsto (x, -y-2)$$

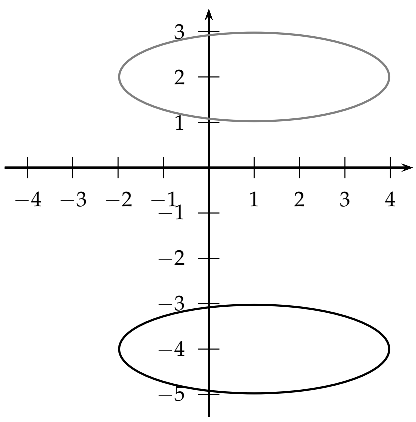
en la ecuación, así, obtenemos la nueva ecuación:

$$x^2 - 2x + 9(-y-2)^2 - 36(-y-2) + 28 = 0$$

que equivale a

$$x^2 - 2x + 9y^2 + 72y + 136 = 0$$

y su gráfica es



$\square$

4. Escribir la matriz de rotación de 45° y de reflexión de 30°. Además, escriba la matriz que representa una reflexión de 30° seguida de una rotación de 45°. (1.0pt)

Solución. La matriz de rotación de 45°es

$$\mathrm{rot}(45^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\operatorname{sen}(45^\circ) \\ \operatorname{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}707 & -0{,}707 \\ 0{,}707 & 0{,}707 \end{pmatrix}.$$

La matriz de reflexión de 30°es

$$\mathrm{ref}(30^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(60^\circ) & \operatorname{sen}(60^\circ) \\ \operatorname{sen}(60^\circ) & -\cos(60^\circ) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

La matriz que representa una reflexión de 30° seguida de una rotación de 45°

$$\mathrm{rot}(45^\circ)\mathrm{ref}(30^\circ) \approx \begin{pmatrix} 0{,}707 & -0{,}707 \\ 0{,}707 & 0{,}707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}866 \\ 0{,}866 & -0{,}5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}259 & 0{,}966 \\ 0{,}966 & 0{,}259 \end{pmatrix}.$$

$\square$

5. Encontrar el grupo de simetrías del cuadrado. (2.0pt)

Solución. Tomemos el siguiente cuadrado:

$$\boxed{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array}}$$

Sabemso que tiene 12 simestría, estas son:

- $\mathrm{rot}(0^\circ)$: $\boxed{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array}}$
- $\mathrm{rot}(90^\circ)$: $\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{array}}$
- $\mathrm{rot}(180^\circ)$: $\boxed{\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}}$
- $\mathrm{rot}(270^\circ)$: $\boxed{\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{array}}$
- $\mathrm{ref}(0^\circ)$: $\boxed{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{array}}$
- $\mathrm{ref}(45^\circ)$: $\boxed{\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}}$
- $\mathrm{ref}(90^\circ)$: $\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{array}}$
- $\mathrm{ref}(135^\circ)$: $\boxed{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}}$

$\square$

6. En base al ejercicio anterior, encontrar a qué es igual $\mathrm{ref}(0^\circ)\mathrm{rot}(270^\circ)$ y $\mathrm{rot}(270^\circ)\mathrm{ref}(0^\circ)$. (2.0pt)

Solución. Para una rotación de 270° seguida de una reflexión de 0° tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array}} \longmapsto \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{array}} \longmapsto \boxed{\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}}$$

Con esto, comparando con el ejercicio anterior, obtenemos que

$$\mathrm{ref}(0^\circ)\mathrm{rot}(270^\circ) = \mathrm{ref}(45^\circ).$$

Por otro lado, para una reflexión de 0° seguida de una rotación de 270° tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ & \\ 3 & 4 \end{array}} \longmapsto \boxed{\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ & \\ 2 & 1 \end{array}} \longmapsto \boxed{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ & \\ 1 & 4 \end{array}}$$

Con esto, comparando con el ejercicio anterior, obtenemos que

$$\mathrm{rot}(270^\circ)\mathrm{ref}(0^\circ) = \mathrm{ref}(135^\circ). \qquad \square$$

- *Por puntaje extra:* Explique qué es una teselación y con qué polígonos regulares se puede teselar el plano.

1. Se tiene un foto de 15×10 cm. Si queremos aumentar su área en un $10\,\%$ sin alterar sus proporciones, ¿cuáles deben ser sus nuevas dimensiones? (1.5pt)

Solución.

Variables: Tomamos

- b: ancho de la foto ampliada, en cm.
- h: alto de la foto ampliada, en cm.

Planteamiento: El área de la foto original es de $150\ \text{cm}^2$, por lo tanto, para que el área se amplíe $10\,\%$ se necesita que

$$b \cdot h = 150 + 150\frac{10}{100} = 165. \tag{1}$$

Por otro lado, para que se preserven las proporciones se necesita que

$$\frac{b}{h} = \frac{15}{10} \tag{2}$$

Resolución: Despejamos b en la ecuación (2) y tenemos

$$b = \frac{15}{10}h, \tag{3}$$

reemplazamos en (1), tenemos que

$$\left(\frac{15}{10}h\right) \cdot h = 165.$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\left(\frac{15}{10}h\right) \cdot h = 165 \quad \Longleftrightarrow \quad h = \sqrt{110} \approx 10{,}49.$$

Reemplazamos en (3) para obtener el valor de b:

$$b = \frac{15}{10}\left(\sqrt{110}\right) \approx 15{,}73.$$

Respuesta: Las nuevas medidas de la foto deben ser $15{,}73 \times 10{,}49$ cm, aproximadamente. □

2. Considere la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{4-2x}. \end{aligned}$$

En $x = 3$, ¿la función crece o decrece? (1.5pt)

Solución. Para responder la pregunta, primero calculemos la variación promedio de la función entre x y $x+h$:

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{4-2(x+h)} - \dfrac{1}{4-2x}}{h}$$

$$= \frac{\dfrac{4-2x-(4-2(x+h))}{(4-2x-2h)(4-2x)}}{h}$$
$$= \frac{\dfrac{2h}{(4-2x-2h)(4-2x)}}{h}$$
$$= \frac{2h}{(4-2x-2h)(4-2x)h}$$
$$= \frac{2}{(4-2x-2h)(4-2x)}.$$

Ahora, calculemos la variación instantánea de la función tomando $h=0$:

$$\frac{2}{(4-2x-2h)(4-2x)} = \frac{2}{(4-2x)^2}.$$

Finalmente, evaluemos en $x=3$ y tenemos que la variación instantánea de la función es ese punto es

$$\frac{2}{(4-2(3))^2} = \frac{1}{2}.$$

Como este número es positivo, tenemos que la función crece. □

3. Considere las funciones

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2+1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (1-2t,\ t^2) \end{aligned}$$

Determine el valor de $f(-2)$, $g(2)$, $(g\circ f)(x)$ y $(f\circ f)(t)$ donde $x, t \in \mathbb{R}$. (1.0pt)

Solución. Tenemos que

$$f(-2) = 5, \qquad g(2) = (-3, 4),$$

además,

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = (1-2(x^2+1),\ (x^2+1)^2)$$

y

$$(f\circ f)(t) = f(f(t)) = f(t^2+1) = (t^2+1)^2+1.$$

□

4. Se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada que tenga 1000 cm^3 de capacidad.

   a) Modele el área lateral de la caja en función de la longitud de su base. (1.5pt)

   b) Si la base de la caja mide 5 centímetros, ¿cuál es el área de la caja? (0.5pt)

Solución.

a) Para el modelamiento, consideremos lo siguiente:

Variables:

- h: altura de la caja, en cm.
- x: longitud del lado de la base de la caja, en cm.
- $A(x)$: área lateral de la caja, en función de la longitud del lado de la base, en cm^2.

Planteamiento: Tenemos que la función del área es:

$$\begin{aligned} A :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4xh. \end{aligned}$$

Ahora, para que la caja tenga 1000 cm^3 es necesario que

$$x^2 h = 1000,$$

de donde

$$h = \frac{1000}{x^2},$$

con esto, la función A nos queda

$$\begin{aligned} A :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 4x\left(\frac{1000}{x^2}\right) = x^2 + \frac{4000}{x}. \end{aligned}$$

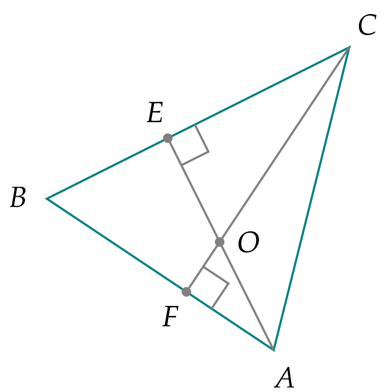
b) Evaluemos la función A en 5,

$$A(5) = 5^2 + \frac{4000}{5} = 825.$$

Por lo tanto, el área de la caja cuando el lado de la base mide 5 cm es de 825 cm^2. □

5. Dibujar un triángulo cualquiera (no equilátero ni isósceles) y encontrar su ortocentro (intersección de las altura) explicando cada paso. (2.0pt)

Solución.



a) Trazamos el triángulo ABC.

b) Trazamos la altura que pasa por el vértice A levantando una perpendicular al lado BC que pase por A.

c) Trazamos la altura que pasa por el vértice C levantando una perpendicular al lado BA que pase por C.

d) Colocamos el punto O en la intersección de las dos altura, este punto es el ortocentro del triángulo. □

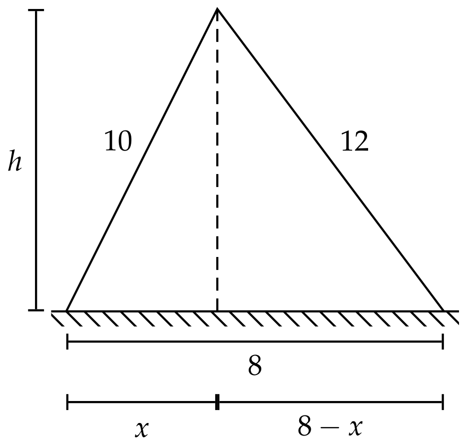
6. Si al juntar dos escaleras de 10 m y 12 m se coloca sus bases a 8 m, ¿qué altura se alcanza? (1.0pt)

Solución. Definimos

- x: la distancia entre la base de la escalera de 10 m a la base de la altura, en metros.

- h: la altura que que alcanzan las escaleras, en metros.

Tenemos el siguiente gráfico:



En los triángulos rectángulos que se obtiene, aplicamos el teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$x^2 + h^2 = 10^2 \qquad \text{y} \qquad (8-x)^2 + h^2 = 12^2.$$

Resolviendo, tenemos que

$$x = \frac{5}{4} = 1{,}25,$$

reemplazando en la primera ecuación, tenemos que

$$(1,25)^2 + h^2 = 10^2,$$

de donde

$$h = \sqrt{10^2 - (1,25)^2} \approx 9{,}92.$$

Por lo tanto, se alcanza una altura aproximadamente 9.92 metros. □

7. Considere los puntos

$$A = (3,1) \qquad \text{y} \qquad B = (1,-3),$$

y la recta ℓ de ecuación

$$9x - 3y - 10 = 0.$$

a) Determine la ecuación de la mediatriz de los puntos A y B. (1.5pt)

b) Determine el punto donde la recta ℓ corta a la mediatriz de los puntos A y B. (0.5pt)

Solución.

a) Primero, determinemos el punto medio entre A y B, llamémoslo C:

$$C = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(4,-2) = (2,-1)\,.$$

Ahora, determinemos la ecuación de la recta que pasa por A y B, tenemos que es:

$$y - 1 = \frac{-3-1}{1-3}(x-3)$$

que equivale a

$$y = 2x - 5.$$

Por lo tanto, le pendiente de esta recta es $m_1 = 2$.

Ahora, ya que la mediatriz es perpendicular, si m_2 es la pendiente de esta, es necesario que

$$m_1 m_2 = -1,$$

notemos que

$$m_1 m_2 = -1 \iff 2m_2 = -1 \iff m_2 = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la mediatriz es la recta de pendiente $m_2 = -\frac{1}{2}$ que pasa por el punto $D = (2, -1)$, por lo tanto si ecuación es

$$y - (-1) = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

que equivale a

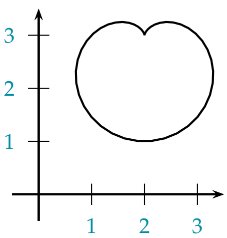
$$y = -\frac{1}{2}x.$$

b) Para determinar el punto donde las rectas se corta, resolvemos el sistema dado por las ecuaciones:

$$y = -2x \qquad \text{y} \qquad 9x - 3y - 10 = 0,$$

con lo que obtenemos $x = 2/3$ y $y = -4/3$, por lo tanto, el punto donde se cortan las rectas es $(2/3, -4/3)$. □

8. Considere el siguiente lugar geométrico:

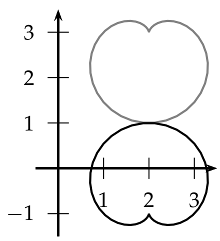


a) Grafique el lugar geométrico luego de realizar la siguiente transformación: trasladar -2 unidades en el eje y y reflejar por el eje x. (0.5pt)

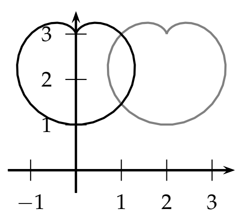
b) Grafique el lugar geométrico luego de realizar la siguiente transformación: reflejar por el eje y y trasladar 2 unidades en el eje x. (0.5pt)

Solución.

a) La gráfica es

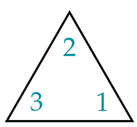


b) La gráfica es

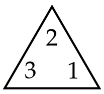


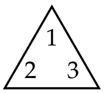
□

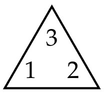
9. Encontrar el grupo de simetrías del triángulo: (2.0pt)

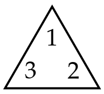


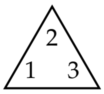
Solución. Sabemos que tiene 6 simestría, estas son:

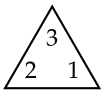
- $\text{rot}(0^\circ)$: 

- $\text{rot}(120^\circ)$: 

- $\text{rot}(240^\circ)$: 

- $\text{ref}(30^\circ)$: 

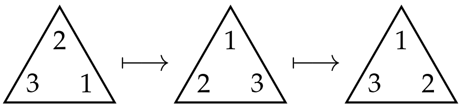
- $\text{ref}(90^\circ)$: 

- $\text{ref}(120^\circ)$: 

□

10. En base al ejercicio anterior, encontrar a qué es igual $\text{ref}(90^\circ)\text{rot}(120^\circ)$ y $\text{rot}(120^\circ)\text{ref}(90^\circ)$. (1.0pt)

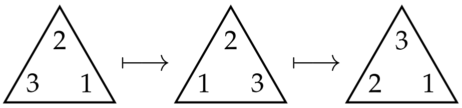
Solución. Para una rotación de 120° seguida de una reflexión de 90° tenemos:



Con esto, comparando con el ejercicio anterior, obtenemos que

$$\text{ref}(90^\circ)\text{rot}(120^\circ) = \text{ref}(30^\circ).$$

Por otro lado, para una reflexión de 90° seguida de una rotación de 120° tenemos:



Con esto, comparando con el ejercicio anterior, obtenemos que

$$\text{rot}(120^\circ)\text{ref}(90^\circ) = \text{ref}(120^\circ).$$

□

- *Por puntaje extra:* Relate lo que más le atrajo del curso de Lógica del Diseño Gráfico.