1. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ que satisface

(i) $T(1,1,0) = (2,2,0)$, (iii) $T(W) = W$ con $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + x_3 = 0\}$

(ii) $\dim[Im(T - Id_{\mathbb{R}^3})] = 1$

a) Usando las condiciones dadas justificar que el operador T es diagonalizable

De (i) $\lambda = 2$ valor propio pues $T(1,1,0) = 2(1,1,0)$

De (iii) $\dim[Ker(T - Id_{\mathbb{R}^3})] = \dim \mathbb{R}^3 - \dim[Im(T - Id_{\mathbb{R}^3})] = 2$, además $\lambda = 1$ valor propio

De (ii) W invariante por T, $W = gen\{u_1 = (1,0,-1), u_2 = (0,1,0)\}$ y $dimW = 1$

Entonces hay 2 valores propios distintos $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$. Además $dimE_{\lambda=1} = 2$ y $dimE_{\lambda=2} = 1$, la suma de sus dimensiones es 3 y T es diagonalizable.

b) Encontrar el operador T

Se tiene que $T(1,1,0) = (2,2,0), T(1,0,-1) = (1,0,-1)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ que son imágenes de 3 vectores l.i. y por tanto generan T.

(i) Para dar la fórmula respecto a la base canónica podemos utilizar la representación matricial $[T]_{BC,BC} = (a_{ij})_{3\times 3}$. Entonces tenemos los sistemas $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ que nos da $A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ y $T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3, x_3)$

(iii) ***Alternativa*** expresamos (x_1, x_2, x_3) que está en la base canónica en la base $B = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (0,1,0)\}$ tenemos $(x_1, x_2, x_3) = x_1(v_1 - v_3) + x_2 v_3 + x_3(-v_1 - v_2 + v_3)$ y aplicamos T a esta expresión.

2. Se considera la matriz $A_m = \begin{bmatrix}1 & m\\1 & 3\end{bmatrix}$ donde $m \in \mathbb{R}$

a) Hallar m tal que ${A_m}^2 - 4A_m + 4I_2 = 0$. A este valor le llamaremos m^*

$${A_m}^2 - 4A_m + 4I_2 = \begin{bmatrix}m+1 & 4m\\4 & m+9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 4m\\4 & 12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}m+1 & 0\\0 & m+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow m = -1 = m^*$$

b) Usar el resultado encontrado en a) para hallar $(A_{m^*})^{-1}$

$A_{m^*} = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 3\end{bmatrix}$, como ${A_m}^2 - 4A_m + 4I_2 = 0$ equivale a $A\left[-\frac{1}{4}(A - 4I_2)\right] = I_2$ entonces $A^{-1} = -\frac{1}{4}A + I_2$

Entonces $(A_{m^*})^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$

c) Justificar sin cálculos adicionales por qué ya se conoce el polinomio característico asociado a A_{m^*}

La relación en a) corresponde a que A_{m^*} es raíz de $p(A)$ siendo $p(t) = t^2 - 4t + 4$, es decir que satisface el Teorema de Cayley- Hamilton por tanto $p(t)$ es el polinomio característico

d) Hallar los valores y espacios propios

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ y tiene raíz doble $\lambda = 2$

Además $E_{\lambda=2} = gen\{(1,-1)\}$

e) Diagonalizar la matriz A_{m^*} explicitando la base de valores propios

No se puede diagonalizar pues $dimE_{\lambda=2} = 1$ que no es igual a la dimensión del espacio.

f) Calcular $(A_{m^*})^6$

No se puede usar la diagonalización para este cálculo

g) Hallar m tal que el operador T_{A_m} sea normal ¿Puede ser unitario?¿Puede ser autoadjunto? ¿Puede ser positivo?

T_{A_m} normal si $A_m {A_m}^* = {A_m}^* A_m$ es decir $\begin{bmatrix} m^2+1 & 3m+1 \\ 3m+1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & m+3 \\ m+3 & m^2+9 \end{bmatrix}$ que se cumple para $m = 1$

Entonces $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $A_1 {A_1}^* = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ por tanto T_{A_1} no puede ser unitario.

T_{A_1} será positivo si T_{A_1} es autoajunto (que cumple pues A_1 simétrica) y $\langle T_{A_1}(u), u \rangle \geq 0 \;\; \forall u \in \mathbb{R}^2$. Veamos
$\langle T_{A_1}(u), u \rangle = \langle A_1 u, u \rangle = (A_1 u)^T u = u^T A^T u = u^T A u$ es decir
$[u_1, u_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u_1^2 + 2u_1 u_2 + 3u_2^2 = (u_1 + u_2)^2 + 2u_2^2 \geq 0$. Entonces T_{A_1} es positivo.

3. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T + T^*$ es nilpotente de orden p.

a) Mostrar que $T + T^*$ es autoadjunto

$(T + T^*)^* = T^* + (T^*)^* = T^* + T = T + T^*$

b) Mostrar que $T^* = -T$ *(usar el teorema espectral conveniente)*

Como $T + T^*$ es autoadjunto existe una base ortonormal de vectores propios B tal que $[T + T^*]_{B,B} = D$
Donde $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Ahora ${[T + T^*]_{B,B}}^p = D^p$ y ${[T + T^*]_{B,B}}^p = 0_n$ entonces
$D^p = diag({d_1}^p, {d_2}^p, \dots, {d_n}^p) = 0_n$ entonces $d_i^p = 0$ y $d_i = 0 \;\; \forall i = 1,2, \dots, n$. Es decir $[T + T^*]_{B,B} = 0_n$ entonces el operador $T + T^* = 0$ y $T^* = -T$

4. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$ un operador normal donde E es un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial dotado de producto escalar. Demostrar

a) $(T - \lambda Id_E)$ es normal $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

Probemos que $T - \lambda I$ conmuta con su adjunto:

$$\begin{aligned}(T - \lambda I)(T - \lambda I)^* &= (T - \lambda I)(T^* - \bar{\lambda} I) = TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda} T + \lambda \bar{\lambda} I = \\ &= T^* T - \bar{\lambda} T - \lambda T^* + \bar{\lambda} \lambda I = (T^* - \bar{\lambda} I)(T - \lambda I) = \\ &= (T - \lambda I)^*(T - \lambda I)\end{aligned}$$

b) Si $T(u) = \lambda u$ entonces $T^*(u) = \lambda u$

Si $T(v) = \lambda v$, $(T - \lambda I)(v) = 0$. Ahora bien, $T - \lambda I$ es normal según $b)$; por tanto, $(T - \lambda I)^*(v) = 0$. Esto es, $(T^* - \bar{\lambda} I)(v) = 0$, luego $T^*(v) = \bar{\lambda} v$.

c) Si $T(v) = \lambda_1 v$ y $T(w) = \lambda_2 w$ donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\langle v, w \rangle = 0$

Probamos que $\lambda_1 \langle v, w \rangle = \lambda_2 \langle v, w \rangle$:

$$\lambda_1 \langle v, w \rangle = \langle \lambda_1 v, w \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle = \langle v, \bar{\lambda}_2 w \rangle = \lambda_2 \langle v, w \rangle$$

Pero $\lambda_1 \neq \lambda_2$, luego $\langle v, w \rangle = 0$.

EPN> FISICA+INGENIERIA MATEMATICA+MATEMATICA > ALGEBRA 1
Examen > 2016.06.08 > Prof. Dr. Julio MEDINA

I. Sea $\mathcal{A} = \left\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \quad A^{-1}\text{existe y} \quad A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^2 - A - 4I_3)\right\}$

1. Un polinomio $p \in \mathbb{R}[t]$ de grado 3 tal que $p(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$
   a) No existe b) es $t^3 - t^2 - 4t$ c) es $t^3 - t^2 - 4t + 4$ d) es $-t^3 - t^2 + 4t + 4$
   Usando la caracterización y operando se tiene $p(A) = A^3 - A^2 - 4A + 4I_3 = 0_3$

2. El conjunto $\mathcal{A}$
   a) es vacío b) es $\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}): p(A) = 0\}$ c) no es un subespacio vectorial d) es un subespacio vectorial
   $0_3 \notin \mathcal{A}$

3. Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $Spec(A) = \{-2,1,2\}$
   Por Teorema Cayley-Hamilton, el polinomio característico es $\chi_c(t) = t^3 - t^2 - 4t + 4 = (t-1)(t-2)(t+2)$

4. Toda matriz $A \in \mathcal{A}$ es: a) diagonalizable b) no diagonalizable c) no se sabe
   (Explicar en el cuadro la razón)

La matriz es de orden 3 y tiene 3 valores propios distintos. Cumple con una condición suficiente para la diagonalización.

5. Enunciar el Teorema de Cayley-Hamilton

Sea E un $\mathbb{K}$ −e.v. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Sea $\chi_c(t)$ su polinomio característico, entonces $\chi_c(T) = 0$

II. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A^3 = 0_5$

1. El $rang(A)$ es
   a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

2. La matriz A es:
   a) Idempotente b) Ortogonal c) Nilpotente (orden 3) d) Triangular inferior

3. Los valores propios de A son……0……………………………….. con multiplicidad……5..

4. La matriz A es: a) diagonalizable b) no diagonalizable
   $E_{\lambda=0} = gen\{(1,0,0,0,0), (0,1,-1,0,0), (0,0,-1,0,1)\} \neq \mathbb{R}^5$

5. El $rang(A^2)$ es
   a) 4 b) 3 c) 2 d) 1

6. $dim\mathcal{N}(A) = 5 - rang(A) = 3$, $dim\mathcal{N}(A^2) = 5 - rang(A^2) = 4$, $dim\mathcal{N}(A^3) = 5 = dim\mathbb{R}^5$

7. La matriz de Jordan asociada a A tiene
   a) 1 bloque de orden 3 y 1 bloque de orden 2
   b) 2 bloques de orden 2 y 1 bloque de orden 1
   c) 1 bloque de orden 4 y 1 bloque de orden 1
   d) 1 bloque de orden 3 y 2 bloques de orden 1

8. La matriz de Jordan es : $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

III. Propiedades de valores y vectores propios

1. Sea E un $\mathbb{K}$ −e.v. dotado de producto escalar. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Entonces se tiene

(i) $Spec(T^*) = \{\bar{\lambda}: \lambda \in Spec(T)\}$

(ii) Sean $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$ son vectores propios asociados a los valores propios distintos λ y μ , respectivamente, entonces $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{u}$ son ortogonales.

Bajo las hipótesis:

T operador……normal……. y $\mathbb{K} =$……$\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$…

2. Sea E un $\mathbb{K}$ −e.v. dotado de producto escalar, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$. Este operador se dice *isometría* o *unitario* si $T\,T^* = T^*\,T = Id_E$

Otras caracterizaciones para T *isometría* son:

(i) $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in E$

(ii) $\|T(u)\| = \|u\| \quad \forall u, v \in E$

(iii) Si $[u_1, u_2, \dots, u_k]$ es una familia ortonormal de E entonces $[T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_k)]$ también es ortonormal en E

3. Enunciar el Teorema espectral para $T \in \mathcal{L}(E)$ isometría siendo E un $\mathbb{R}$ −e.v. dotado de producto escalar:

Sea E un $\mathbb{R}$ −e.v. de dimensión finita dotado de producto escalar. Sea $T \in \mathcal{L}(E)$.
T es una isometría *si y solamente si*
Existe una base ortonormal de E, $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tal que

$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{bmatrix}$ donde los bloques son

Sea 1×1 de la forma $A_i = [1]$ o $A_i = [-1]$.

Sea 2×2 de la forma $A_i = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$ para algún $\theta \in]0, \pi[$