Semana 4

Monday, October 29, 2018 11:12 AM

1. Dadas las matrices A y B, comprobar que B es la matriz inversa de A:

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, tal que $A^2 - A^3 = I_n$. Demostrar que A es invertible y calcular A^{-1}.

Tenemos que $A^2 - A^3 = I_n$.

$$A^2 - A^3 = I_n$$

$$A(A - A^2) = I_n \quad \text{o} \quad (A - A^2)A = I_n$$

Tomando $B = A - A^2$, tenemos que

$$AB = A(A - A^2) = A^2 - A^3 = I_n$$

y $BA = (A - A^2)A = A^2 - A^3 = I_n$

Entonces A es invertible y

$$A^{-1} = (A - A^2)$$

3. Dadas las matrices $P, D, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con P y D matrices no singulares determinar una expresión para A bajo cada una de los siguientes supuestos:

   a) $PA = DP$

   b) $PAD = B$

   c) $AP + DB = B$

$$PAD = B$$

Entonces.

$$(P^{-1}P)AD = B.P^{-1}$$

de donde

$$IAD = B.P^{-1}$$

y así

$$AD = B.P^{-1}$$

Con esta

$$A.D^{-1}.D = B.P^{-1}.D^{-1}$$

de donde

$$A.I = B.P^{-1}.D^{-1}$$

$$A = B.P^{-1}.D^{-1}$$

4. Dadas las matrices $P, A, D \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con P una matriz no singular, y $k \in \mathbb{N}^*$, determinar una expresión para A^k bajo es supuesto que $PA = DP$.

Tenemos por hipótesis

$$PA = D.P$$

y P no es singular

$$PA = D.P$$

y P no es singular

$$A = P^{-1} D.P$$

Entonces

$$A^2 = A.A = (P^{-1} D.P)(P^{-1} D P) \qquad A^3 = A^2.A = (P^{-1}.D^2.P)(P^{-1} D P)$$
$$= P^{-1} D (I) D.P \qquad = P^{-1} D^2 I D P$$
$$= P^{-1} D D.P \qquad = P^{-1} D^2.D P$$
$$= P^{-1} D^2 P \quad (1) \qquad = P^{-1} D^3 P$$

Conjeturemos que

$$A^k = P^{-1} D^k.P$$

para todo $k \in \mathbb{N}^*$

probemos esta conjetura por inducción

Para $k=1$ se cumple por (1)

Suponemos que es válido para k

$$A^{k+1} = A^k.A = (P^{-1} D^k P)(P^{-1} D P)$$
$$= (P^{-1} D^k (P P^{-1}). D.P$$
$$= (P^{-1} D^k D.P$$
$$= P^{-1} D^{k+1}.P$$

Así concluimos que

$$A^k = P^{-1}.D^k.P \quad \text{con } k \in \mathbb{N}^*$$

5. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son números reales diferentes de 0. Indique para qué valores de a, b y c la matriz A es invertible.

Determinar si $A \sim I_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{matrix}$$

caso I) $b=a$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 \leftrightarrow F_3$$

Ran $(A) \leq 2$

Ran $I_3 = 3$

Así, tenemos que $A \nsim I$, por lo que A no es invertible si $a=b$

caso II) Si $a \neq b$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{b-a} F_2 \to F_2$$

Caso 2.1)

Si $c=a$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde $\operatorname{ran} A = 2 \neq 3 = \operatorname{ran}(I_3)$

por ende $A \sim I_3$, es decir, A no es invertible

Caso 2.2) Si $c \neq a$, entonces

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{pmatrix} \quad \frac{1}{c-1} F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{pmatrix} \quad F_3 - F_2 \to F_3$$

Caso 2.2.1 Si $b=c$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\operatorname{ran}(A) = 2 \neq 3 = \operatorname{ran}(I_3)$

así A no es invertible

Caso 2.2.2 si $b \neq c$ entonces

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{c-b} F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 - (b+a) F_3 \to F_2 \\ F_1 - a^2 F_3 \to F_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F_1 - a F_2 \to F_1$$

$$= I_3$$

A es invertible solamente $a \neq b$, $a \neq c$, y $b \neq c$

6. En cada caso, suponga que la matriz A es invertible, utilizar operaciones por filas para determinar su matriz inversa.

 a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad F_2 - F_1 \rightarrow F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_2 \leftrightarrow F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & +2/3 \end{array}\right) \quad \frac{F_2}{3} \rightarrow F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 \end{array}\right) \quad F_1 - F_2 \rightarrow F_1$$

Así

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

b) $$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad F_3 - 2F_1 \rightarrow F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \quad \frac{F_3}{2} \rightarrow F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \quad -\frac{F_2}{2} \rightarrow F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad F_3 - F_2 \rightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad F_2 - F_3 \to F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad F_3 \cdot (-2) \longrightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad F_1 - 3F_3 \longrightarrow F_1$$

Así $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1/2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$U^2 = U \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U^3 = U^2 \cdot U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$U^3 - 2U^2 + 2U$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I_3$$

$$M^3 - 2M^2 + 2M = 2I_3$$

$$\frac{M^3}{2} - \frac{2M^2}{2} + \frac{2M}{2} = \frac{2I_3}{2}$$

$$\frac{M^3}{2} - M^2 + M = I_3$$

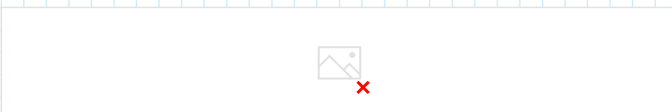
$$I_3 = M\left(\frac{M^2}{2} - M + I\right) = I_3$$

$$\frac{M^2}{2} - M + I$$

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

M es inversible



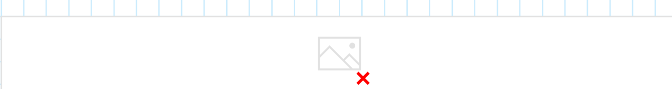
La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \frac{1}{2}F_2 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_1 - 2F_2 \to F_1$$

$$Ran(A) = 2 \neq 3 = Ran(I_3)$$

Entonces A es singular y el sistema tiene al menos una solución no trivial



A es singular dado que se tiene una solución no trivial por lo tanto por el teorema. A debe ser singular para que el sistema homogeno tenga una solución no trivial

Supongamos que es singular, entonces $A \not\sim I_n$

por lo tanto $\operatorname{ran}(A) \neq I_n$. Por otro lado $\operatorname{ran}(A|0) = \operatorname{ran} A$,

por el teorema de Rouche-Frobenius, el sistema tiene solución, pero no es única

Sabemos $x=0$ es una solución de $Ax=0$
Pero como la solución no es única, existe una solución

$$x_0 \neq 0$$

Entonces

$$X_0$$

es una solución no trivial

Si $Ax=0$ tiene una solución $x_0 \neq 0$, entonces A es singular

Si A fuese no singular

$$A X_0 = 0$$

lo que contradice que $x_0 \neq 0$

de donde

$$A^{-1} . A X_0 = 0$$

de donde

$$I . X_0 = 0$$

es decir

$$X_0 = 0$$

	Maquinado	Ensamble y terminado
Sillas	$\frac{384}{17}$	$\frac{480}{17}$
Mesas	$\frac{240}{17}$	$\frac{640}{17}$

maquinado 12

Ensamble y terminado 20

1 empleado trabaja 8 h

$$\frac{384}{17}x + \frac{240}{17}y = 12(8)$$

$\frac{480}{17}x + \frac{640}{17}y = 20(8)$

0

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{384}{17} & \frac{240}{17} & 12(8) \\ \frac{480}{17} & \frac{640}{17} & 20(8) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{192}{17} & \frac{120}{17} & 6(8) \\ \frac{48}{17} & \frac{64}{17} & 2(8) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{96}{17} & \frac{60}{17} & 6(4) \\ \frac{3}{17} & \frac{4}{17} & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{48}{17} & \frac{30}{17} & 6(2) \\ 3 & 4 & 17 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \frac{24}{17} & \frac{15}{17} & 6 \\ 3 & 4 & 17 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 24 & 15 & 6(17) \\ 3 & 4 & 17 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & 2(17) \\ 3 & 4 & 17) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5/8 & 2(17) \\ 3 & 4 & 17 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 5/8 & \\ 0 & 17/15 & 17 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2(17) \\ & & \frac{15}{7} \; -) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5/8 & 7) \\ 0 & 1 & 5(5) \end{array}\right)$$

$\sim ($

Revisa cálculo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F_3 - 2F_1 \to F_3$$

Las matrices elementales que intervienen son

$$E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos $U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$U = E_2 . E_1 . A$$

Entonces.

$$A = E_2^{-1} . E_1^{-2} . U$$

sin intercambio de filas

Tomamos

$$L = E_2^{-1} . E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces la descomposición LU de la matriz A es

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces.

$$A^{-1} = (L.U)^{-1} = U^{-1}. L^{-1}$$

Tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/4 & -5/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/4 & -5/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/4 & -5/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/4 & -5/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/4 & 1/4 & +3/8 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \qquad F_1 - \frac{3}{4}F_2 \to F_1$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/4 & 1/4 & 3/8 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1/4 & 3/8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 3/8 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

Por otro lado

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Así

$$L^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 1/4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/2 & 1/4 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Semana 5 - AL

Monday, November 5, 2018 11:41 AM

1. Encuentre el mejor ajuste cuadrático para los puntos dados:

$$\{(-2,1),(-1,0),(0,1),(1,0),(2,3)\}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \quad y \quad u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A^T . A . u = A^T . y$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T . A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}$$

$$A^T . y \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Debemos resolver el sistema asociado a la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 4 \\ 10 & 0 & 34 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/10 \\ 10 & 0 & 34 & 16 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 14 & 6 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 6/14 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/7 \end{array}\right)$$

$$a = \frac{1}{7}, \quad b = \frac{2}{5}, \quad c = \frac{3}{7}$$

El mejor ajuste cuadrático está dado por

$$\frac{1}{7}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{7} = y$$

2. En un experimento diseñado para determinar el alcance de la orientación natural de una persona, un sujeto se introduce a una habitación especial, en donde se le mantiene durante cierto tiempo. Luego se le pide que encuentre la salida de un laberinto y se registra el tiempo que tarda en encontrarla. A partir de tal experiencia se han obtenido los siguientes datos.

Tiempo en la habitación (horas)	Tiempo en encontrar la salida del laberinto (minutos)
2	1
3	2
4	3
5	4

Sea x el número de horas que pasa el individuo en la habitación, y sea y el número de minutos que tarda en encontrar la salida del laberinto.

a) Determine la recta de mínimos cuadrados que relaciona x con y.

b) Utilice la ecuación obtenida para estimar el tiempo que tardará el sujeto en encontrar la salida del laberinto después de 10 horas en la habitación.

$$y=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\1&4\\1&5\end{pmatrix} \quad u=\begin{pmatrix}b\\m\end{pmatrix}$$

$$A^T.A\,u = A^T.y$$

recta de mínimos cuadrados $y=mx+b$

$$y=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\1&4\\1&5\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}b\\m\end{pmatrix}$$

$$A^T.A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\1&4\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&14\\14&54\end{pmatrix}$$

$$A^T.y=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\40\end{pmatrix}$$

El sistema a resolver

$$\left(\begin{array}{cc|c}4&14&10\\14&54&40\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}2&7&5\\7&27&20\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&7/2&5/2\\7&27&20\end{array}\right)$$

49

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&7/2&5/2\\0&5/2&5/2\end{array}\right)\quad F_2-7F_1\longrightarrow F_2$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&7/2&5/2\\0&1&1\end{array}\right)\quad F_2\cdot\frac{2}{5}\longrightarrow F_2$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&1\end{array}\right)\quad F_1-\frac{7}{2}F_2\longrightarrow F_1$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&1\end{array}\right)\quad \begin{array}{l}b=-1\\m=1\end{array}$$

Así $b=-1$, $m=1$

De donde la recta de mínimos cuadrados

$$y=x-1$$

b) Si el individuo está 10 h en la habitación, tenemos

$$x=10$$

$$y=x-1=10-1=9$$

El individuo tardara un estimado de 9 h. en salir del laberinto

$$T = \begin{array}{c} G \\ RP \end{array} \begin{pmatrix} 0.99 & 0.1 \\ 0.01 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Parte B

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

$$T = T x^{(0)}$$

$$X^1 = T x^{(1)} = T^2 . x$$

$$x^{(2)} = T x^{(2)} = T^3 x$$

$$\vdots$$

$$x^{(n)} = T u =$$

Buscamos el vector estacionario u. $Tu = u$

Para ello resolvemos el sistema $(T - I) u = 0$

Tenemos

$$T - I = \begin{pmatrix} -0.01 & 0.1 \\ 0.01 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Así

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.01 & 0.1 & 0 \\ 0.01 & -0.1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{-0.01} F_1 \to F_1 \\ F_2 - F_1 \to F_2 \end{array}$$

Así si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, entonces

$$u_1 - 10 u_2 = 0,$$

de donde

$$u_1 = 10r \quad , u_2 = r , \quad r \in \mathbb{R}$$

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A^3 = 0$. Para cada $r \in \mathbb{R}$ determinamos

$$T_r = I_n - rA + \frac{r^2}{2} A^2$$

a) Demuestre que, para todo $r, t \in \mathbb{R}$,

$$T_r T_t = T_r + T_t$$

b) Demuestre que para todo $r \in \mathbb{R}$, T_r es invertible y calcule su inversa

a) Sean $r, t \in \mathbb{R}$

$$T_r . T_t = \left(I_n - rA + \frac{r^2}{2} A^2\right)\left(I_n - tA + \frac{r^2}{2} A^2\right)$$

$$= I_n - tA + \frac{r^2}{2} A^2 - rA + r.t.A^2 + \frac{r^3 \cancel{A^3}}{2} + \frac{r^2}{2} A^2 - t \frac{r^2}{2} \cancel{A^3} + \frac{r^4}{4} \cancel{A^4}$$

$$= I_n - (t+r)A + A^2\left(\frac{t^2}{2} + r.t + \frac{r^2}{2}\right)$$

$$= I_n - (r+t)A + \frac{(r+t)^2}{2}A^2$$

$$= T_{r+t}$$

b) Sea $r \in \mathbb{R}$

$$I_n = T_0 = T_{r-r} = T_{r+(-r)} = T_r T_{-r}$$

Entonces T_r es invertible y

$$T_r^{-1} = T_{-r}$$

$$I_n = T_0 = T_{-r+r} = T_{-r}T_r$$

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz nilpotente. Demuestre que A es singular

Supongamos que A es no singular
Entonces $A^2 = A \cdot A$ es no singular
Luego $A^3 = A^2 . A$ es no singular

Principio de inducción
Probemos que A^m es no singular para todo $m \in \mathbb{N}^*$.

Para $m=1$ es nuestra suposición
Supongamos que A^m es no singular, entonces

$$A^{m+1} = A^m . A \quad \text{es no singular}$$

Como A es nilpotente, existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$A^p = 0$$

Pero

A^p es no singular

es decir

0 es no singular

Esto es absurdo, así A es singular

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Demuestre que A es no singular si y solo si $ad - bc \neq 0$

Caso 1

Si $a=0$ y $b=0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Entonces $\operatorname{ran}(A) \leq 1$

por ende A es singular

Caso 2. Si $a \neq 0$ ó $c \neq 0$

Caso 2.1

$a \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ c & d \end{pmatrix} \left(\frac{1}{a}\right)F_1 \to F_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d - c(b) \end{pmatrix} \quad F_2 - cF_1 \to F_2$$

Caso 2.2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \quad F_1 \leftrightarrow F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ a & b \end{pmatrix} \quad \frac{F_1}{c} \to F_1$$

Entonces $\operatorname{ran}(A) \leq 1$

por ende A es singular

$$\begin{pmatrix} & \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & d-c\left(\frac{b}{a}\right) \end{pmatrix} \quad F_2 - cF_1 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \quad aF_2 \to F_2$$

Así

$\operatorname{ran}(A) = 2$ si y solo si $ad-bc \neq 0$

es decir

A es no singular si y solo si $ad-bc \neq 0$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ a & b \end{pmatrix} \quad \frac{F_1}{c} \to F_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & b-a\left(\frac{d}{c}\right) \end{pmatrix} \quad F_2 - aF_1 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \quad -cF_2 \to F_2$$

$\operatorname{ran}(A) = 2$ si y solo si $ad-bc \neq 0$,

es decir

A es no singular si y solo si $ad-bc \neq 0$

Semana 6 - AL CP

Monday, November 12, 2018 10:31 AM

1. Calcule el determinante de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 12 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_2 \\ F_4 + F_1 \to F_2 \end{matrix}$$

$$= -(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 2 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 10 & 12 \\ 2 & 7 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -12 & 10 & 12 \\ -12 & 7 & 11 \end{vmatrix} \quad C_1 - 2C_2$$

$$= -(+1) \begin{vmatrix} -12 & 12 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} = -1\,[-132 + 144] = 12$$

$\mathrm{Det}(A) = 12$

3. Calcule los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix},$$

donde $a, b, c, x, z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 0 & 0 & -z & -z \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_4 - F_3 \to F_4 \end{matrix}$$

$$= (-x)(-z) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad F_3 - F_2 \to F_3$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & -x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_2 - C_1 \to C_2$$

$$= xz(-1) \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & 1+z & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -xz(-x) \begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +x^2 z(z)$$

$$= x^2 z^2$$

Método 2

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+z & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z \end{vmatrix}$$

$$= x \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 0 & 1+z & 1 \\ 0 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \right) + xz^2$$

$$= x \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z & 1 \\ 0 & 0 & -z \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 1 & 1-z \end{vmatrix} \right) + xz^2$$

$$= x \left(1 \begin{vmatrix} z & 1 \\ 0 & -z \end{vmatrix} + (-x) \begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ 1 & 1-z \end{vmatrix} \right) + xz^2 \qquad \text{multilinealidad}$$

$$= x\left(-z^2 - x(\cancel{1} - z^2 - \cancel{1})\right) + xz^2$$

$$= -xz^2 - x^2(-z^2) + xz^2$$

Determinante de Vandermonde

Un **determinante de Vandermonde** es un determinante que presenta una progresión geométrica en cada fila o en cada columna, siendo el primer elemento 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 - C_1 \to C_2 \\ C_3 - C_1 \to C_3 \end{matrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix} \quad C_3 - C_2 \to C_3$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

5. Considere la matriz A definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \operatorname{sen}(a) & \operatorname{sen}(b) & \operatorname{sen}(c) \end{pmatrix}.$$

Donde $a, b, c \in [0, 2\pi]$.

a) Calcule el determinante de A en función de a, b y c.

b) Deduzca una condición sobre b y c tal que para todo a, la matriz A sea singular.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \operatorname{sen}(a) & \operatorname{sen}(b) & \operatorname{sen}(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(a) & \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) \\ \operatorname{sen}(a) & \operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a) & \operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a) \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) \\ \operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a) & \operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a) \end{vmatrix}$$

$$= \left[(\cos(b) - \cos(a))(\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)) - ((\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)) \cdot (\cos(c) - \cos(a))) \right]$$

$$= \cos(b)\cdot\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(c)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(a) - \operatorname{sen}(b)\cdot\cos(a) - [\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(c) - \operatorname{sen}(b)\cos(a) - \operatorname{sen}(a)\cos(c) + \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(a)$$

Así

$$\det(A) = \operatorname{sen}(c-b) + \operatorname{sen}(b-a) + \operatorname{sen}(a-c)$$

Caso 2

B. Quedremos que

$\operatorname{sen}(c-b)+\operatorname{sen}(b-a)+\operatorname{sen}(a-c)=0$

$c=b=a$

$0=\operatorname{sen}(c-b)+2\operatorname{sen}\left(\frac{b-c}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{b+c}{2}-a\right)$

$=2\operatorname{sen}\left(\frac{c-b}{2}\right)\cos\left(\frac{c-b}{2}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{b-c}{2}\right)\cos\left(\frac{b+c}{2}-a\right)$

$=2\operatorname{sen}\left(\frac{b-c}{2}\right)\left[-\cos\left(\frac{c-b}{2}\right)+\cos\left(\frac{b+c}{2}-a\right)\right]$

Caso 1. $\left(\frac{b-c}{2}\right)=0$ entonces

$\frac{b-c}{2}=k\pi,\ k\in\mathbb{R}$

de donde $b-c=2k\pi$ con $k\in\mathbb{R}$

como $b, c\in\,]0,2\pi[$, entonces,

$b-a=0$ es decir

$\cos\left(\frac{b+c}{2}-a\right)-\cos\left(\frac{c-b}{2}\right)=0$

$-2\operatorname{sen}\left(\frac{b+c}{2}-a+\frac{c-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{b+c}{2}-a-\frac{c-b}{2}\right)=0$

$-2\cos\left(\frac{c-a}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right)=0$

$c-a=0$ o $b-a=0$ para todo $a\in\,]0,2\pi[$

$c=a,\ \forall a\in\,]0,2\pi[$

Lo que es absurdo.

6. Sea $a\in\mathbb{R}$. Considere la matriz parametrada definida por:

$$M_a=\begin{pmatrix} a & 2 & 2\\ 1 & a & 3\\ 5 & -8 & 12a\end{pmatrix}$$

a) Calcule el determinante de M_a en función de a.

$$M_a=\begin{pmatrix} a & -2 & 2\\ 1 & -a & 3\\ 5 & -8 & 12a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -2 & 0\\ 1 & -a & 3-a\\ 5 & -8 & 12a-8\end{pmatrix}\ C_1+C_2\to C_3$$

$$=\begin{pmatrix} a & 0 & 2\\ 1 & 3-a & 3\\ 5 & 12a-8 & 12a\end{pmatrix}\ C_2-C_3\to C_2$$

$$=\begin{vmatrix} a & 0 & 2\\ 1 & 3-a & 3\\ 0 & -23+17a & 12-15a\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} 3-a & 3\\ 23+17a & 12a-48\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2\\ 23+17a & 23+17a & 2a+15\end{vmatrix}$$

$=-12a^3+24a+34a-46$

$=2(-6a^3-29a-23)$

b) Defina para qué valores de a la matriz M_a es invertible.

-6	0	-29	-23	1
	-6	-6	-23	
-6	-6	-23	0	

$\det(M_a)=(a-1)(-6a^2-6a-23)$

$=-(a-1)(6a^2-6a-23)$

$D=36-4(6)(23)=588$

$\det(M_a)\neq 0$

$a=\frac{-6\pm\sqrt{588}}{12}$

La matriz M_a es invertible para todo $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{1,-\frac{6+\sqrt{588}}{12},-\frac{6-\sqrt{588}}{12}\right\}$

8. Sea $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

a) Si A es antisimétrica y n es impar, entonces $\det(A)=0$.

Como A es antisimétrica entonces

$A^T=-A$

es decir

$A^T=-A$

de donde

$\det(A^T)=\det(-A)$

y así

$\det(A^T)=-\det(A)$

si n es impar $(-1)^n=-1$ de donde

$\det(A)=-\det(A)$

y esto implica que

$\det(A)=0$

c) Si $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular, entonces $\det(P^{-1}AP)=\det(A)$.

$\det(P^{-1}AP)=\det(P^{-1})\det(A).\det(P)$

$=\frac{1}{\cancel{\det(P)}}.\det(A).\cancel{\det(P)}$

$=\det(A)$

9. Sea $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ con $n\geq 2$. Suponga que $a_{ij}=0$ siempre que $i+j\leq n$. En los literales de (a) a (d) no utilice desarrollo por menores para resolver el ejercicio:

a) Si $n=2$, demuestre que

$$\det(A)=-a_{12}a_{21}.$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=-a_{12}\cdot a_{21}$$

$$=-\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ 0 & a_{12}\end{pmatrix}=-a_{21}\,a_{12}$$

b) Si $n=3$, demuestre que

$$\det(A)=-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = -a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

7. Considere la matriz M definida por:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule el determinante de M y diga si es invertible.

b) Calcule la matriz de cofactores de M.

c) Obtenga la inversa de M.

a) Desarrollamos por cofactores

$$\det(M) = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(1+1) = 1(2) = 2$$

Como $\det(M) \neq 0$

M es invertible

b) Calculemos $cof(M) = (C_{ij})$ la matriz de cofactores de M.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $\quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ $\quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$cof(M) = C_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Como M es invertible

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot Adj(M)$$

$$Adj(M) = cof(M)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Use la Regla de Cramer para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & & = & 7, \\ & & 3y & + & 2z & = & 6, \\ -2x & & & + & 3z & = & -1, \end{array}$$

La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 27 + 8 = 35$$

Como $\det(A) \neq 0$ aplicamos la regla de cramer

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = -2\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{+4 - 99}{35}$$

$$= \frac{103}{35}$$

$$\det A_2 = 6\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$54 - 2(-3+14)$$

$$54 - 2(11)$$

$$54 - 22$$

$$\frac{32}{35}$$

$$\det(A_3) = 3\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

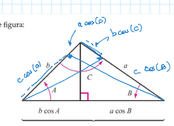
$$3(-3+14) - 6(-4)$$

$$3(11) + 24$$

$$33 + 24$$

$$\frac{57}{35}$$

16. Utilizando la siguiente figura:



a) Demuestre utilizando trigonometría elemental que:

$$\begin{array}{rcrcrcl} c\cos(A) & & & + & a\cos(C) & = & b, \\ b\cos(A) & + & a\cos(B) & & & = & c, \\ & & c\cos(B) & + & b\cos(C) & = & a. \end{array}$$

b) Si se considera que el sistema anterior es un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas: $\cos(A)$, $\cos(B)$ y $\cos(C)$, demuestre que el determinante del sistema es diferente de cero.

c) Utilice la Regla de Cramer para encontrar una expresión para $\cos(C)$.

d) Utilizando el punto anterior, pruebe la Ley de Cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C).$$

La matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = c\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & a \\ c & b \end{vmatrix}$$

$$= cab - b(-ac) = 2abc$$

Como a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo

entonces $a>0$, $b>0$, $c>0$

$\det(A) > 0$

y por ende $\det(A) \neq 0$

$$\det(A_2) = \begin{pmatrix} c & 0 & b \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{1}{2abc}\left(c\begin{vmatrix} a & c \\ c & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & a \end{vmatrix}\right)$$

$$c = \frac{1}{2abc}\left(c\left(a^2-c^2\right) - b\left(cb\right)\right)$$

$$c = \frac{1}{2ab\cancel{c}}\left(c\left(a^2-c^2+b^2\right)\right)$$

$$c = \frac{a^2-c^2+b^2}{2ab} \;//$$

Tenemos que

$$\cos(C) = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

de donde

$$2ab\cos(C) = a^2+b^2-c^2$$

y así

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(C)$$

Semana 7 - AL CP

Monday, November 19, 2018 6:31 AM

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, demuestre que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si y sólo si $x \cdot y = 0$.

Supongamos que

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (1)$$

Por definición de la norma

$$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y)$$
$$= x\cdot(x+y) + y\cdot(x+y)$$
$$= \|x\|^2 + x\cdot y + y\cdot x + \|y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (2)$$

Por (1) y (2), tenemos que

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2xy$$

de donde

$$2xy = 0$$

es decir

$$x \cdot y = 0$$

Recíproco

Supongamos que $x \cdot y = 0$

Tenemos que

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2xy$$

de donde

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

4. Sean $C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, determinar C_1 y C_2 tales que

$$C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Asumamos que existen tales C_1 y C_2, entonces

$$C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix}C_1 + 3C_2\\2C_1 - C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

lo que es equivalente al sistema de ecuaciones.

$$C_1 + 3C_2 = 0$$
$$2C_1 - C_2 = 0$$

1) Forma

Resolvemos el sistema por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\2 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\0 & -7 & 0\end{array}\right) \quad F_2 - 2F_1$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\0 & 1 & 0\end{array}\right) \quad -\tfrac{1}{7}F_2$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{array}\right) \quad F_1 - 3F_2$$

El sistema tiene solución única $C_1 = C_2 = 0$
lo que no es posible, por ende no existe solución.

Forma 2

La matriz del sistema

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}$$

y tenemos

$$\det(A) = 7 \neq 0$$

por ende es no singular, y el sistema homogeneo

$$A\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} = 0$$

tiene solamente una solución trivial
$C_1 = C_2 = 0$, lo que no es posible

Forma 3

Tenemos que $\det(A) \neq 0$, existe A^{-1}

así si $\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}$ es solución del sistema $Ax = 0$

$$A\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \text{ de donde } A^{-1}A\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

de donde

$$\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

lo que no es posible

5. Demuestre que si $u \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$0u = 0_V$$

donde 0_V el vector nulo

5. Demuestre que si $u \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$0u = 0_V$$

donde 0_V el vector nulo.

Tenemos que

$$0u = (0+0)u$$
$$= 0u + 0u$$

entonces

$$0u = 0u + 0u$$

sumando $-0u$ a ambos lados de la igualdad

$$0u + (-0u) = (0u + 0u) + (-0u)$$

con esto $\quad 0_V = 0u + 0u + (-0u)$

y así

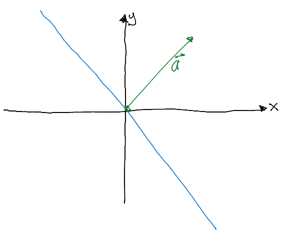
$$0_V = 0u + (0)_V$$
$$0_V = 0u$$

7. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Considere el conjunto

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot a = 0\}.$$

Demuestre que:

a) $0 \in M$;
b) Si $x, y \in M$, entonces $x + y \in M$;
c) Si $x \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha x \in M$.



a) Tenemos

$$0 \cdot a = 0$$

entonces

$$0 \in M$$

b) Sean $x \in M$ y $y \in M$

$$x \cdot a = 0 \quad y \quad y \cdot a = 0$$
$$(x+y)\cdot a = x\cdot a + y \cdot a = 0 + 0 = 0$$

Por ende

$$(x+y) \in M$$

c) Sea $x \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$x \cdot a = 0$$

de donde

$$(\alpha x)\cdot a = \alpha(x \cdot a) = \alpha \cdot 0 = 0$$

y así

$$x \in M$$

8. Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot y = 0 \text{ para todo } y \in S\}.$$

a) Si $n = 3$ y $S = \{(1,-2,3), (0,1,-1), (1,0,1)\}$, calcule $S^\perp$.

Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^\perp$, entonces

$$(x_1, x_2, x_3)(1,-2,3) = 0$$

es decir $\quad (x_1, x_2, x_3)\cdot(0,1,-1) = 0 \quad y \quad (x_1,x_2,x_3)(1,0,1) = 0$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ \quad\; x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 \quad\;\; + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 - F_1 \to F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad F_1 + F_3 \to F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 - 2F_2 \to F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \frac{F_3}{4} \to F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \quad F_1 - F_3 \to F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \frac{F_3}{4} \to F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_1 - F_3 \to F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La solución de este sistema es

$x_1 = r$, $x_2 = -r$, $x_3 = -r$ con $r \in \mathbb{R}$

$S^{\perp} \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = r, x_2 = -r, x_3 = -r\}$
$= \{r, -r, -r\}$ $r \in \mathbb{R}$
$= \{r(1, -1, -1) : r \in \mathbb{R}\}$

b) Demuestre que $(\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\}$.

Primero probemos $\{0\} \subseteq (\mathbb{R}^n)^{\perp}$

Esto es inmediato, pues $x \cdot 0 = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$

Ahora probemos $(\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\}$

Sea $x \in (\mathbb{R}^n)^{\perp}$, entonces para todo

$y \in \mathbb{R}^n$

$x \cdot y \ 0$

En particular, tomando $y \in e^i$, $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ tenemos que

$$x \cdot e^i = 0$$

es decir

$$\sum_{j=1}^{n} y_j e_j^i = 0$$

de donde

$$x_i 1 = 0$$

y así

$$x_i = 0$$

para todo $x \in \{1, 2, \dots, n\}$, de donde

$$x = 0$$

Forma 2

En particular tomando $y = x$, tenemos que

$$x \cdot x = 0,$$

es decir

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0$$

Para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tenemos que

$$0 \leq x_i^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0$$

de donde $x_i^2 = 0$, es decir $x_i = 0$ para todo $x \in \{1, 2, \dots, n\}$
y así $x = 0$

9. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Demuestre o dé un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Si x e y son paralelos, y si y y z son paralelos, entonces x y z son paralelos.

b) Si x y z son ortogonales, y y y z son ortogonales, entonces x y y son paralelos.

a) Si x e y son paralelos, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$y = \alpha x$$

similarmente, si y y z son paralelos, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$z = \beta y$$

Así

$$z = \beta(\alpha x) = (\beta x)\alpha$$

Con esto tenemos

$$\begin{aligned} |x \cdot z| &= |x \cdot ((\beta\alpha) x)| \\ &= |\beta\alpha| \, |x \cdot x| \\ &= |\beta\alpha| \, \|x\|^2 \\ &= |\beta x| \, \|x\| \, \|x\| \\ &= \|x\| \, \|z\| \end{aligned}$$

así x y z son paralelos

b) La afirmación es verdadera para $n=2$, En efecto

Si $x \cdot z = 0$ y $y \cdot z = 0$ tenemos

$$(x_1, x_2) \cdot (z_1, z_2) = 0 \quad y \quad (y_1, y_2)(z_1, z_2) = 0$$

es decir

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 = 0$$
$$y_1 z_1 + y_2 z_2 = 0$$

lo que podemos escribir matricialmente

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución no trivial del anterior sistema homogeneo. Entonces la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

es singular; Así, $\operatorname{ran}(A) \leq 1$, por ende existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(y_1 + y_2) - \alpha(x_1 + x_2) = 0$$

y así $y = \alpha x$

Con esto, tenemos

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= |y \cdot (\alpha x)| \\ &= |\alpha|\,|x \cdot x| \\ &= |\alpha|\,\|x\|^2 \\ &= |\alpha|\,\|x\|\,\|x\| \\ &= \|\alpha x\|\,\|x\| \\ &= \|x\|\,\|y\| \end{aligned}$$

es decir, x e y son paralelos

Para $n \geq 3$

Sea $x = e^1$, $y = e^2$, $z = e^3$

entonces

$$x \cdot z = 0 \quad y \quad z \cdot y = 0$$

pero

$$|x \cdot y| = 0 \quad y \quad \|x\|\,\|y\| = 1$$

por onde x e y no son paralelos

10. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$. Demuestre las siguientes proposiciones:

   a) Si x y y son ortogonales, entonces $\operatorname{proy}_y(x) = 0$.
   b) Si x y y son paralelos, entonces $\operatorname{proy}_y(x) = x$.
   c) $\operatorname{norm}_y(x)$ y y son ortogonales.

a) Si x e y son ortogonales, $x \cdot y = 0$

$$\operatorname{proy}_y(x) = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \cdot y = 0 \cdot y = 0$$

b) Si x e y son paralelos, $y \neq 0$, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x = \alpha y$, así

$$\operatorname{proy}_y(x) = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \cdot y = \frac{(\alpha y)(y)}{\|y\|^2} \cdot y = \frac{\alpha \|y\|^2}{\|y\|^2} \cdot y = \alpha \cdot y = x$$

c) Tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{normal}_y(x) \cdot y &= (x - \operatorname{proy}_y(x)) \cdot y \\ &= x \cdot y - y \cdot \operatorname{proy}_y(x) \\ &= x \cdot y - y \cdot \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\, y \\ &= x \cdot y - x \cdot y \\ &= 0 \end{aligned}$$

11. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que:

c) $x \cdot (y \times z) = z \cdot (x \times y)$

$a \times b = (a_2 b_2 - a_3 b_1$

Tenemos que

$$\begin{aligned} x \cdot (y \times z) &= (x_1, x_2, x_3)(y_2 z_3 - y_3 z_2, -(y_1 z_3 - y_3 z_1), y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ &= x_1(y_2 z_2 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2(y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)$$

Así tenemos

$$x \cdot (y \times z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad C_2 \longleftrightarrow C_3$$

$$x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$

Así tenemos

$$x \cdot (y \times z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & x_1 \\ z_2 & y_2 & x_2 \\ z_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} \quad C_3 \leftrightarrow C_1$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \\ z_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$= z \cdot (x \times y)$$

13. Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$, muestre que el vector $x \times y$ es ortogonal a x y a y.

Tenemos que

$$x \cdot (x \times y) = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \\ x_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

→ columna repetida el determinante es 0

otra manera

$$x \cdot (x \times y) = y \cdot (x \times x) = y \cdot 0 = 0$$

pues $x \times x = 0$

Por otro lado

$$y \cdot (x \times y) = y \cdot (y \times x)$$
$$= y \cdot -(x \times y)$$
$$= -y \cdot (x \times y)$$

Así, $y \cdot (x \times y) = -y \cdot (x \times y)$

de donde

$$2y \cdot (x \times y) = 0$$

y entonces

$$y \cdot (x \times y) = 0$$

Semana 8 - AL CP

Monday, November 26, 2018 6:32 AM

1. *a*) Encuentre las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana del plano $H \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $(-1,0,2) \in H$ y tal que el vector $(-1,1,2)$ es ortogonal a H.

   b) Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Demuestre que la ecuación cartesiana del plano que pasa por a y al cual b es ortogonal es
$$b \cdot x = b \cdot a.$$

a) Buscamos dos vectores $b, c \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tales que $H = P(a, b, c)$

2. Sean $a, a', b, c \in \mathbb{R}^n$, con $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

   a) Suponga que $a' \in L(a;b)$. Demuestre que $L(a;b) = L(a';b)$.

   b) Suponga que $a' \in P(a;b,c)$. Demuestre que $P(a;b,c) = P(a';b,c)$.

   c) Suponga que b y c son paralelos. Demuestre que $L(a;b) = L(a;c)$.

   d) Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se verifica que $L(a;b) = L(a;\lambda b)$.

   e) Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y todo $\mu \in \mathbb{R}$ se verifica que $P(a;b,c) = P(a;b,\lambda c + \mu b)$.

6. Si en $\mathbb{R}^2$ se definen las operaciones
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad \text{y} \qquad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$
para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿es $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial? Indique cuáles son las propiedades de espacio vectorial que se verifican y cuáles no.

Se cumplen todas las propiedades de la suma, pues es la suma usual en $\mathbb{R}^2$

Propiedades del producto.

Distributiva

Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, debe verificarse que.

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$$

y

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$$

i) $\alpha(x+y)$

$$\alpha\left((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\right)$$
$$= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$= (\alpha(x_1+y_1), x_2+y_2)$$
$$= (\alpha x_1, x_2) + (\alpha y_1, y_2)$$
$$= \alpha(x) + \alpha(y)$$

ii)
$$(\alpha+\beta) = ((\alpha+\beta)x_1, x_2)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, x_2)$$

Tomemos

$$x = (0,1) \in \mathbb{R}^2$$

y sean $\alpha = \beta = 1$

$$(\alpha+\beta)(0,1) = 2(0,1) = (0,1)$$

pero

Neutro del producto Sea $x \in \mathbb{R}^2$ debemos verificar que

$$1x = 1$$

En efecto

$$1x = 1(x_1, x_2) = (x_1, x_2) = x$$

- Asociativa del producto: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ debemos verificar

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$= (\alpha(x_1+y_1), x_2+y_2)$
$= (\alpha x_1, x_2) + (\alpha y_1, y_2)$
$= \alpha(x) + \alpha(y)$

$x = (0,1) \in \mathbb{R}$

y sean $\alpha = \beta = 1$
$(\alpha+\beta)(0,1) = 2(0,1) = (0,1)$
pero
$\alpha(0,1)+\beta(0,1) = 1(0,1) + 1(0,1) = (0,1)+(0,1) = (0,2) \neq (0,1)$

debemos verificar
$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
En efecto
$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x_1, x_2) = (\alpha\beta x_1, x_2)$
$= (\alpha\beta)(x, x_2)$

En conclusión, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ no es un espacio vectorial

7. Si en $\mathbb{R}^2$ se definen las operaciones

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1+y_1, 0) \quad \text{y} \quad a(x_1,x_2) = (ax_1, 0)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ y todo $a \in \mathbb{R}$, ¿es $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial? Indique cuáles son las propiedades de espacio vectorial que se verifican y cuáles no.

Propiedades de la suma.

Conmutativa

Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$:
$x+y = (x_1+y_1, 0)$
$= (x_1+y_1, 0)$
$= x+y$

como la suma en el campo es conmutativa.

Asociativa

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^2$
$x+(y+z) = (x_1, x_2) + (y_1+z_1, 0)$
$= (x_1+(y_1+z_1), 0)$
$= ((x_1+y_1)+z_1, 0)$
$= (x_1+y_1, 0) + (z_1, z_2)$
$= (x+y)+z$

Neutro

Debería existir un elemento $e \in \mathbb{R}^2$ tal que
$x+e = e+x = x$
para todo $x \in \mathbb{R}^2$, es decir
$(x_1+e_1, 0) = (e_1+x_1, 0) = (x_1, x_2)$
Tomamos $x = (0,1)$, entonces
$(e_1, 0) = (0,1)$
en particular $0 = 1$, lo que es imposible
Así, no existe neutro para la suma.
Consecuentemente, no existe inverso para la suma

Propiedades del producto

Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha(x+y) = \alpha(x_1+y_1, 0)$
$= (\alpha(x_1+y_1), 0)$
$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, 0)$
$= (\alpha x_1, 0) + (\alpha y_1, 0)$
$= \alpha(x_1, 0) + \alpha(y_1, 0)$
$= \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2)$
$= \alpha x + \alpha y$

$(\alpha+\beta)x = ((\alpha+\beta)x_1, 0)$
$= (\alpha x_1 + \beta x_1, 0)$
$= (\alpha x_1, 0) + (\beta x_1, 0)$
$= \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2)$
$= \alpha x + \beta x$

Neutro

$1(0,1) = (0,0) \neq (0,1)$
no se verifica

Asociativa

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$
$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x_1, 0)$
$= (\alpha \cdot \beta x_1, 0)$
$= (\alpha\beta)(x_1, x_2)$
$= (\alpha\beta)x$

Así, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ no es un espacio vectorial

10. *Unicidad del neutro de la suma y del inverso de la suma.* Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial.

a) Asuma que existen dos elementos $0 \in E$ y $0' \in E$ tales que, para todo $x \in E$ se verifica $0+x = x+0 = x$ y $0'+x = x+0' = x$. Demuestre que $0 = 0'$. Esto significa que el elemento neutro de la suma es único.

b) Sea $x \in E$. Asuma que existen dos elementos $x' \in E$ y $x'' \in E$ tales que $x+x' = x'+x = 0$ y $x+x'' = x''+x = 0$. Demuestre que $x' = x''$. Esto significa que el inverso de la suma, para cada elemento $x \in E$, es único.

Si $x \in E$,
$0+x = x+0 = 0$
en particular, para $x = 0'$,
$0+0' = 0'+0 = 0$
de donde
$0+0' = 0' \quad (1)$

Para $x \in E$,
$0'+x = x+0' = x$
en particular, si $x = 0$, entonces,
$0'+0 = 0+0' = 0$
de donde
$0+0' = 0 \quad (2)$
De (1) y (2)
$0 = 0'$ como se quería

Unicidad del inverso aditivo

Tenemos que
$x + x'' = 0$, y también
por la propiedad del neutro de la suma
$x'+0 = x'$
Así,
$x' = x'+0 = x'+(x+x'')$
por la propiedad asociativa de la suma
$x' = (x'+x)+x''$
Por hipótesis $x'+x = 0$, y por la propiedad del neutro de la suma
$x' = 0 + x'' = x''$
$x' = x''$
como se quería demostrar

13. En la definición de espacio vectorial se inicia con la frase "Dados un campo $\mathbb{K}$, un conjunto no vacío E". Explique por qué es necesario que E sea no vacío detallando cuáles de las propiedades de espacio vectorial son satisfechas y cuáles no cuando se considera $E = \varnothing$.

$E = \varnothing$
$+ = \varnothing \qquad \cdot = \varnothing$
Probemos que $\forall x, y, z \in E$.
$(x+y)+z = x+(y+z)$

Si fuese falso: existe $x, y, z \in E = \varnothing$
tal que
$(x+y)+z \neq x+(y+z)$
esto es absurdo pues $\varnothing$ no tiene elementos
Así se cumple la propiedad asociativa

• No se tiene neutro para la suma, pues $\emptyset$ no tiene elementos.

14. Sean $\mathbb{K}$ un campo, E un conjunto no vacío y $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ dos funciones tales que $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ verifica todas las propiedades de espacio vectorial excepto el inverso de la suma. Asuma que $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ verifica la siguiente propiedad (P): Para todo $v \in E$,

$$0v = 0.$$

Demuestre que $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial.

Probemos que las propiedades del espacio vectorial excepto inverso de la suma junto con la propiedad (P) implican el inverso de la suma

Sea $v \in E$, buscamos $v' \in E$ tal que

$$v + v' = v' + v = 0$$

Tomamos $v' = (-1)v$ En efecto

$$v + v' = v + (-1)v$$

por la propiedad distributiva, y el neutro del producto

$$v + v' = 1v + (-1)v = (1 + (-v)) = v$$

y, como $1 + (-1) = 0$, tenemos

$$v + v' = 0v$$

por la propiedad P, $0v = 0$ de donde

$$v + v = 0$$

Finalmente, por la propiedad conmutativa de la suma

$$v + v' = v' + v$$

así

$$v + v' = v' + v = 0$$

18. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| = x_3\}$

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 \geq x_3\}$

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 = x_2\}$

d) $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \det(A) = 0 \ \text{ y } \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & x_3 \\ -1 & 10 & x_2 \end{pmatrix} \right\}$

e) $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \det(A) = 0 \ \text{ y } \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -x_1 \\ 2 & -1 & x_3 \\ -1 & 3 & x_2 \end{pmatrix} \right\}$

Sugerencia: no calcule $|A|$.

Teorema: Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea $F \subseteq$

F es subespacio vectorial si y solo si

i) $F \neq \emptyset$

ii) Si $x, y \in F$ entonces $x + y \in F$

iii) Si $x \in F$, $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces $\alpha x \in F$ $\Big\}$ Si $x, y \in F$, $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha x + y \in F$

Tomamos

$x = (1, 0, 0)$

y $\alpha = -1$

Tenemos que $1 + 0 \geq 0$, por ende $x \in W$

Pero

$\alpha x = (-1, 0, 0)$ y

$-1 + 0 \ngeq 0$

entonces $\alpha x \notin W$, por ende

W no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

d)

$0 \in W$ pues $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Sean $x, y \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ Entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & x_3 \\ -1 & 10 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ -1 & 0 & y_3 \\ -1 & 10 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Con esto

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha x_1 + y_1 \\ -1 & 0 & \alpha x_3 + y_3 \\ -1 & 10 & \alpha x_2 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha x_1 \\ -1 & 0 & \alpha x_3 \\ -1 & 10 & \alpha x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & y_1 \\ -1 & 0 & y_3 \\ -1 & 10 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & x_3 \\ -1 & 10 & x_2 \end{vmatrix} + 0 = \alpha 0 = 0$$

Así $\alpha x + y \in W$

Por ende W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

21. Sean W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es sub espacio vectorial de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$

entonces

$$W_1 \cup W_2 = W_2 \quad \text{o} \quad W_2 \cup W_1 = W_1$$

de donde $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V

Para el recíproco, razonamos por reducción al absurdo

Supunemos que

$$W_1 \not\subseteq W_2 \quad \text{y} \quad W_2 \not\subseteq W_1$$

Entonces, existe $w \in W_1$ tal que $w_1 \not\in W_2$ y existe un $w_2 \in W_2$ tal que $w_2 \not\in W_1$

Sea $w = w_1 + w_2$.

Como $w_1 \in W_1$ y $W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$, entonces.

$$w_1 \in W_1 \cup W_2$$

y del mismo modo

$$w_2 \in W_2 \cup W_1$$

Por hipótesis, tenemos que $W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de donde

$$w \in W_1 \cup W_2$$

Hay dos posibilidades

(1) $w \in W_1$ o

(2) $w \in W_2$

En el primer caso, tenemos que

$$w_2 = w - w_1$$

y

$w \in W_1$ y $w_1 \in W_1$ y como

W_1 es subespacio vectorial de V, entonces

$$w_2 \in W_1$$

lo que no es posible.

En el segundo caso, tenemos que

$$w_1 = w - w_2$$

y

$w \in W_2$, $w_2 \in W_2$ y

como W_2 es subespacio vectorial de V

$$w_1 \in W_2,$$

lo que no es posible.

En ambos casos se tiene por absurdo, por ende

$$W_1 \subseteq W_2 \quad \text{o} \quad W_2 \subseteq W_1$$