CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

1. No se penalizará la omisión de la cuantificación de variables en ninguna pregunta.

2. La omisión o errores en la notación (como los paréntesis para vectores, matrices, las comas entre las componentes de los vectores, etcétera) se penalizará con 0,2 en el componente de conceptos y cálculos (AC).

3. Si una pregunta se responde utilizando un procedimiento diferente del que se señala en el enunciado, el puntaje máximo que se puede obtener en el componente de aplicación de conceptos y cálculos (AC) es el 50 %; no se penalizarán los otros componentes.

4. El puntaje de cada pregunta es 2.5 puntos, divididos de la siguiente manera: 0,3 de punto por la redacción de todo el ejercicio (R) y 2,2 puntos por el uso correcto de las definiciones y propiedades que contribuyen a la resolución de problema y por la corrección de los cálculos que contribuyen a la resolución del problema (AC). Este último puntaje se distribuye en cada una de las preguntas de la siguiente manera:

   Pregunta 1: 0,4 puntos para el literal a); 0,6 puntos para el b); 0,6 puntos para el c) y 0,6 puntos para d).

   Pregunta 2: 0,8 puntos para el literal a) y 1,4 puntos para el b).

   Pregunta 3: 0,7 puntos por la reducción por filas y 0,5 por el análisis y la respuesta de cada literal.

   Pregunta 4: 0,8 puntos por el literal a); 0,6 puntos la deducción de que A es invertible (que debe estar sustentado por el literal anterior) y 0,8 puntos por el cálculo de la inversa (puede estar hecho en base al literal anterior o por operaciones por filas).

   Pregunta 5: 0,4 puntos por el literal a); 0,4 puntos por el literal b); 1,0 puntos por el literal c) y 0,4 puntos por el literal d).

5. El puntaje de redacción (R) se lo califica de manera transversal a lo largo de todos los literales.

SOLUCIONES

1. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, se define al operador conmutador por

$$\begin{aligned}[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}\\ (A,B) &\longmapsto [A,B] = AB - BA.\end{aligned}$$

   a) Considere las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

   calcule la matriz $[C,D]$.

   b) Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz antisimétrica, demuestre que

$$[A,B]^\intercal = [A,B].$$

   c) Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz y $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz normal (es decir, se cumple que $Q^\intercal Q = QQ^\intercal$), demuestre que

$$[Q, A + Q^\intercal] = [Q, A].$$

d) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices tales que conmutan (es decir, se cumple que $AB = BA$), calcule $[A, BA] + [AB, A]$.

Solución.

a) Tenemos que

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad DC = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$[C, D] = CD - DC = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Por hipótesis se tiene que $A^\intercal = A$ y que $B^\intercal = -B$, gracias a la definición del operador conmutador y a las propiedades de la matriz transpuesta se tiene que:

$$\begin{aligned}
[A, B]^\intercal &= (AB - BA)^\intercal \\
&= (AB)^\intercal - (BA)^\intercal && \text{transpuesta de la suma,} \\
&= B^\intercal A^\intercal - A^\intercal B^\intercal && \text{transpuesta del producto,} \\
&= (-B)A - A(-B) && \text{matriz simétrica y antisimétrica,} \\
&= -BA + AB \\
&= [A, B].
\end{aligned}$$

c) Gracias a la definición del operador conmutador y la hipótesis sobre Q tenemos que:

$$\begin{aligned}
[Q, A + Q^\intercal] &= Q(A + Q^\intercal) - (A + Q^\intercal)Q \\
&= QA + QQ^\intercal - AQ - Q^\intercal Q && \text{distributiva del producto,} \\
&= QA + QQ^\intercal - AQ - QQ^\intercal && \text{matriz normal,} \\
&= QA - AQ \\
&= [Q, A].
\end{aligned}$$

d) Supongamos que A y B son matrices conmutativas, es decir, $AB = BA$, luego, gracias a la definición del operador conmutador y a este supuesto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
[A, BA] + [AB, A] &= A(BA) - (BA)A + (AB)A - A(AB) \\
&= A(AB) - (AB)A + (AB)A - A(AB) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, se utiliza la propiedad asociativa del producto y la propiedad de que A y B conmutan. □

2. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es tal que A es simétrica y no singular, entonces A^{-1} es una matriz simétrica.

b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que A es involutiva (es decir, $A^2 = I_n$), conjeture una expresión para A^k, con $k \in \mathbb{N}^*$.

Solución.

a) Como A es no singular, existe A^{-1}. Ahora, veamos si A^{-1} es simétrica, es decir, debemos probar que

$$(A^{-1})^\intercal = A^{-1}.$$

Por propiedad de la matriz inversa y porque A es simétrica, tenemos que

$$\begin{aligned}(A^{-1})^\intercal &= (A^\intercal)^{-1}\\ &= A^{-1}.\end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado que A^{-1} es simétrica.

b) Vamos a calcular algunas potencias de A, para luego conjeturar la expresión para A^k, con $k \in \mathbb{N}^*$. Por hipótesis, sabemos que

$$A^2 = I_n,$$

luego

$$\begin{aligned}A^3 &= A^2 A\\ &= I_n A\\ &= A,\end{aligned}$$

de igual manera

$$\begin{aligned}A^4 &= A^2 A^2\\ &= I_n I_n\\ &= I_n,\end{aligned} \qquad \begin{aligned}A^5 &= A^4 A\\ &= I_n A\\ &= A,\end{aligned} \qquad \begin{aligned}A^6 &= A^5 A\\ &= AA\\ &= I_n.\end{aligned}$$

Con esto, podemos conjeturar que

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k \text{ par,}\\ A & \text{si } k \text{ impar.}\end{cases}$$

□

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x \quad + \ z \qquad &= a,\\ y \qquad + 2w &= 0,\\ x \quad + 2z + 2w &= 0,\\ -y + 4z + bw &= 2.\end{aligned}$$

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan, determine los valores de a y b tales que el sistema

a) tiene una única solución, escribir el conjunto de soluciones;

b) tiene infinitas soluciones, escribir el conjunto de soluciones; y

c) no tiene solución.

Solución. Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 4 & b\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} a\\ 0\\ 0\\ 2\end{pmatrix},$$

por lo tanto, la matriz aumentada del sistema es

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 4 & b & 2\end{array}\right).$$

Realizamos la eliminación Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada, así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 4 & b & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -a \\ 0 & -1 & 4 & b & | & 2 \end{pmatrix} \qquad -1F_1 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -a \\ 0 & 0 & 4 & b+2 & | & 2 \end{pmatrix} \qquad F_2 + F_4 \to F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -a \\ 0 & 0 & 0 & b-6 & | & 2+4a \end{pmatrix} \qquad (-4)F_3 + F_4 \to F_4$$

a) Si $b \neq 6$ se tiene que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 4$, por lo tanto el sistema tiene solución única y se tiene que

$$(A|b) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{2+4a}{b-6} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{b-a}F_4 \to F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{-4-8a}{b-6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{-4-ab-2a}{b-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{2+4a}{b-6} \end{pmatrix} \qquad -2F_4 + F_2 \to F_2$$

$$-2F_4 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{4+2ab-4a}{b-6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & \frac{-4-8a}{b-6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & \frac{-4-ab-2a}{b-6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{2+4a}{b-6} \end{pmatrix} \qquad -1F_3 + F_1 \to F_1$$

Con esto, tenemos que el conjunto de soluciones es

$$\left\{ \left(\frac{4+2ab-4a}{b-6}, \frac{-4-8a}{b-6}, \frac{-4-ab-2a}{b-6}, \frac{2+4a}{b-6} \right) \right\}. \qquad \square$$

b) Ahora, si $b = 6$ y $a = -\frac{1}{2}$, se tiene se tiene que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) = 3 < 4$, por lo tanto, el sistema tiene infinitas soluciones y se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & -a \\ 0 & 0 & 0 & b-6 & | & 2+4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad -1F_3 + F_1 \to F_1$$

y el conjunto de soluciones es

$$\left\{ \left(-1 + 2r, -2r, \frac{1}{2} - 2r, r \right) : r \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Ahora, si $b = 6$ y $a \neq -\frac{1}{2}$, se tiene que $\operatorname{rang}(A) = 3 \neq \operatorname{rang}(A|b) = 4$, por lo tanto, el sistema no tiene solución.

4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcule A^2 y A^3. Verifique que

   $$A^3 - 4A^2 + 7A - 4I_3 = 0.$$

   b) Deduzca de lo anterior que A es invertible y calcule su inversa A^{-1}.

Solución.

a) Tenemos que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + 7A - 4I_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 0 & -7 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Tenemos que

$$A^3 - 4A^2 + 7A - 4I_3,$$

por lo tanto

$$A(A^2 - 4A + 7I_3) = 4I_3,$$

de donde

$$A\left(\frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I_3)\right) = I_3,$$

con lo cual, se concluye que A es invertible y

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4}(A^2 - 4A + 7I_3) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

5. Una dieta compuesta por los ingredientes *leche descremada*, *harina de soya* y *suero de leche* aporta unas determinadas cantidades de los nutrientes *proteínas*, *carbohidratos* y *grasas* al día. La cantidad (en gramos) de nutrientes que cada porción de 100 gramos de ingredientes aporta es la siguiente:

Cantidad en gramos de nutrientes suministrada por una porción de 100 gramos del ingrediente				Aporte diario en gramos de la dieta
Nutrientes	Leche descremada	Harina de soya	Suero de leche	
Proteínas	36	0	12	36
Carbohidratos	3	4	16	47
Grasa	0	6	6	55

Determine la cantidad de porciones de cada ingrediente para que la dieta aporte 36 gramos de *proteínas*, 47 gramos de *carbohidratos* y 55 gramos de *grasa*. Para esto:

a) plantee un sistema de ecuaciones que modele el problema;

b) escriba la matriz ampliada del sistema;

c) resuelva el sistema de ecuaciones mediante operaciones por filas; y

d) escriba la solución del problema.

Solución. Notemos por

- x_1: cantidad de porciones de leche descremada al día,
- x_2: cantidad de porciones de harina de soya al día, y
- x_3: cantidad de porciones de suero de leche al día.

Con esto, tenemos que $36x_1$ indican la cantidad de proteínas entregados por x_1 porciones de leche descremada. Siguiendo el mismo razonamiento, $0x_2$ y $12x_3$ indica la cantidad de proteínas entregados por x_2 unidades de harina de soya y x_3 unidades de suero de leche, respectivamente. Así, se necesita que

$$36x_1 + 0x_2 + 12x_3 = 36.$$

Analizando de manera análoga la cantidad de carbohidratos y grasas, se tiene que se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned} 36x_1 \phantom{{}+4x_2} + 12x_3 &= 36, \\ 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 47, \\ 6x_2 + 6x_3 &= 55. \end{aligned}$$

La matriz ampliada de este sistema es

$$\begin{pmatrix} 36 & 0 & 12 & | & 36 \\ 3 & 4 & 16 & | & 47 \\ 0 & 6 & 6 & | & 55 \end{pmatrix}$$

y, realizando operaciones por filas, tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 36 & 0 & 12 & | & 36 \\ 3 & 4 & 16 & | & 47 \\ 0 & 6 & 6 & | & 55 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 3 & 4 & 16 & | & 47 \\ 0 & 6 & 6 & | & 55 \end{pmatrix} && \frac{1}{12}F_1 \to F_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 4 & 15 & | & 44 \\ 0 & 6 & 6 & | & 55 \end{pmatrix} && -F_1 + F_2 \to F_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 6 & 6 & | & 55 \\ 0 & 4 & 15 & | & 44 \end{pmatrix} && F_2 \leftrightarrow F_3 \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 6 & 6 & | & 55 \\ 0 & 0 & 11 & | & \frac{22}{3} \end{pmatrix} \qquad -\frac{2}{3}F_2 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 6 & 6 & | & 55 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{11}F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 6 & 0 & | & 51 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad -6F_3 + F_2 \to F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & \frac{7}{3} \\ 0 & 6 & 0 & | & 51 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad -F_3 + F_1 \to F_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$x_1 = \frac{7}{9}, \qquad x_2 = \frac{17}{2} \qquad \text{y} \qquad x_3 = \frac{2}{3};$$

de donde, la dieta requiere $\frac{7}{9}$ de porción de leche descremada, $\frac{17}{2}$ de porción de harina de soya y $\frac{2}{3}$ de porción de suero de leche, con el objeto de aportar las cantidades deseadas de proteínas, carbohidratos y grasas. □

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

1. No se penalizará la omisión de la cuantificación de variables en ninguna pregunta.
2. La omisión o errores en la notación (como los paréntesis para vectores, matrices, las comas entre las componentes de los vectores, etcétera) se penalizará con 0,2 en el componente de conceptos y cálculos (AC).
3. Si una pregunta se responde utilizando un procedimiento diferente del que se señala en el enunciado, el puntaje máximo que se puede obtener en el componente de aplicación de conceptos y cálculos (AC) es el 50 %; no se penalizarán los otros componentes.
4. El puntaje de cada pregunta es 2.5 puntos, divididos de la siguiente manera: 0,3 de punto por la redacción de todo el ejercicio (R) y 2,2 puntos por el uso correcto de las definiciones y propiedades que contribuyen a la resolución de problema y por la corrección de los cálculos que contribuyen a la resolución del problema (AC). Este último puntaje se distribuye en cada una de las preguntas de la siguiente manera:

   Pregunta 1: 0,8 puntos para el literal a); 0,7 puntos para el b) y 0. puntos para el c).

   Pregunta 2: 0,7 puntos para el literal a); 0,8 puntos para el b) y 0,7 puntos para el c)

   Pregunta 3: 0,8 para el literal a) (de los cuales 0,6 puntos corresponden a determinar las condiciones sobre λ bajo las cuales el sistema tiene solución única y 0,2 puntos corresponden a la correcta escritura del conjunto solución); 0,8 para el literal b) (de los cuales 0,6 puntos corresponden a determinar las condiciones sobre λ bajo las cuales el sistema tiene infinitas soluciones y 0,2 puntos corresponden a la correcta escritura del conjunto solución) y 0,6 puntos para el c).

   Pregunta 4: 0,8 puntos por el literal a); 0,4 puntos para el literal b) (que debe estar sustentado por el literal anterior, de los cuales se asigna 0,2 puntos a cada uno de los cálculos solicitados); 0,5 puntos para el literal c) (que debe estar sustentado en el literal anterior) y 0,5 para el literal d).

   Pregunta 5: 0,3 puntos por el literal a) (0,1 puntos por cada operación elemental de fila); 0,5 puntos por el literal b) (de los cuales 0,2 se asignan al cálculo de C y 0,3 al determinante de C); 0,4 puntos por el literal c) (que debe estar sustentado en el literal anterior); 0,6 puntos para el literal d) (que debe estar sustentado en el literal a) y debe hacerse sin calcular $\det(A)$ ni $\det(B)$) y 0,4 puntos por el literal d) (que debe estar sustentado en los literales anteriores).
5. El puntaje de redacción (R) se lo califica de manera transversal a lo largo de todos los literales.

SOLUCIONES

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, siendo B una matriz no singular.

   a) Determine una expresión para A bajo el supuesto que
   $$AB + D^{\intercal}C = \alpha C.$$

   b) Suponga que
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad CB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   Calcule la matriz A para este caso.

c) Suponga que $\alpha < 0$. Considerando la matriz A encontrada en el inciso anterior, ¿es posible encontrar una matriz $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = E^2$? Justifique su respuesta.

Solución. *a*) Como la matriz B es no singular existe B^{-1} y, con esto, tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} AB + D^\intercal C = \alpha C &\iff AB = \alpha C - D^\intercal C \\ &\iff ABB^{-1} = (\alpha C - D^\intercal C)B^{-1} \\ &\iff A = (\alpha I_2 - D^\intercal)CB^{-1} \\ &\iff A = (\alpha I_2 - D)^\intercal CB^{-1}. \end{aligned}$$

De este modo

$$A = (\alpha I_2 - D)^\intercal CB^{-1}.$$

b) De la expresión obtenida en el inciso anterior se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^\intercal \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha - 1 \\ \alpha & -2\alpha - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Notemos que $\det(A) = -\alpha(\alpha - 1)$. Si $\alpha < 0$, entonces $\det(A) < 0$, por ende, si existiese $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = E^2$, se tendría que

$$\det(A) = \det(E^2) = \det(E)^2 \geq 0,$$

lo que, por el razonamiento precedente, no es posible. Entonces, no existe una matriz $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = E^2$. $\square$

2. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices no singulares y $\alpha \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$. Demuestre o refute los siguientes enunciados:

a) αA es no singular y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

b) $A + B$ es no singular y $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

c) A^2 es no singular y $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Solución. Se tiene que $\det(A) \neq 0$ y $\det(B) \neq 0$.

a) El enunciado es verdadero. Se tiene que

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

y dado que $\alpha \neq 0$, se obtiene

$$\alpha^n \det(A) \neq 0,$$

por lo tanto

$$\det(\alpha A) \neq 0$$

de donde se concluye que αA es no singular. Además, se tiene que

$$\left(\frac{1}{\alpha} A^{-1}\right)(\alpha A) = \frac{\alpha}{\alpha} A^{-1} A = 1 I_n = I_n,$$

por lo tanto,

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}.$$

b) El enunciado es falso. Basta tomar $B = -A$, así A y B son no singulares pero

$$A + B = A + (-A) = 0$$

es singular.

c) El enunciado es verdadero. Se tiene que

$$\det(AA) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2$$

por lo tanto

$$\det(A) \neq 0$$

de donde se concluye que A^2 es no singular. Además, se tiene que

$$(A^2)(A^{-1})^2 = (AA)(A^{-1}A^{-1}) = A((AA^{-1})A^{-1}) = A((I_n)A^{-1}) = AA^{-1} = I_n,$$

por lo tanto,

$$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2.$$

□

3. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, considere el sistema

$$\begin{aligned} x + \lambda y &= 1, \\ \lambda x + \quad y &= \lambda^2. \end{aligned}$$

Determine los valores de λ tales que el sistema

a) tiene una única solución, escribir el conjunto de soluciones;

b) tiene infinitas soluciones, escribir el conjunto de soluciones; y

c) no tiene solución.

Solución. Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

a) Aplicando la regla de Cramer, encontramos los valores de λ para que el sistema tenga una única solución, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser distinto de cero; es decir,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda) \neq 0,$$

entonces, el sistema tiene solución única si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1$. Aplicando la regla de Cramer, encontramos las incógnitas, así

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda^2 & 1 \end{vmatrix}}{1-\lambda^2} = \frac{1-\lambda^3}{1-\lambda^2} = \frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda};$$

y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 \end{vmatrix}}{1-\lambda^2} = \frac{\lambda(\lambda-1)}{1-\lambda^2} = \frac{-\lambda}{1+\lambda}.$$

Entonces, el conjunto de soluciones es

$$\left\{ \left(\frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda}, \frac{-\lambda}{1+\lambda} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \right\}.$$

b) Si $\lambda = 1$, escribimos la matriz aumentada asociada al sistema y, aplicando la eliminación Gauss, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

como $\operatorname{rang}(A) = 1 = \operatorname{rang}(A|b)$ y este número es menor que el número de incógnitas, el sistema tiene infinitas soluciones. Entonces el conjunto de soluciones es

$$\{(1-r, r) : r \in \mathbb{R}\}.$$

c) Si $\lambda = -1$, escribimos la matriz aumentada asociada al sistema y, aplicando la eliminación Gauss, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix},$$

como $\operatorname{rang}(A) = 1 < \operatorname{rang}(A|b) = 2$, el sistema es inconsistente. Por lo tanto, para $\lambda = -1$, el sistema no tiene solución. □

4. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.

a) Compruebe que

$$(x \times y) \cdot z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

b) Utilizando el literal anterior y propiedades de los determinantes, calcule

$$(x \times y) \cdot x \qquad \text{y} \qquad (x \times y) \cdot y.$$

c) Utilizando el literal anterior, demuestre que $x \times y$ es ortogonal a cualquier vector de la forma $\alpha x + \beta y$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

d) Suponga que $y \neq 0$, calcule

$$(\operatorname{proy}_y(x) \times \operatorname{norm}_y(x)) \cdot x.$$

Solución.

a) Por la definición de producto cruz y producto punto, tenemos que

$$\begin{aligned}
(x \times y) \cdot z &= ((x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3)) \cdot (z_1, z_2, z_3) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (z_1, z_2, z_3) \\
&= (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3 \\
&= x_1(y_2y_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) \\
&= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Se tiene que

$$(x \times y) \cdot x = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

dado que la matriz tiene dos filas iguales. De igual forma, se tiene que

$$(x \times y) \cdot y = 0$$

c) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$(x \times y) \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha (x \times y) \cdot x + \beta (x \times y) \cdot y = 0,$$

lo que prueba que $x \times y$ y $\alpha x + \beta y$ son ortogonales.

d) Por definición, tenemos que

$$\operatorname{norm}_y(x) = x - \operatorname{proy}_y(x),$$

de donde

$$x = \operatorname{proy}_y(x) + \operatorname{norm}_y(x).$$

Por el inciso anterior, se tiene que $\operatorname{proy}_y(x) \times \operatorname{norm}_y(x)$ es ortogonal a todo vector de la forma $\alpha \operatorname{proy}_y(x) + \beta \operatorname{norm}_y(x)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, por lo que, en particular, $\operatorname{proy}_y(x) \times \operatorname{norm}_y(x)$ es ortogonal a x. Así

$$(\operatorname{proy}_y(x) \times \operatorname{norm}_y(x)) \cdot x = 0. \qquad \square$$

5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix}.$$

a) Aplique, consecutivamente, las siguientes operaciones por filas a la matriz A:

$$F_2 + F_1 \to F_1, \qquad F_3 + F_1 \to F_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1+a+b+c} F_1 \to F_1.$$

Llame a la matriz resultante B.

b) Considere las siguientes matrices elementales E_1 y E_2 dadas por:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine $C = E_1 E_2 B$ y $\det(C)$.

c) En base al literal anterior, determine $\det(B)$.

d) En base al literal *a)*, determine la relación entre $\det(A)$ y $\det(B)$, sin calcularlos.

e) En base a los literales anteriores, determine $\det(A)$.

Solución. a) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1+a+b & 1+a+b & 1+a+b \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix} && F_2 + F_1 \to F_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix} && F_3 + F_1 \to F_1 \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix} && \frac{1}{1+a+b+c} F_1 \to F_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix}.$$

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\det(C) = 1$.

c) Puesto que $C = E_1E_2B$, se tiene que

$$\det(C) = \det(E_1)\det(E_2)\det(B) = (1)(1)\det(B),$$

por lo tanto, $\det(C) = \det(B)$, con lo cual

$$\det(B) = 1.$$

d) Dado que B se obtiene a partir de A al sumar filas y al multiplicar una de sus filas por $\frac{1}{1+a+b+c}$, se tiene que

$$\det(B) = \frac{1}{1+a+b+c}\det(A).$$

e) Con los literales anteriores, se tiene que

$$\det(A) = (1+a+b+c)\det(B) = (1+a+b+c)1 = 1+a+b+c. \qquad \square$$

Escuela Politécnica Nacional
Hoja de enunciados
Álgebra Lineal • Primera prueba

Martes 22 de enero de 2019 (110 minutos) — Departamento de Formación Básica

Criterios de calificación

1. No se penalizará la omisión de la cuantificación de variables en ninguna pregunta.
2. La omisión o errores en la notación (como los paréntesis para vectores, matrices, las comas entre las componentes de los vectores, etcétera) se penalizará con 0,2 en el componente de conceptos y cálculos (AC).
3. Si una pregunta se responde utilizando un procedimiento diferente del que se señala en el enunciado, el puntaje máximo que se puede obtener en el componente de aplicación de conceptos y cálculos (AC) es el 50 %; no se penalizarán los otros componentes.
4. El puntaje de cada pregunta es 2.5 puntos, divididos de la siguiente manera: 0,3 de punto por la redacción de todo el ejercicio (R) y 2,2 puntos por el uso correcto de las definiciones y propiedades que contribuyen a la resolución de problema y por la corrección de los cálculos que contribuyen a la resolución del problema (AC). Este último puntaje se distribuye en cada una de las preguntas de la siguiente manera:

   Pregunta 1: 1,0 puntos por encontrar el elemento neutro y 1,2 puntos por la demostración de que es elemento neutro.

   Pregunta 2: 0,6 puntos por probar que el conjunto es no vacío (es decir, que posee el elemento 0); 0,8 puntos por probar que es cerrado respecto a la suma y 0,8 puntos por probar que es cerrado respecto a la multiplicación por un escalar.

   Pregunta 3: 1,1 puntos por cada literal. En el literal a), el realizar la combinación lineal nula y obtener la matriz ampliada tiene una valoración de 0,5 puntos, el determinar los valores de α, 0,3 puntos y el escribir la solución, 0,3 puntos. En el literal b), el hallar el $\operatorname{span}(S)$ tiene una valoración de 0,6 y el obtener una base, 0,5 puntos.

   Pregunta 4: 0,7 puntos por el literal a); y 0,5 puntos por cada uno de los literales b), c) y d).

   Pregunta 5: 1,0 puntos por caracterizar el espacio V; 0,7 puntos por determinar el espacio W; y 0,5 por justificar correctamente que $\mathbb{R}_1[t]$ es suma directa de V y W.

5. El puntaje de redacción (R) se lo califica de manera transversal a lo largo de todos los literales.

Soluciones

1. Para $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define la siguiente

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Demuestre que existe el elemento neutro de esta operación.

Solución. Buscamos un vector $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$(x_1, x_2) \oplus (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \oplus (x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que tal vector existe. Por definición de la operación $\oplus$, se tiene que, si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$(x_1, x_2) \oplus (e_1, e_2) = (x_1 e_1, x_2 e_2),$$

de donde, la condición

$$(x_1, x_2) \oplus (e_1, e_2) = (e_1, e_2) \oplus (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ equivale a

$$x_1 e_1 = x_1 \qquad \text{y} \qquad x_2 e_2 = x_2,$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. En particular, si consideramos $x_1 = x_2 = 1$, tenemos que

$$e_1 = e_2 = 1$$

(también puede elegirse cualquier $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para obtener que $e_1 = e_2 = 1$), de modo que una condición necesaria para que el vector (e_1, e_2) sea un neutro para esta operación es que

$$(e_1, e_2) = (1, 1).$$

Dado que

$$(x_1, x_2) \oplus (1, 1) = (1, 1) \oplus (x_1, x_2) = (x_1, x_2),$$

se tiene que el vector $(1, 1)$ es un neutro para esta operación. □

2. En $\mathbb{R}^3$, se define el conjunto

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \right\}.$$

Demostrar que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Solución. Vamos a mostrar que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, para ello debemos demostrar E es no vacío y que si $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos

a) $u + v \in E$; y

b) $\alpha u \in E$.

Para demostrar que es no vacío, demostremos que $0 \in E$, es decir, demostremos que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

lo cual es verdadero ya que es un determinante con una fila de ceros.

Ahora, sean $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, debemos mostrar que

$$u + v \in E.$$

Es decir, debemos mostrar que

$$\begin{vmatrix} u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por propiedades de los determinantes se tiene que

$$\begin{vmatrix} u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Como $u \in E$ y $v \in E$, se tiene que

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

por lo tanto

$$\begin{vmatrix} u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Sea $u = (u_1, u_2, u_3)$, debemos mostrar que

$$\alpha u \in E.$$

Es decir, debemos mostrar que

$$\begin{vmatrix} \alpha u_1 & \alpha u_2 & \alpha u_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego por propiedades de los determinantes se tiene que

$$\begin{vmatrix} \alpha u_1 & \alpha u_2 & \alpha u_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Como $u \in E$, se tiene que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, por lo tanto

$$\begin{vmatrix} \alpha u_1 & \alpha u_2 & \alpha u_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$ □

3. En $\mathbb{R}_2[t]$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, se toma el conjunto

$$S = \left\{1 + \alpha t + t^2, \quad -1 + t^2, \quad 1 + \alpha + t\right\}.$$

a) ¿Para qué valores de α se tiene que S es un conjunto linealmente independiente?

b) Tomando $\alpha = 1$, determinar $W = \operatorname{span}(S)$ y una base para este.

Solución.

a) Tomemos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a(1 + \alpha t + t^2) + b(-1 + t^2) + c(1 + \alpha + t) = 0 = 0 + 0t + 0t^2,$$

se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} a - b + (1+\alpha)c &= 0, \\ \alpha a \quad + \qquad c &= 0, \\ a + b \qquad\quad &= 0. \end{aligned}$$

Para que el conjunto sea linealmente independiente se necesita que el sistema tenga solución única, para esto, basta analizar el determinante de la matriz asociada; este determinante es

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & (1+\alpha) \\ \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^2 + 2\alpha - 3 = (\alpha + 2)(\alpha - 1).$$

Tenemos que el sistema tiene solución única, si y solo sí el determinante de la matriz es diferente de cero, es decir, si y solo si

$$\alpha \neq -2 \qquad \text{o} \qquad \alpha \neq 1.$$

Con esto, se obtiene que S es linelamente independiente para todo α en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

b) Si $\alpha = 1$, tenemos que

$$S = \{1 + t + t^2, \quad -1 + t^2, \quad 2 + t\},$$

con lo cual

$$W = \operatorname{span}(S) = \{a(1 + t + t^2) + b(-1 + t^2) + c(2 + t) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Ahora, para determinar una base, tomemos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a(1 + t + t^2) + b(-1 + t^2) + c(2 + t) = 0,$$

se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} a - b + 2c &= 0, \\ a \qquad + \ c &= 0, \\ a + b \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Cuya matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

como los unos principales están en la primera y segunda columna, se tiene que el primer y segundo vector de S son linealmente independiente y por lo tanto, forman una base, es decir, una base para W es

$$\{1 + t + t^2, \quad -1 + t^2\}$$ □

4. En $\mathbb{R}^{2\times 2}$ se toman los subespacios vectoriales

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a = d, \quad c = b \right\} \qquad \text{y} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se sabe que $\dim(V) = \dim(W) = 2$.

a) Determinar $V \cap W$.

b) Determinar $\dim(V \cap W)$, justificar su respuesta.

c) Determinar $\dim(V + W)$, justificar su respuesta.

d) ¿Es $\mathbb{R}^{2\times 2}$ suma directa de V y W?

Solución.

a) Vamos a encontrar las condiciones que debe cumplir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ para pertenecer a $V \cap W$. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \cap W$, se tiene que

$$a = d, c = b \qquad \text{y} \qquad c = b = 0,$$

es decir $V \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

b) Para hallar la dimensión de $V \cap W$, vamos a encontrar una base de dicho espacio. Se tiene que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

es una base de $V \cap W$. Luego, $\dim(V \cap W) = |B| = 1$.

c) Como V y W son subespacios vectoriales de dimensión finita, podemos hacer uso del teorema de la dimensión para encontrar $\dim(V + W)$. Aplicando el teorema de la dimensión se tiene que

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Para calcular las dimensiones de V y W hallaremos bases para estos subespacios. Se tiene que los conjuntos

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

son bases de V y W respectivamente. Así por el teorema de la dimensión se tiene que

$$\dim(V + W) = 3.$$

d) No, ya que $V \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \neq \{0\}$. □

5. En $\mathbb{R}_1[t]$, se define el subespacio vectorial

$$V = \{p(t) \in \mathbb{R}_1[t] : p'(0) = p(1)\}.$$

Determinar un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}_1[t]$ tal que

$$\mathbb{R}_1[t] = V \oplus W.$$

Solución. Se tiene que:

$$\begin{aligned} V &= \{p(t) = a + bt : p'(0) = p(1)\} \\ &= \{a + bt : b = a + b\} \\ &= \{bt : b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \{t\} \rangle \end{aligned}$$

donde $B_V = \{t\}$ es base de V.

Luego, tomando como referencia la base canónica de $\mathbb{R}_1[t]$ tomamos

$$W = \langle \{1\} \rangle$$

donde W es un subespacio vectorial, puesto que la cápsula de un conjunto genera un subespacio vectorial, además

$$B_W = \{1\}$$

es base de W.

Se tiene que:

$$V + W = \langle B_v \cup B_W \rangle = \langle \{1, t\} \rangle = \mathbb{R}_1[t]$$

además, como

$$V \cap W = \{0_v\}$$

entonces se tiene que

$$\mathbb{R}_1[t] = V \oplus W. \qquad \square$$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
HOJA DE ENUNCIADOS
ÁLGEBRA LINEAL • SEGUNDO EXAMEN

Martes 12 de febrero de 2019 (120 minutos) | Departamento de Formación Básica

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

1. No se penalizará la omisión de la cuantificación de variables en ninguna pregunta.

2. La omisión o errores en la notación (como los paréntesis para vectores, matrices, las comas entre las componentes de los vectores, etcétera) se penalizará con 0,2 en el componente de conceptos y cálculos (AC).

3. Si una pregunta se responde utilizando un procedimiento diferente del que se señala en el enunciado, el puntaje máximo que se puede obtener en el componente de aplicación de conceptos y cálculos (AC) es el 50 %; no se penalizarán los otros componentes.

4. El puntaje de cada pregunta es 2.5 puntos, divididos de la siguiente manera: 0,3 de punto por la redacción de todo el ejercicio (R) y 2,2 puntos por el uso correcto de las definiciones y propiedades que contribuyen a la resolución de problema y por la corrección de los cálculos que contribuyen a la resolución del problema (AC). Este último puntaje se distribuye en cada una de las preguntas de la siguiente manera:

   Pregunta 1: 0,6 puntos por probar que el conjunto es no vacío (es decir, que posee el elemento 0); 0,8 puntos por probar que es cerrado respecto a la suma y 0,8 puntos por probar que es cerrado respecto a la multiplicación por un escalar.

   Pregunta 2: 0,4 puntos por el literal a); 0,6 puntos por cada uno de los literales b) y c); y 0,3 puntos por cada uno de los literales d) y e).

   Pregunta 3: 0,4 puntos por cada uno de los literales a), b) y c); y 1,0 puntos por el literal d).

   Pregunta 4: 0,7 puntos por cada uno de los literales a) y c); y 0,8 puntos por el literal b).

   Pregunta 5: 0,4 puntos por el literal a); y 0,6 puntos por cada uno de los literales b), c) y d).

5. El puntaje de redacción (R) se lo califica de manera transversal a lo largo de todos los literales.

SOLUCIONES

1. En $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, el espacio de funciones del conjunto $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, derivables, con primera derivada continua, se define el conjunto

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : f'(0) = f'(1) = 0 \right\}.$$

Demostrar que E es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Solución. Vamos a mostrar que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, para ello debemos demostrar E es no vacío y que si $f, g \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos

a) $f + g \in E$; y

b) $\alpha f \in E$.

Para demostrar que es no vacío, demostremos que $0 \in E$. Dado que 0 es la función constante, se tiene que su derivada también es la función constante 0, además,

$$0'(0) = 0(0) = 0$$

y

$$0'(1) = 0(1) = 0$$

por lo tanto, $0 \in E$.

Ahora, sean $f, g \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$f'(0) = f'(1) = 0$$

y

$$g'(0) = g'(1) = 0.$$

a) Debemos mostrar que

$$f + g \in E,$$

es decir, debemos mostrar que

$$(f+g)'(0) = (f+g)'(1) = 0.$$

Tenemos que

$$(f+g)'(0) = (f'+g')(0) = f'(0) + g'(0) = 0 + 0 = 0$$

y

$$(f+g)'(1) = (f'+g')(1) = f'(1) + g'(1) = 0 + 0 = 0,$$

por lo tanto,

$$(f+g)'(0) = (f+g)'(1) = 0.$$

b) Debemos mostrar que

$$\alpha f \in E,$$

es decir, debemos mostrar que

$$(\alpha f)'(0) = (\alpha f)'(1) = 0$$

Tenemos que

$$(\alpha f)'(0) = (\alpha f')(0) = \alpha f'(0) = \alpha 0 = 0$$

y

$$(\alpha f)'(1) = (\alpha f')(1) = \alpha f'(1) = \alpha 0 = 0,$$

por lo tanto

$$(\alpha f)'(0) = (\alpha f)'(1) = 0.$$

Con esto, se tiene que E es un subespacio vectorial. $\square$

2. En $\mathbb{R}^3$, se define el conjunto

$$S = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,0,1)\}.$$

a) Demuestre que S es una base para $\mathbb{R}^3$.

b) Determine si existe una única aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ tal que

$$T(1,0,0) = 1 - t, \qquad T(0,1,1) = 2t \qquad \text{y} \qquad T(0,0,1) = 2.$$

De existir, ¿a qué es igual $T(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$?

c) Halle la imagen de T y determine $\dim(\mathrm{img}(T))$.

d) Determine $\dim(\ker(T))$.

e) ¿Es T inyectiva?, ¿es T sobreyectiva? Justifique sus respuestas.

Solución.

a) Demostremos que S es linealmente independiente, para lo que consideramos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0),$$

de dónde, se tiene que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, por lo tanto, S es linealmente independiente. Además, como

$$\dim(R^3) = 3$$

y S tiene 3 elementos, se sigue que S es una base para $\mathbb{R}^3$.

b) Dado que S es una base de $\mathbb{R}^3$, se tiene que existe una única aplicación lineal tal que

$$T(1,0,0) = 1 - t, \qquad T(0,1,1) = 2t \qquad \text{y} \qquad T(0,0,1) = 2.$$

Por otro lado, sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, busquemos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(0,0,1),$$

resolviendo el sistema generado, se tiene que

$$\alpha = x, \qquad \beta = y \qquad \text{y} \qquad \gamma = z - y,$$

por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= T\left(x(1,0,0) + y(0,1,1) + (z-y)(0,0,1)\right) \\ &= xT(1,0,0) + yT(0,1,1) + (z-y)T(0,0,1) \\ &= x(2-t) + y(2t) + (z-y)(2) \\ &= 2x + 2y + 2z + (2y - x)t. \end{aligned}$$

c) Dado que $\{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\{T(1,0,0),\ T(0,1,1),\ T(0,0,1)\} = \{1-t,\ 2t,\ 2\}$$

genera a $\operatorname{img}(T)$. Ahora, sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(1-t) + \beta(2t) + \gamma(2) = 0 = 0 + 0t + 0t^2,$$

se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \alpha \qquad + \gamma &= 0, \\ -\alpha + 2\beta \qquad &= 0. \end{aligned}$$

cuya forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Realizando reducción por filas tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

como los unos principales están en la primera y segunda columna, se tiene que

$$\{1-t,\ 2t\}$$

es base para $\operatorname{img}(T)$, por lo tanto, $\dim(\operatorname{img}(T)) = 2$.

d) Utilizando el Teorema de la Dimensión, se tiene que

$$\dim(R^3) = \dim(\operatorname{img}(T)) + \dim(\ker(T)),$$

por lo tanto

$$\dim(\ker(T)) = 1.$$

e) Se tiene que T no es inyectivo dado que $\ker(T) \neq \{0\}$. Además, T tampoco es sobreyectivo dado que $\operatorname{img}(T) \neq \mathbb{R}_2[t]$. $\square$

3. En $\mathbb{R}_1[t]$ y $\mathbb{R}^2$, los conjuntos
$$M = \{1+t, \quad 1-t\} \qquad \text{y} \qquad N = \{(1,-1), \quad (0,1)\}$$
son bases de $\mathbb{R}_1[t]$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sea $T\colon \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que
$$[T]_{N,M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Determinar $[2+t]_M$.
   b) Determinar $[T(2+t)]_N$.
   c) Calcular $\det([T]_{N,M})$, con esto, indicar si T es biyectivo.
   d) Determine $T(a+bt)$, para $a+bt \in \mathbb{R}_1[t]$.

Solución.

a) Buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que
$$\alpha(1+t) + \beta(1-t) = 2+t,$$
con lo cual, tenemos el sistema
$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2, \\ \alpha - \beta &= 1. \end{aligned}$$
cuya solución es
$$\alpha = \frac{3}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{1}{2}.$$
Con esto, se tiene que
$$[2+t]_M = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

b) Tenemos que
$$[T(2+t)]_N = [T]_{N,M}[2+t]_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

c) Tenemos que
$$\det([T]_{N,M}) = 1 \neq 0,$$
por lo tanto, T es biyectivo.

d) Sea $a+bt \in \mathbb{R}_1[t]$, buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que
$$\alpha(1+t) + \beta(1-t) = a+bt,$$
con lo cual, tenemos el sistema
$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= a, \\ \alpha - \beta &= b. \end{aligned}$$
cuya solución es
$$\alpha = \frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{a-b}{2}.$$
Con esto, se tiene que
$$[a+bt]_M = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}.$$

por lo tanto
$$[T(a+bt)]_N = [T]_{N,M}[a+bt]_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}.$$
Con esto, se tiene que
$$T(a+bt) = b(1,-1) + \frac{a-b}{2}(0,1) = \left(b, \frac{a-3b}{2}\right).$$
$\square$

4. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
En $\mathbb{R}^3$, considere la función
$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto (Ax)\cdot(Ay) \end{aligned}$$
Además, sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya base es
$$B = \{(1,1,0), (-1,1,0)\}.$$
a) Demuestre que $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Suponga que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno, encuentre una base ortogonal de W con este producto interno.

c) Suponga que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno, encuentre $W^\perp$ con este producto interno.

Solución.

a) Sea $x \in \mathbb{R}^3$ y escribamos $y = Ax$. Tenemos entonces que
$$\langle x, x\rangle = (Ax)\cdot(Ax) = y \cdot y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$
Dado que $y_i^2 \geq 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, se concluye que
$$\langle x, x\rangle \geq 0,$$
como se deseaba probar.

b) Tomemos $v_1 = (1,1,0)$ y $v_2 = (-1,1,0)$, entonces $B = \{v_1, v_2\}$. Utilizando el proceso de Gram-Schmidt obtendremos a partir de B una base ortogonal $D = \{u_1, u_2\}$. Así:
$$u_1 = v_1 = (1,1,0),$$
y
$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}u_1 = v_2 - \frac{(Av_2)\cdot(Au_1)}{(Au_1)\cdot(Au_1)}u_1$$
Luego, tenemos que
$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Au_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
de donde
$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12/11 \\ 10/11 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{11}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con esto, tenemos que $D = \{(1,1,0), (-6,5,0)\}$ es una base ortogonal de W.

c) Sea $x \in \mathbb{R}^3$. Tenemos que $x \in W^\intercal$ si y sólo si $\langle x, v_1 \rangle = 0$ y $\langle x, v_2 \rangle = 0$, esto es, si y sólo si

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0, \\ -5x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es entonces el conjunto $W^\perp$. Así

$$W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 + 6x_2 - x_3 = 0,\ -5x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0\}.$$ □

5. Sean E un espacio vectorial de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(E, E)$ una aplicación lineal de E en sí mismo.

   a) Si $x \in \ker(T)$, calcule $(T \circ T)(x)$.

   b) Utilizando el literal anterior, demuestre que $\ker(T) \subseteq \ker(T \circ T)$.

   c) Demuestre que $\operatorname{img}(T \circ T) \subseteq \operatorname{img}(T)$.

   d) Si $\operatorname{img}(T) = \ker(T)$, utilice el teorema de la dimensión para demostrar que la dimensión de E es par.

Solución.

a) Dado que $x \in \ker(T)$, se tiene que $T(x) = 0$, por lo tanto

$$(T \circ T)(x) = T(T(x)) = T(0) = 0.$$

b) Tomemos $x \in \ker(T)$, por el literal anterior, se tiene que

$$(T \circ T)(x) = 0,$$

por lo tanto, $x \in \ker(T \circ T)$. Con esto, tenemos que

$$\ker(T) \subseteq \ker(T \circ T).$$

c) Tomemos $y \in \operatorname{img}(T \circ T)$, se tiene que existe $x \in E$ tal que

$$y = (T \circ T)(x) = T(T(x)),$$

si tomamos $z = T(x)$, se tiene que

$$y = T(z),$$

por lo tanto, $y \in \operatorname{img}(T)$.

d) Si $\operatorname{img}(T) = \ker(T)$, se tiene que

$$\dim(\operatorname{img}(T)) = \dim(\ker(T)),$$

por el teorema de la dimensión, se tiene que

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{img}(T)) + \dim(\ker(T)) = 2\dim(\operatorname{img}(T)),$$

por lo tanto, $\dim(E)$ es par. □

Escuela Politécnica Nacional
Hoja de enunciados
Álgebra Lineal • Examen Final

DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA EPN

Viernes 22 de febrero de 2019 (120 minutos) Departamento de Formación Básica

Criterios de calificación

1. No se penalizará la omisión de la cuantificación de variables en ninguna pregunta.
2. La omisión o errores en la notación (como los paréntesis para vectores, matrices, las comas entre las componentes de los vectores, etcétera) se penalizará con 0,2 en el componente de conceptos y cálculos (AC).
3. Si una pregunta se responde utilizando un procedimiento diferente del que se señala en el enunciado, el puntaje máximo que se puede obtener en el componente de aplicación de conceptos y cálculos (AC) es el 50 %; no se penalizarán los otros componentes.
4. El puntaje de cada pregunta es 2.5 puntos, divididos de la siguiente manera: 0,3 de punto por la redacción de todo el ejercicio (R) y 2,2 puntos por el uso correcto de las definiciones y propiedades que contribuyen a la resolución de problema y por la corrección de los cálculos que contribuyen a la resolución del problema (AC). Este último puntaje se distribuye en cada una de las preguntas de la siguiente manera:

   Pregunta 1: 0,6 puntos por cada literal a), b) y c); y 0,4 por el literal d)

   Pregunta 2: 0,6 puntos por el literal a); y 0,8 puntos por cada uno de los literales b) y c)

   Pregunta 3: 0,8 puntos el literal a); 0,6 por el literal b) y 0,4 puntos por cada uno de los literales c) y d).

   Pregunta 4: 1,2 puntos el literal a); y 1,0 puntos por el literal b).

   Pregunta 5: 1,0 puntos por el literal a); 0,2 puntos por el literal b); y 1,0 puntos por el literal c).

   Pregunta 6: 0,4 puntos por el literal a); y 0,6 puntos por cada uno de los literales b), c) y d).
5. El puntaje de redacción (R) se lo califica de manera transversal a lo largo de todos los literales.

1. Responda las siguientes preguntas, justificando sus respuestas.

   a) Sea E un espacio vectorial de dimensión 5 y B un subconjunto de E con 4 vectores. ¿puede ser B linealmente independiente?, ¿puede ser B un conjunto generador de E?

   b) Sea F un espacio vectorial de dimensión 4 y C un subconjunto de E con 5 vectores. ¿Puede ser C linealmente independiente?, ¿puede ser C un conjunto generador de E?

   c) Sea W un espacio vectorial de dimensión 6. ¿Puede un conjunto de 5 elementos ser base de W?, ¿puede un conjunto de 7 elementos ser base de W?

   d) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se define el conjunto $B = \{(1, 0, a), (3, b, -3\}$. ¿Para qué valores de a y b se tiene que B es base de un subespacio de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$?

Solución.

a) Puesto que la cardinalidad mínima de un conjunto generador en E es cinco, como $|B| < \dim(E)$ entonces el conjunto no puede ser un conjunto generador. Por otro lado, sí puede ser linealmente independiente.

b) Puesto que la cardinalidad máxima de un conjunto linealmente independiente en F es cuatro, como $|C| > \dim(F)$ entonces el conjunto no puede ser linealmente independiente. Por otro lado, sí puede ser un conjunto generador.

c) Ambas resspuestas son no dado que toda base debe tener la misma cantidad de elementos que la dimensión del espacio.

d) Basta tomar $a = -1$ y $b \in \mathbb{R}$. El espacio vectorial $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_3\}$. □

2. Sean E un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathcal{L}(E, E)$ una aplicación lineal de E en sí mismo.

a) Demuestre que $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de E.

b) Si $\operatorname{img}(T) = \{0\}$, determine $\ker(T)$.

c) Sea $S \in \mathcal{L}(E, E)$, demuestre que $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$.

Solución.

a) Como T es una aplicación lineal, se tiene que

$$T(0) = 0,$$

por lo tanto $0 \in \ker(T)$.
Por otro lado, sean $x, y \in \ker(T)$, es decir, $T(x) = 0$ y $T(y) = 0$, tenemos que

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0,$$

por lo tanto, $x + y \in \ker(T)$.
Finalmente, sean $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, es decir, $T(x) = 0$, tenemos que

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha(0) = 0,$$

por lo tanto $\alpha x \in \ker(T)$.
Con esto, se tiene que $\ker(T)$ es un subespacio vectorial.

b) Sea $x \in E$, tenemos que $T(x) \in \operatorname{img}(T) = \{0\}$, por lo tanto,

$$T(x) = 0,$$

es decir, $x \in \ker(T)$. Con esto, se tiene que $\ker(T) = E$.

c) Sea $x \in \ker(T)$, es decir $T(x) = 0$, por lo tanto

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)) = S(0) = 0,$$

es decir, $x \in \ker(S \circ T)$. Con esto, $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$. □

3. Se dice que dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son similares si existe una matriz no singular $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$PA = BP.$$

a) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dos matrices similares, demuestre que $\det(A) = \det(B)$.

b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -8 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine PA, BP, $\det(B)$ y $\det(P)$.

c) Considere las matrices A y B del literal anterior, demuestre que A y B son similares.

d) Considere las matrices A y B del literal anterior, utilice el resultado de los literales a) y c) para calcular $\det(A)$ **sin** realizar la expansión por cofactores.

Solución.

a) Como A y B son similares, se tiene que existe $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $PA = BP$, por lo tanto, se tiene que

$$\det(PA) = \det(BP),$$

de donde,

$$\det(P)\det(A) = \det(B)\det(P).$$

Dado que P es no singular, se tiene que $\det(P) \neq 0$, por lo tanto,

$$\det(A) = \det(B).$$

b) Tenemos que

$$BP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado

$$\det(B) = 4 \qquad \text{y} \qquad \det(P) = 1.$$

c) Dado que el determinante de P es diferente de 0, se tiene que P es no singular, además,

$$PA = BP,$$

por lo tanto, A es similar a B.

d) Dado que las matrices A y B son similares, se tiene que

$$\det(A) = \det(B) = 4.$$

□

4. Sea $m \in \mathbb{R}$, se define la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}_1[x] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a + bx &\longmapsto (ma + 3b,\ (m+2)a + (m+2)b) \end{aligned}$$

a) Determinar los valores de m para que T sea biyectiva.

b) Si $m = 3$, determinar $\operatorname{img}(T)$ y $\dim(\operatorname{img}(T))$.

Solución.

a) 1) Como $\dim(\mathbb{R}_1[x]) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, basta con determinar los valores de m para que T sea inyectiva; es decir los valores de m tales que

$$\ker(T) = \{0\}.$$

$p(x) = a + bx \in \ker(T)$ si y sólo si

$$(ma + 3b, (m+2)a + (m+2)b) = (0, 0)$$

lo que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} m & 3 \\ m+2 & m+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Según la regla de Cramer

$$\det \begin{pmatrix} m & 3 \\ m+2 & m+2 \end{pmatrix} = (m-3)(m+2),$$

de donde se tiene que, si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$, el sistema tiene una solución única trivial, entonces $a = b = 0$, y así

$$\ker(T) = \{0\}.$$

De este modo, si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$, entonces T es inyectiva, sobreyectiva; y por lo tanto, T es biyectiva.

2) Si C_1 es la base canónica de $\mathbb{R}_1[x]$ y C_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, se tiene que la matriz asociada a T es

$$A = [T]_{C_2, C_1} = \begin{pmatrix} m & 3 \\ m+2 & m+2 \end{pmatrix},$$

de donde, A es no singular si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Calculamos $\det(A)$:

$$\det \begin{pmatrix} m & 3 \\ m+2 & m+2 \end{pmatrix} = (m-3)(m+2).$$

Entonces, A es no singular para todo $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$, con lo cual, T es biyectiva para todo $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

b) si $m = 3$ se tiene que

$$\operatorname{img}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (3a + 3b, 5a + 5b) = (x, y)\}$$

es decir, analizamos el sistema

$$\begin{aligned} 3a + 3b &= x \\ 5a + 5b &= y \end{aligned}$$

cuya matriz escalonada reducida por filas es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & \frac{x}{3} \\ 0 & 0 & | & y - \frac{5}{3}x \end{pmatrix}.$$

Notamos que, el sistema anterior tiene solución si y sólo si $y - \frac{5}{3}x = 0$, con lo cual

$$\operatorname{img}(T) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \frac{5}{3}x = 0 \right\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \operatorname{img}(T) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \frac{5}{3}x = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, \frac{5}{3}x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{gen} \left\{ \left(1, \frac{5}{3}\right) \right\}, \end{aligned}$$

de donde,

$$B = \left\{ \left(1, \frac{5}{3}\right) \right\}$$

es una base de $\operatorname{img}(T)$, con lo cual $\dim(\operatorname{img}(T)) = 1$.

$\square$

5. En el espacio vectorial
$$\mathcal{M} = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{21} = 0\},$$
el espacio vectorial de las matrices triangulares superiores de orden 2×2, para $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}$ se define
$$\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

   a) Sea $A \in \mathcal{M}$, demuestre que $\langle A, A\rangle = 0$ si y sólo si $A = 0$.

   b) Asumiendo que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ define un producto interno sobre $\mathcal{M}$, determine si las matrices
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   son ortogonales entre sí.

   c) Sea $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathcal{M} : a_{11} + a_{12} = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathcal{M}$. Asumiendo que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ define un producto interno sobre $\mathcal{M}$, calcule $W^{\perp}$.

Solución.

a) Si $A \in \mathcal{M}$ es tal que $A = 0$, claramente $\langle A, A\rangle = 0$. Recíprocamente, supongamos que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$ es tal que $\langle A, A\rangle = 0$. Como $A \in \mathcal{M}$, entonces $a_{21} = 0$, y por otro lado
$$0 = \langle A, A\rangle = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2,$$
de donde
$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0.$$
Se tiene entonces $A = 0$, pues hemos probado que todas sus entradas son nulas.

b) Tenemos que
$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (1)(2) + (-1)(2) + (2)(0) = 0,$$
por lo tanto, las matrices son ortogonales entre sí.

c) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$, de modo que $a_{21} = 0$. Tenemos entonces que
$$\begin{aligned} A \in W &\iff a_{11} + a_{12} = 0 \\ &\iff a_{12} = -a_{11} \\ &\iff A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
De este modo, el conjunto $B_W = \{A_1, A_2\}$ genera a W, siendo
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
El conjunto B_W es linealmente independiente (verificar) y por ende es una base para W.
Ahora, sea $A = (a_{ij}) \in V$, de modo que $a_{21} = 0$. Entonces
$$\begin{aligned} A \in W^{\intercal} &\Leftrightarrow \langle A, A_1\rangle = 0, \quad \langle A, A_2\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow a_{11} - a_{12} = 0, \quad a_{2,2} = 0 \\ &\Leftrightarrow A = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por ende

$$W^{\intercal} = \{A \in V : a_{11} = a_{12}, a_{22} = 0\} = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\right). \qquad \square$$

6. **(Ejercicio de bono, opcional para puntaje extra)** Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, sean V, W subespacios vectoriales de E y $T, S \in \mathcal{L}(E, E)$.

   a) Demuestre que si $V \subseteq W$, entonces $W^{\perp} \subseteq V^{\perp}$.

   b) Utilice el literal anterior para demostrar que si $V^{\perp} \subseteq W$, entonces $W^{\perp} \subseteq V$.

   c) Suponga que $T \circ S = 0$. Demuestre que $\operatorname{img}(S) \subseteq \ker(T)$.

   d) Suponga que $\ker(S)^{\perp} = \operatorname{img}(S)$. Utilice los resultados de los literales anteriores para demostrar que si $T \circ S = 0$, entonces $S \circ T = 0$.

Solución.

a) Sea $x \in W^{\intercal}$, se tiene que

$$\langle x, y \rangle = 0$$

para todo $y \in W$, debemos demostrar que $x \in V^{\intercal}$. Sea $z \in V$, como $V \subseteq E$, tenemos que $z \in W$, por lo tanto

$$\langle x, z \rangle = 0$$

de donde, $x \in V^{\intercal}$. Con esto se tiene que $W^{\intercal} \subseteq V^{\intercal}$.

b) Como $V^{\intercal} \subseteq W$, por el literal anterior, se tiene que

$$W^{\intercal} \subseteq (V^{\intercal})^{\intercal},$$

además, dado que $(V^{\intercal})^{\intercal} = V$, se concluye que

$$W^{\intercal} \subseteq V.$$

c) Supongamos que $T \circ S = 0$. Sea $x \in \operatorname{img}(S)$, entonces existe $y \in V$ tal que $x = S(y)$, pero entonces

$$T(x) = T(S(y)) = (T \circ S)(y) = 0(y) = 0,$$

de donde $x \in \ker(T)$. Así $\operatorname{img}(S) \subseteq \ker(T)$.

d) Supongamos que $T \circ S = 0$, por el literal anterior se tiene que $\operatorname{img}(S) \subseteq \ker(T)$. Así, como $\ker(S)^{\intercal} = \operatorname{img}(S)$, se tiene que

$$\ker(S)^{\intercal} \subseteq \ker(T),$$

de donde, por el literal a) se concluye que

$$\operatorname{img}(T) = \ker(T)^{\intercal} \subseteq \ker(S).$$

Sea $x \in V$, entonces $T(x) \in \operatorname{img}(T) \subseteq \ker(S)$, por ende

$$(S \circ T)(x) = S(T(x)) = 0,$$

de modo que $S \circ T = 0$. $\square$