1. En cada caso, encuentre la solución del sistema lineal por medio del método de eliminación.

   a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 4, \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 2, \\ 4x & + & 2y & + & 2z & = & 8. \end{array}$$

   b) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 4y & - & z & = & 12, \\ 3x & + & 8y & - & 2z & = & 4. \end{array}$$

   c) $$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3y & = & -4, \\ 2x & + & 5y & = & -8, \\ x & + & 3y & = & -5. \end{array}$$

2. Una tienda vende sólo dos tipos de café: café late y capuchino. En la preparación del café late se agregan 1 onza de esencia de café y 4 onzas de leche. En la preparación del capuchino se agregan 1 onza de esencia de café y 3 onzas de leche. Si en un día la tienda usa 4 galones de leche y 160 onzas de esencia de café, ¿cuántos lates y cuántos capuchinos vende la tienda?. *Nota: 1 galón = 128 onzas*.

3. Encuentre la solución del siguiente sistema lineal de ecuaciones utilizando sustitución:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 5, \\ & & 3y & + & z & = & 7, \\ & & & & z & = & 8. \end{array}$$

4. ¿Existe un valor $r \in \mathbb{R}$, tal que: $x = r$, $y = 2$, $z = 1$ sea una solución del siguiente sistema lineal? De ser así, determínelo.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & - & 2z & = & 4, \\ x & - & 4y & + & z & = & -5, \\ -2x & + & 3y & + & 2z & = & 9. \end{array}$$

5. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, suponga que los tres puntos $(1, -5)$, $(-1, 1)$ y $(2, 7)$ están en la parábola de ecuación $y = p(x)$, donde $p(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   a) Determinar un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas que debe resolverse para determinar a, b y c.

   b) Encontrar la solución del sistema lineal que obtuvo en la parte anterior para a, b y c.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcule:

   a) $A^{\intercal} + A$

   b) $A - A$

   c) $A + A$

   d) $3A$

7. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule:

a) $A + B$

b) A^{T}

c) B^{T}

8. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, considere los siguientes elementos de $\mathbb{C}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & \alpha - 1 \\ 4\alpha & -4 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & -5 \\ 3 & 3 - 2\alpha & -1 \\ 5 & 1 & 3\alpha \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -2\alpha & 1 - \alpha \\ 3\alpha & 0 & \alpha + 1 \\ -3\alpha & -4 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Hallar las siguientes matrices:

a) $A + B$,

b) $B - C$,

c) $(-B)^T$,

d) $A + B + C$,

e) $3A - B$,

f) $(2C - 2B)^T$,

g) $\overline{\alpha}A$; y

h) $(2 - \alpha)A$.

9. Considere las matrices definidas en el ejemplo anterior y $\alpha \in \mathbb{C}$. Hallar las siguientes matrices:

a) Si $\alpha = 3 + 3i$, calcule $A + C$,

b) Si $\alpha = -i$, calcule B^T; y

c) Si $\alpha = 3 - 4i$, calcule $\overline{\alpha}(B^T - C)$.

---

1. Considere las matrices
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$
Calcule $A+B$ y AB.

2. Utilizando las matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$
calcule:
   a) AB;
   b) BC;
   c) $B(C+D)$;
   d) $(E+A)B$.

3. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
y sea $B = A - I$; donde I es la identidad. Calcule B^n para todo $n > 0$.

4. Determine dos elementos A y B de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

5. Determine si existen valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que las matrices A y B conmutan, donde
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1+\beta \end{pmatrix}.$$
En caso de existir, determínelos.

6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y considere las matrices
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Demuestre que A y B conmutan si y sólo si $ad - bc = 0$.

7. Sea A la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

donde a y b son reales distintos de cero. Encuentre todas las matrices $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que A y B sean conmutables, es decir $AB = BA$.

8. *a*) Recuerde la fórmula del binomio para 2 reales a y b.

   b) Demuestre por inducción que la fórmula del binomio es válida para 2 matrices cuadradas A y B si y solo si A y B son conmutables.

   c) Considere la matriz A definida por:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Descomponga A en la suma de la matriz Identidad y de una matriz que llamaremos B. Calcule B^n para todo $n \in \mathbb{N}$

   d) Calcule A^n, para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizando la fórmula de Newton.

9. Considere el conjunto
$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : x \in]-1,1[\right\}.$$

   a) Dadas las matrices
$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad F = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
   verifique que $E \in \mathcal{A}$ y $F \in \mathcal{A}$.

   b) Demuestre que $EF \in \mathcal{A}$.

   c) Demuestre que si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $AB \in \mathcal{A}$.

10. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que
$$A(XB) = 0$$
para toda $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demuestre que $A = 0$ o $B = 0$.

11. Sean a, b y c tres números reales tales que
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$
Sean las matrices reales
$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = I_3 + M^2.$$
Demuestre que

   a) $P^2 = P$; y

   b) $PM = MP = 0$.

12. Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que, para todo $k \in \{1,2,3\}$,
$$A^k = \lambda^k (B + kC).$$
Demuestre que, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,
$$A^k = \lambda^k (B + kC).$$

13. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $C, D \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $E \in \mathbb{K}^{p\times q}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Demuestre que:

   - $A(DE) = (AD)E$;
   - $A(C + D) = AC + AD$;

- $(A+B)C = AC + BC$;
- $A(\alpha C) = \alpha(AC) = (\alpha A)C$.

14. Sea $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.

    a) Determine A^2.

    b) Determine A^3.

    c) Conjeture la forma para A^k, para $k \in \mathbb{N}^*$.

    d) Demuestre que se verifica la conjetura planteada en el literal anterior.

15. Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, demuestre que:

    a) $AA^\intercal$ y $A^\intercal A$ es simétrica.

    b) $A + A^\intercal$ es simétrica.

    c) $A - A^\intercal$ es antisimétrica.

1. Realice un bosquejo de u y de su imagen a partir de la transformación matricial f dada:

   a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación matricial definida por $f(x) = Ax$, donde:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   La transformación matricial definida por $f(x) = Ax$. Determine si el vector w dado está en la imagen de f.

   a) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por: $f(u) = Au$, donde:
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$
   Para $\phi = \dfrac{\pi}{6}$, f define una rotación en un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$ rad en sentido contrario a las manecillas del reloj.

   a) Si $T_1(u) = A^2u$, describa la acción de T_1 sobre u.

   b) ¿Cuál es el valor positivo más pequeño de k para el cual $T(u) = A^k u = u$?

4. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación matricial definida por $f(u) = Au$, donde A es una matriz de orden $m \times n$.

   a) Demuestre que $f(u + v) = f(u) + f(v)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$.

b) Demuestre que $f(cu) = cf(u)$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$.

c) Demuestre que $f(cu + dv) = cf(u) + df(v)$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $c, d \in \mathbb{R}$.

5. Encuentre la matriz elemental, $M \in \mathbb{R}^{4x4}$, que se obtiene al realizar las siguientes operaciones por filas:

   a) $3F_1 \to F_1$;

   b) $2F_2 \to F_2$;

   c) $\beta F_1 + F_2 \to F_2$, donde $\beta \in \mathbb{R}$;

   d) $3F_1 + F_3 \to F_3$; y

   e) $-\frac{1}{2}F_3 + F_4 \to F_4$.

6. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

   hallar su rango.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{pmatrix}$, hallar la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A.

8. Dado el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 5y - 4z &= 0 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

   utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= -1 \\ 2x + y - 2z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

   utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar si el sistema es consistente.

10. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$; y considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= \alpha \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

   a) Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan, determine las condiciones de α tales que el sistema tenga solución.

   b) Para las condiciones de α en que el sistema tiene solución, escriba el conjunto de soluciones del sistema.

11. Sea $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$; y considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + z &= q \\ 2w + y &= 0 \\ 3w + x + 2z &= 0 \\ pw + 2y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

Determine las condiciones de p y q para que el sistema tenga una única solución.

12. Sea $a \in \mathbb{R}$; y considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} ax \quad + \quad y - \ z &= 0 \\ x + \ 3y + \ z &= 0 \\ 3x + 10y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

Determine los valores de a tales que el sistema tenga una solución única.

13. Sean u, v soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$.

   a) Demuestre que $u + v$ es una solución.

   b) Demuestre que $u - v$ es una solución.

   c) Para cualesquiera escalares r y s, demuestre que $ru + sv$ es una solución.

14. Demuestre que, si u, v son soluciones del sistema lineal $Ax = b$, entonces $u - v$ es solución del sistema homogéneo $Ax = 0$.

Ejercicos para la clase CP: 1a, 2, 4, 5a, 5c, 5d, 6a, 6c, 8, 10, 11, 13

1. Dadas las matrices A y B, comprobar que B es la matriz inversa de A:

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, tal que $A^2 - A^3 = I_n$. Demostrar que A es invertible y calcular A^{-1}.

3. Dadas las matrices $P, D, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con P y D matrices no singulares determinar una expresión para A bajo cada una de los siguientes supuestos:

   a) $PA = DP$

   b) $PAD = B$

   c) $AP + DB = B$

4. Dadas las matrices $P, A, D \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con P una matriz no singular, y $k \in \mathbb{N}^*$, determinar una expresión para A^k bajo es supuesto que $PA = DP$.

5. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$
donde a, b y c son números reales diferentes de 0. Indique para qué valores de a, b y c la matriz A es invertible.

6. En cada caso, suponga que la matriz A es invertible, utilizar operaciones por filas para determinar su matriz inversa.

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. Sea la matriz:
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -2 & \alpha & -2 \\ 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$
donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) ¿Para qué valores de α la matriz A es invertible?

   b) Calcule la inversa de A cuando sea posible.

8. Considere la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcule $M^3 - 2M^2 + 2M$.

   b) Deduzca que la matriz M es invertible y calcule su inversa.

   c) Encuentre M^{-1} mediante operaciones por filas.

9. ¿Cuál o cuales de los siguientes sistemas lineales tiene una solución no trivial?

   a)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x - 2y - 3z &= 0 \\ -3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

10. Sea A una matriz de orden 3×3. Suponga que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema homogéneo $Ax = 0$. ¿A es singular o no singular? Justifique su respuesta.

11. Sea A una matriz de orden $n \times n$. Demuestre que si A es singular, el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene una solución no trivial.

12. Una fábrica de muebles de calidad tiene dos divisiones: un taller de máquinas herramienta donde se fabrican las partes de los muebles, y una división de ensamble y terminado en la que se unen las partes para obtener el producto final. Suponga que se tienen 12 empleados en el taller y 20 en la división y que cada empleado trabaja 8 horas. Suponga también que se producen únicamente dos artículos: sillas y mesas. Una silla requiere $\frac{384}{17}$ horas de maquinado y $\frac{480}{17}$ horas de ensamble y terminado. Una mesa requiere $\frac{240}{17}$ horas de maquinado y $\frac{640}{17}$ horas de ensamble y terminado. Suponiendo que se tiene una demanda ilimitada de estos productos y que el fabricante desea mantener ocupados a todos sus empleados, ¿cuántas sillas y cuántas mesas puede producir esta fábrica al día?

13. Resolver el sistema $Ax = b$, donde A y b se indican a continuación, utilizando una descomposición LU de la matriz A.

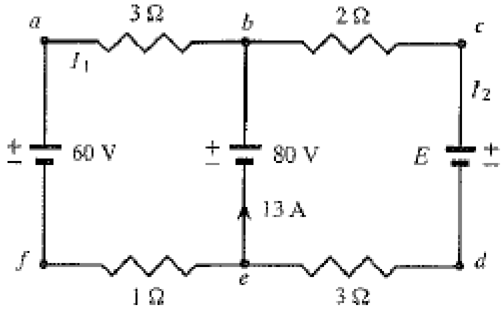
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

14. Utilice una descomposición LU de las siguientes matrices para calcular sus inversas:

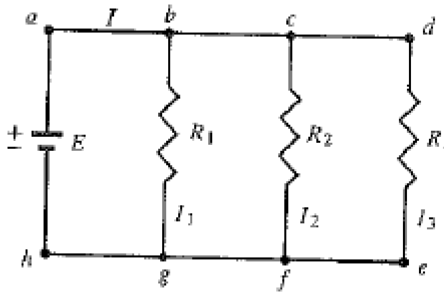
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \\ 8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

15. Suponga que $A, Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son tales que $A = QR$, R es no singular y triangular superior y $Q^\intercal Q = I_n$. Demuestre que para cada $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene solución única. Determine un método que involucre a Q y R para obtener esta solución (a la descomposición $A = QR$ se la llama *descomposición QR* de la matriz A).

16. Determine los valores desconocidos en el siguiente circuito:



17. Considere el circuito



Demuestre que si

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3},$$

entonces

$$I_1 = \frac{RI}{R_1}, \quad I_2 = \frac{RI}{R_2} \qquad \text{y} \qquad I_3 = \frac{RI}{R_3}.$$

Ejercicios para la clase CP: 1a, 2, 3b, 4, 5, 6a, 6b, 8, 9a, 10, 11, 12, 14a

1. Encuentre el mejor ajuste cuadrático para los puntos dados:
$$\{(-2,1),(-1,0),(0,1),(1,0),(2,3)\}$$

2. En un experimento diseñado para determinar el alcance de la orientación natural de una persona, un sujeto se introduce a una habitación especial, en donde se le mantiene durante cierto tiempo. Luego se le pide que encuentre la salida de un laberinto y se registra el tiempo que tarda en encontrarla. A partir de tal experiencia se han obtenido los siguientes datos.

Tiempo en la habitación (horas)	Tiempo en encontrar la salida del laberinto (minutos)
2	1
3	2
4	3
5	4

Sea x el número de horas que pasa el individuo en la habitación, y sea y el número de minutos que tarda en encontrar la salida del laberinto.

a) Determine la recta de mínimos cuadrados que relaciona x con y.

b) Utilice la ecuación obtenida para estimar el tiempo que tardará el sujeto en encontrar la salida del laberinto después de 10 horas en la habitación.

3. Se realizó un experimento acerca de las temperaturas de un fluido en un recipiente de nuevo diseño, obteniéndose los siguientes resultados.

Tiempo (minutos)	1	2	3	5	9
Temperatura (°C)	30	28	26	22	10

Sea x el tiempo, y sea y la temperatura.

a) Determine la recta de mínimos cuadrados que relaciona x con y.

b) Estime la temperatura en 4 y 6 minutos.

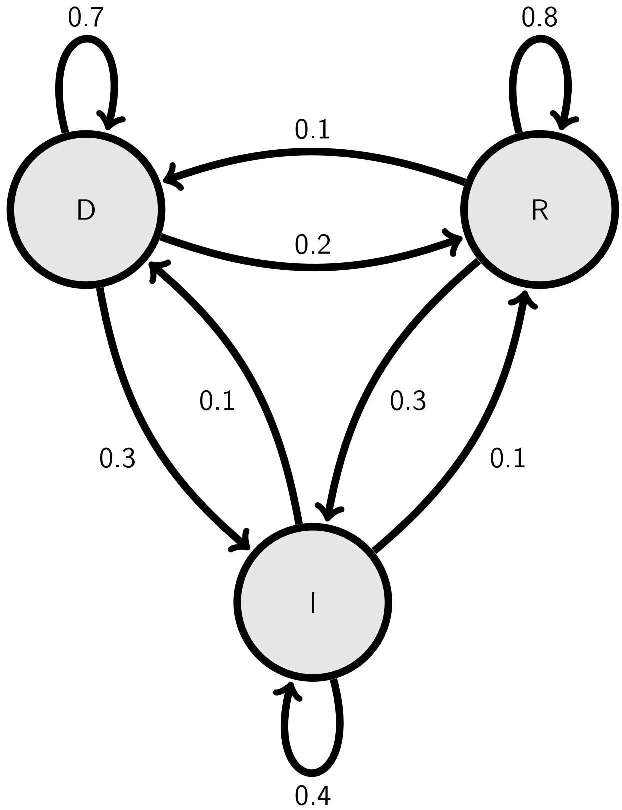
c) Estime el instante en que la temperatura del fluido fue 25 °C.

4. Aproximadamente el 30 % de la población de Ecuador vive en la provincia del Guayas. Supongamos que la migración de la población dentro y fuera de la provincia del Guayas será constante durante algunos años, tal que el 10 % de la población del Guayas migra hacia otras provincias y el 1 % de los habitantes de otras provincias migran hacia el Guayas.

a) Escriba la matriz de transición para el proceso de Markov.

b) ¿Qué porcentaje del total de la población ecuatoriana vivirá eventualmente en la provincia del Guayas?

5. Una población de votantes están distribuidos entre los partidos de Derecha (D), los partidos de Izquierda (R) y los partidos independientes (I). Entre dos elecciones la población votante $\mathbf{p} = [D, R, I]$ obedece la siguiente transición en su opinión:



Por ejemplo, en una próxima elección, de aquellos que votaron por partidos de Izquierda en la elección anterior el, 80 % mantendrán su voto por un partido de Izquierda, 10 % votará por un partido de Derecha y 10 % votará por un partido independiente.

a) Escriba la matriz de transición para el proceso de Markov.

b) ¿Cuál es el vector de estado estacionario?

c) ¿Qué resultados se esperan en las próximas elecciones?

6. Considere la siguiente matriz de transición:

$$T = \begin{array}{c} \text{lugar} \\ C \\ Ch \\ M \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C & Ch & M & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde la primera columna representa la probabilidad de comer en casa, la segunda representa la probabilidad de comer en un restaurante de comida china, la tercera representa la probabilidad de comer en un restaurante de comida mexicana, y la cuarta columna representa la probabilidad de comer en una pizzeria.

a) Compruebe que la matriz T es una matriz de transición.

b) Considere que iniciamos la semana comiendo en casa, encuentre la probabilidad de comer en un restaurante de comida mexicana al final del segundo día.

Ejercicios para la clase CP: 1, 2, 4, 5

1. Calcule el determinante de las matrices:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Dada la matriz de orden $n \times n$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
calcule su determinante.

3. Calcule los siguientes determinantes
$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix},$$
donde $a, b, c, x, z \in \mathbb{R}$.

4. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ tales que $a_i + b_j \neq 0$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz definida por
$$c_{ij} = \frac{1}{a_i + b_j},$$
para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule $\det(C)$.

5. Considere la matriz A definida por:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \operatorname{sen}(a) & \operatorname{sen}(b) & \operatorname{sen}(c) \end{pmatrix},$$
Donde $a, b, c \in]0, 2\pi[$.

   a) Calcule el determinante de A en función de a, b y c.

   b) Deduzca una condición sobre b y c tal que para todo a, la matriz A sea singular.

6. Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere la matriz parametrada definida por:
$$M_a = \begin{pmatrix} a & -2 & 2 \\ 1 & -a & 3 \\ 5 & -8 & 12a \end{pmatrix}$$

   a) Calcule el determinante de M_a en función de a.

b) Defina para qué valores de a la matriz M_a es invertible.

7. Considere la matriz M definida por:
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcule el determinante de M y diga si es invertible.

   b) Calcule la matriz de cofactores de M.

   c) Obtenga la inversa de M.

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

   a) Si A es antisimétrica y n es impar, entonces $\det(A) = 0$.

   b) Si A es nilpotente, entonces $\det(A) = 0$.

   c) Si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular, entonces $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

   d) Si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son tales que $PA = BP$, entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica la igualdad $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$, donde $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz identidad.

9. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Suponga que $a_{ij} = 0$ siempre que $i + j \leq n$. En los literales de (a) a (d) no utilice desarrollo por menores para resolver el ejercicio:

   a) Si $n = 2$, demuestre que
$$\det(A) = -a_{12}a_{21}.$$

   b) Si $n = 3$, demuestre que
$$\det(A) = -a_{13}a_{22}a_{31}.$$

   c) Si $n = 4$, demuestre que
$$\det(A) = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

   d) Si $n = 5$, demuestre que
$$\det(A) = a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}.$$

   e) Conjeture una expresión para $\det(A)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y demuestre esta conjetura.

10. Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

    Use el producto de matrices $AA^{\intercal}$ para obtener el valor de $|\det(A)|$.

11. Para $i \in \{1, 2, 3\}$ sean $a_i, b_, c_i, \alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que
$$\begin{vmatrix} \alpha a_1 + b_1 & \alpha b_1 + c_1 & \alpha c_1 + a_1 \\ \alpha a_2 + b_2 & \alpha b_2 + c_2 & \alpha c_2 + a_2 \\ \alpha a_3 + b_3 & \alpha b_3 + c_3 & \alpha c_3 + a_3 \end{vmatrix} = (1 + \alpha^3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

12. Use la Regla de Cramer para resolver el siguiente sistema:
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & & = & 7, \\ & & 3y & + & 2z & = & 6, \\ -2x & & & + & 3z & = & -1, \end{array}$$

13. Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ mediante la Regla de Cramer tal que el siguiente sistema tenga solución única:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & & & = & 1, \\ & & y & + & \alpha z & = & 0, \\ \alpha x & - & 2y & + & z & = & \alpha. \end{array}$$

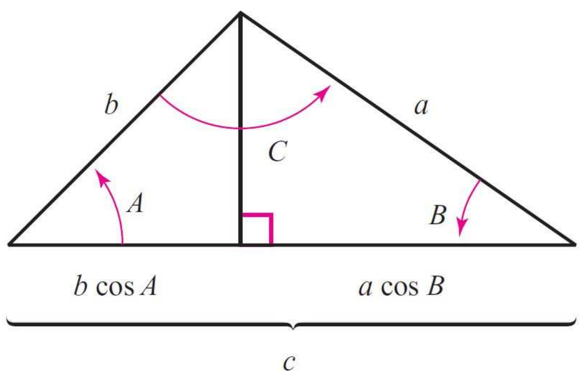
14. Use la Regla de Cramer para resolver el siguiente sistema con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1, \\ x & + & y & & & = & \alpha, \\ & & y & + & z & = & \beta. \end{array}$$

15. Use la Regla de Cramer para resolver el siguiente sistema con $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} (1-m)x & + & 2y & - & 2z & = & 1, \\ (m-1)x & - & y & + & z & = & 1, \\ (2m-2) & - & 2y & + & (4-m)z & = & -2. \end{array}$$

16. Utilizando la siguiente figura:



a) Demuestre utilizando trigonometría elemental que:

$$\begin{array}{rcrcrcl} c\cos(A) & & & + & a\cos(C) & = & b, \\ b\cos(A) & + & a\cos(B) & & & = & c, \\ & & c\cos(B) & + & b\cos(C) & = & a. \end{array}$$

b) Si se considera que el sistema anterior es un sistema con tres ecuaciones y tres incógnitas: $\cos(A)$, $\cos(B)$ y $\cos(C)$, demuestre que el determinante del sistema es diferente de cero.

c) Utilice la Regla de Cramer para encontrar una expresión para $\cos(C)$.

d) Utilizando el punto anterior, pruebe la Ley de Cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C).$$

Ejercicios para la clase CP: 1a, 3, 5, 6, 7, 8a, 8c, 9a, 9b, 12, 16.

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, demuestre que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si y sólo si $x \cdot y = 0$.

2. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, muestre que se verifica que $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

3. Se define la distancia entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \|x-y\|. \end{aligned}$$

   Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, demuestre que

   a) $\mathrm{d}(x, y) \geq 0$.
   b) $\mathrm{d}(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
   c) $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$.
   d) $\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$.

4. Sean $C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, determinar C_1 y C_2 tales que

$$C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Demuestre que si $u \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$0u = 0_V$$

   donde 0_V el vector nulo.

6. Demuestre que si $v \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$v + (-1)v = 0_V$$

   donde 0_V el vector nulo.

7. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Considere el conjunto

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot a = 0\}.$$

   Demuestre que:

   a) $0 \in M$;
   b) Si $x, y \in M$, entonces $x + y \in M$;
   c) Si $x \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha x \in M$.

8. Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto

$$S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot y = 0 \text{ para todo } y \in S\}.$$

   a) Si $n = 3$ y $S = \{(1, -2, 3), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$, calcule $S^\perp$.
   b) Demuestre que $(\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$.
   c) Demuestre que $\{0\}^\perp = \mathbb{R}^n$.
   d) Demuestre que Si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es no vacío, entonces $S \subseteq (S^\perp)^\perp$.

9. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Demuestre o dé un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) Si x e y son paralelos, y si y y z son paralelos, entonces x y z son paralelos.

   b) Si x y z son ortogonales, y y y z son ortogonales, entonces x y y son paralelos.

10. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$. Demuestre las siguientes proposiciones:

    a) Si x y y son ortogonales, entonces $\operatorname{proy}_y(x) = 0$.

    b) Si x y y son paralelos, entonces $\operatorname{proy}_y(x) = x$.

    c) $\operatorname{norm}_y(x)$ y y son ortogonales.

11. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que:

    a) $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$.

    b) $x \times (y \times z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$.

    c) $x \cdot (y \times z) = z \cdot (x \times y)$

12. Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$. Muestre que $\|x \times y\|^2 = \|x\|\|y\| \operatorname{sen}(\theta)$, donde θ es el ángulo que forman x y y.

13. Sean $x, y \in \mathbb{R}^3$, muestre que el vector $x \times y$ es ortogonal a x y a y.

Ejercicios para la clase CP: 1, 4, 5, 7, 8a, 8b, 9, 10, 11c, 13

1. *a*) Encuentre las ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana del plano $H \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $(-1, 0, 2) \in H$ y tal que el vector $(-1, 1, 2)$ es ortogonal a H.

   b) Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Demuestre que la ecuación cartesiana del plano que pasa por a y al cual b es ortogonal es
$$b \cdot x = b \cdot a.$$

2. Sean $a, a', b, c \in \mathbb{R}^n$, con $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

   a) Suponga que $a' \in L(a; b)$. Demuestre que $L(a; b) = L(a'; b)$.

   b) Suponga que $a' \in P(a; b, c)$. Demuestre que $P(a; b, c) = P(a'; b, c)$.

   c) Suponga que b y c son paralelos. Demuestre que $L(a; b) = L(a; c)$.

   d) Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se verifica que $L(a; b) = L(a; \lambda b)$.

   e) Demuestre que para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y todo $\mu \in \mathbb{R}$ se verifica que $P(a; b, c) = P(a; b, \lambda c + \mu b)$.

3. Sean $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^n$, donde $b \neq 0$ y $b' \neq 0$. Demuestre o dé un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

   a) Si $n = 2$, entonces $L(a, b) \cap L(a', b') = \varnothing$ si y sólo si $a' \notin L(a, b)$ y b y b' son paralelos.

   b) Si $n \geq 3$ y si $L(a, b) \cap L(a', b') = \varnothing$, entonces $a' \notin L(a, b)$ y b y b' son paralelos.

4. Dado S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$, se define
$$a + S = \{a + x : x \in S\}.$$
   Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, con $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

   a) Demuestre que $L(a; b) = a + L(0; b)$.

   b) Demuestre que $P(a; b, c) = a + P(0; b, c)$.

   c) Demuestre que $x \in L(a; b)$ si y sólo si $x - a \in L(0; b)$.

   d) Demuestre que $x \in P(a; b, c)$ si y sólo si $x - a \in L(0; b)$.

5. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$. Se define el conjunto
$$E = \left\{ f : I \to \mathbb{R} : \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe} \right\}.$$
   Demuestre que, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función, $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

6. Si en $\mathbb{R}^2$ se definen las operaciones
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad \text{y} \qquad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$
   para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿es $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial? Indique cuáles son las propiedades de espacio vectorial que se verifican y cuáles no.

7. Si en $\mathbb{R}^2$ se definen las operaciones

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \qquad \text{y} \qquad \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿es $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial? Indique cuáles son las propiedades de espacio vectorial que se verifican y cuáles no.

8. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea $p \in E$. Se define el conjunto

$$E_p = \{(x, p) : x \in E\}.$$

Además, se definen las operaciones $+_p : E_p \times E_p \to E_p$ y $\cdot_p : \mathbb{K} \times E_p \to E_p$ mediante

$$(x, p) +_p (y, p) = (x + y, p) \qquad \text{y} \qquad \alpha \cdot_p (x, p) = (\alpha x, p),$$

para todo $x, y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Demuestre que $(E_p, +_p, \cdot_p, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial.

9. El objetivo de este ejercicio es equipar a $\mathbb{R}^2$ de una estructura de espacio vectorial muy interesante (considerando a los elementos de $\mathbb{R}^2$ como vectores columna). Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y el polinomio $\xi(t) = t^2 + 1$. Dado un polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{R}[t]$, se define $p(A) = a_0 I_2 + a_1 A + \cdots + a_n A^n$.

Para cada polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, se define

$$[p(t)] = \{q(t) \in \mathbb{R}[t] : p(t) - q(t) = r(t)\xi(t), \text{ para algún } r(t) \in \mathbb{R}[t]\}.$$

Sea $\mathbb{F} = \{[p(t)] : p(t) \in \mathbb{R}[t]\}$. Se definen además las operaciones

$$[p_1(t)] + [p_2(t)] = [p_1(t) + p_2(t)] \qquad \text{y} \qquad [p_1(t)][p_2(t)] = [p_1(t)p_2(t)].$$

para todo $p_1(t), p_2(t) \in \mathbb{R}[t]$. Se puede probar que, con estas operaciones, $\mathbb{F}$ es un campo (no intente demostrarlo).

   a) Demuestre que $\xi(A) = 0$.

   b) Demuestre que si $[q(t)] = [p(t)]$, entonces $p(A) = q(A)$.

   c) Sea $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la suma usual de vectores y $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

   $$[p(t)] \cdot x = p(A)x,$$

   para todo $[p(x)] \in \mathbb{F}$ y todo $x \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{F})$ es un espacio vectorial.

10. *Unicidad del neutro de la suma y del inverso de la suma.* Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial.

   a) Asuma que existen dos elementos $0 \in E$ y $0' \in E$ tales que, para todo $x \in E$ se verifica $0 + x = x + 0 = x$ y $0' + x = x + 0' = x$. Demuestre que $0 = 0'$. Esto significa que el elemento neutro de la suma es único.

   b) Sea $x \in E$. Asuma que existen dos elementos $x' \in E$ y $x'' \in E$ tales que $x + x' = x' + x = 0$ y $x + x'' = x'' + x = 0$. Demuestre que $x' = x''$. Esto significa que el inverso de la suma, para cada elemento $x \in E$, es único.

11. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Demuestre que para todo $v \in E$ se tiene que $-(-v) = v$.

12. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Sean $v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Demuestre que si $\alpha v = v$, entonces $v = 0$ o $\alpha = 1$.

13. En la definición de espacio vectorial se inicia con la frase "Dados un campo $\mathbb{K}$, un conjunto no vacío E". Explique por qué es necesario que E sea no vacío detallando cuáles de las propiedades de espacio vectorial son satisfechas y cuáles no cuando se considera $E = \varnothing$.

14. Sean $\mathbb{K}$ un campo, E un conjunto no vacío y $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ dos funciones tales que $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ verifica todas las propiedades de espacio vectorial excepto el inverso de la suma. Asuma que $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ verifica la siguiente propiedad (P): Para todo $v \in E$,

$$0v = 0.$$

Demuestre que $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial.

15. Sea $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ equipado con las operaciones $+ : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ y $\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ definidas por

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \qquad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \qquad 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$

Con estas operaciones, $\mathbb{F}_2$ es un campo, conocido como el *campo de Galois de dos elementos*.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{F}_2)$ un espacio vectorial.

a) Demuestre que, para todo $v \in E$, se tiene que $v + v = 0$.

b) Demuestre que, para todo $v \in E$, se verifica $-v = v$.

16. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Demuestre que para todo $x, y, z, w \in E$ se verifica la igualdad

$$(x + y) + (z + w) = (y + (z + x)) + w.$$

17. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

a) $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2x_1 + x_2 = 0\}$

b) $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_1 x_2 = 1\}$

18. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; |x_1| + |x_2| = x_3\}$

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + x_2 \geq x_3\}$

c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1^2 = x_2\}$

d) $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \det(A) = 0 \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ -1 & 0 & x_3 \\ -1 & 10 & x_2 \end{pmatrix} \right\}$

e) $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \det(A) = 0 \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -x_1 \\ 2 & -1 & x_3 \\ -1 & 3 & x_2 \end{pmatrix} \right\}$

Sugerencia: no calcule $|A|$.

19. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

a) $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \;:\; b + c = a - 2\}$.

b) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \;:\; (p(x))^2 > 0\}$.

c) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \;:\; p'(1) = p'(-2)\}$.

20. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}, +, \cdot)$? Siendo:

a) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; \det(A) = 0\}$.

b) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

c) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; A \text{ es simétrica}\}$.

d) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; A \text{ es no singular}\}$.

e) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \;:\; A \text{ es diagonal}\}$.

21. Sean W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es sub espacio vectorial de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Ejercicios para la clase CP: 1, 2c, 6, 7, 10, 13, 14, 18b, 18d, 21.

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, sean:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

¿Son los vectores v_1, v_2 y v_3 linealmente independientes?

2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, sean:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Son los vectores v_1, v_2 y v_3 linealmente independientes?

3. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[t]$, sean:

$$p_1(t) = t^2 + 1, \quad p_2(t) = t - 2 \quad \text{y} \quad p_3(t) = t + 3.$$

¿Son los vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$ y $p_3(t)$ linealmente independientes?

4. Suponga que $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial V. Muestre que $T = \{w_1, w_2, w_3\}$, donde $w_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $w_2 = v_2 + v_3$ y $w_3 = v_3$, también es linealmente independiente.

5. Estudiar la independencia lineal de los siguientes subconjuntos, en sus respectivos espacios vectoriales.

   a) $S = \{(1,2,3), (1,1,1), (0,1,1)\}$

   b) $S = \{p(x), p'(x), p''(x)\}$, siendo p la función polinómica

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + x - 3. \end{aligned}$$

6. Dado el subconjunto $S = \{(1,0,-1), (0,2,1), (1,2,0), (0,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   a) Estudiar la dependencia lineal de S

   b) Si S es linealmente dependiente, encuentre un subconjunto de S, que sea linealmente independiente y tenga el mayor número de vectores linealmente independientes.

7. Si $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ es un subconjunto de un espacio vectorial V, linealmente independiente, entonces ¿$S' = \{u_1 - u_2, u_1 + u_2 - u_3, u_2 - u_3\}$ es linealmente independiente?

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Suponga que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ el par desordenado $\{x, Ax\}$ es linealmente dependiente. Demuestre que A es una matriz escalar.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   a) Para todo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ linealmente independiente, el conjunto $\{Ax : x \in S\}$ es linealmente independiente.

   b) A es una matriz no singular.

10. Sea $n \geq 1$. Encuentre todos los polinomios $p(t) \in \mathbb{R}_n[t]$ tales que el conjunto

$$\{p(t), p'(t), \ldots, p^{(n)}(t)\}$$

es linealmente independiente.

11. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se define su *traza*, denotada por $tr(A)$, mediante

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   a) Demuestre que para todo par de matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si $tr(AB^\intercal) = 0$, entonces el par $\{A, B\}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial de matrices $\mathbb{R}^{n\times n}$.

   b) ¿Es cierto que si $\{A, B\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ es linealmente independiente, entonces $tr(AB^\intercal) = 0$? Justifique su respuesta.

   c) Suponga que $tr(AB^\intercal) = 0$, con $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. ¿Es cierto que $\{A, B\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{C}^{n\times n}$?

12. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan a $\mathbb{R}^2$?

   a) $T = \{(1,1), (2,-5), (3,0)\}$
   b) $T = \{(1,-2)\}$
   c) $T = \{(3,-1), (-1,\frac{1}{3})\}$
   d) $T = \{(2,1), (-1,4)\}$

13. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan a $\mathbb{R}^3$?

   a) $S = \{(1,1,0), (3,4,2)\}$
   b) $S = \{(1,1,0), (0,1,0), (2,2,2)\}$

14. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan a $\mathbb{R}_2[x]$?

   a) $W = \{3, x+2, (x+1)^2\}$
   b) $W = \{x^2+1, x\}$

15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y $T, U \in \mathbb{R}^4$. Determinar los valores de a y b tales que

$$\text{gen}(T) = \text{gen}(U)$$

con

$$T = \{(a,1,-1,2), (1,b,0,3)\} \quad y \quad U = \{(1,-1,1,-2), (-2,0,0,-6)\}.$$

16. Sea $x \in \mathbb{R}$, determinar los valores de x tales que el vector $v = (1, x, 2) \in \mathbb{R}^3$ pertenezca a gen(S), donde

$$S = \{(1,2,3), (1,1,1)\}$$

17. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y S un subcojunto no vacío de E. Muestre que span(S) es subespacio vectorial de E.

18. Sea $S = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto linealmente independiente. Muestre que span$(S) = \mathbb{R}^n$.

19. Sea $S = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que S genera $\mathbb{R}^3$. Muestre que $S[t] = \{e_1 \cdot x, e_2 \cdot x, e_3 \cdot x\}$ genera a $\mathbb{R}_2[t]$, donde $x = (t^2, t, 1)$.

20. Sea $E = \left\{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$, muestre que $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a E.

21. Sea $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que e_i es ortogonal a e_j para todo $i \neq j$. Muestre que S genera a $\mathbb{R}^n$.

Ejercicios para la clase CP: 3, 4, 5b), 15, 17 y 20.

1. Demuestre que los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}_2[t]$:

   a) $B_1 = \{t^2+1, t-2, t+3\}$;

   b) $B_2 = \{p(t), p'(t), p''(t)\}$, siendo $p(t) = t^2 + t - 3$.

2. Sea V un espacio vectorial y W un subespacio vectorial de V. Suponga que $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ es base de W. Demuestre que $B_2 = \{v_1+v_2+v_3, v_2+v_3, v_3\}$ también es base de W.

3. Determine, si existen, los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\{(a,1,-1,2),(1,b,0,3)\}$ es base del subespacio vectorial $\operatorname{gen}(\{(1,-1,1,-2),(-2,0,0,-6)\})$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Determine bases y calcule la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{n\times n}$:

   a) $W_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^\intercal\}$;

   b) $W_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = -A^\intercal\}$;

   c) $W_3 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} : a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j, \text{ para todo } i, j \in \{1,\dots,n\}\}$;

   d) $W_4 = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} : A \text{ es una matriz escalar}\}$.

5. Sea $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ equipado con las siguientes operaciones:

$$(u,v) + (u',v') = (uu', v+v') \qquad \text{y} \qquad \alpha(u,v) = (u^\alpha, \alpha v),$$

   para todo $(u,v), (u',v') \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Demuestre que $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

   b) Sea e el número de Euler (o constante de Napier). Demuestre que $\{(e,0),(1,1)\}$ es base de E y deduzca el valor de $\dim(E)$.

   c) ¿Es el conjunto $\{(1,0),(1,1)\}$ una base de E?

6. Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ y sea $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ sea $u_i = u + v_i$. Demuestre que $\{u_1, \dots, u_n\}$ es base de V si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq -1$.

7. Suponga que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es base de un espacio vectorial V. Demuestre que $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_n - v_1\}$ también es base de V. ¿Es el recíproco verdadero?

8. Sea U un conjunto no vacío. Denotamos por $\mathbb{R}^U$ el conjunto de todas las funciones definidas sobre U a valores en $\mathbb{R}$. Se dota a $\mathbb{R}^U$ de las siguientes operaciones: Si $f, g : U \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $f+g$ y αf se definen por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{y} \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

   para todo $x \in U$.

   Para cada $a \in U$ se define la función $\varphi_a : U \to \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

   Sea $B = \{\varphi_a : a \in U\}$.

a) Demuestre que $(\mathbb{R}^U, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

b) Demuestre que B es un conjunto linealmente independiente en $(\mathbb{R}^U, +, \cdot, \mathbb{R})$.

c) Sea E el subconjunto de $\mathbb{R}^U$ formado por las funciones $f : U \to \mathbb{R}$ tales que existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in U$ que verifican que $f(x) = 0$ para todo $x \neq a_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^U$.

d) Demuestre que B es base de E y calcule $\dim(E)$.

e) Demuestre que B es base de $\mathbb{R}^U$ si y sólo si U es un conjunto finito. En ese caso, calcule $\dim(\mathbb{R}^U)$.

9. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de un espacio vectorial V, y sea $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un subconjunto de V tal que $v_i \in \mathrm{gen}(B')$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que B' también es una base para V.

10. En cada uno de los siguientes literales se da un espacio vectorial V y un subespacio W de este. Encuentre una base para W y a partir de esta complete una base para V:

a) $V = \mathbb{R}^4$ y $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_3, x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

b) $V = \mathbb{R}_4[t]$ y $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_4[t] : p'(0) + p(0) = 0, p'''(0) - p''(0) = 0\}$.

c) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{12} - a_{21} = 0, a_{11} + a_{22} = 0\}$.

11. En cada uno de los siguientes literales se da un espacio vectorial V, un subconjunto $S \subseteq V$. Determine el subespacio generado por S y halle, a partir de S, una base para dicho subespacio.

a) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \{(1, -1, 0), (1, 0, 0), (1, -2, 0)\}$.

b) $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$ y $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

c) $V = \mathbb{R}^2$ y $S = \{(1, 2), (-2, 1), (1, 0), (0, -2)\}$.

12. Sean $a_1, a_2 a_{,3} \in \mathbb{R}$ tres números distintos. En $\mathbb{R}_2[t]$ se definen los polinomios

$$L_1(t) = \frac{(t - a_2)(t - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \qquad L_2(t) = \frac{(t - a_1)(t - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} \qquad \text{y} \qquad L_3(t) = \frac{(t - a_1)(t - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.$$

a) Demuestre que $B_L = \{L_1(t), L_2(t), L_3(t)\}$ es una base para $\mathbb{R}_2[t]$. Esta base se conoce como *base de interpolación de Lagrange*.

b) Demuestre que para todo $p(t) \in \mathbb{R}_2[t]$ se cumple que

$$[p(t)]_{B_L} = \begin{pmatrix} p(a_1) \\ p(a_2) \\ p(a_3) \end{pmatrix}.$$

13. Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita n y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}, S$ dos bases de V. Considere la función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ mediante

$$T(x) = [x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n]_S.$$

Demuestre que T es una transformación matricial.

14. En cada uno de los siguientes literales, se dan dos bases ordenadas B y S de un espacio vectorial V. Calcule la matriz de cambio de la base B a la base S y la matriz de cambio de la base S a la base B.

a) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 1)\}$.

b) $V = \mathbb{R}_2[t]$, $B = \{1 + t, 1 - t, t^2\}$ y $S = \{t, 1 + t, 1 - t^2\}$.

c) $V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^\intercal = A\}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

15. Sean B y S dos bases ordenadas de un espacio vectorial de dimensión finita V. Demuestre o refute cada uno de las siguientes afirmaciones:

   a) Si $P_{S\leftarrow B} = P_{B\leftarrow S}$, entonces $B = S$.

   b) Si existe $v \in V$, con $v \neq 0$, tal que $[v]_B = [v]_S$, entonces $B = S$.

   c) Si $\dim(V) = n$ y existe una familia de vectores linealmente independiente $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tales que $[v_i]_B = [v_i]_S$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $B = S$.

16. Sea $p(t) \in \mathbb{R}_n[t]$ un polinomio tal que $B = \{p(t), p'(t), \ldots, p^{(n)}(t)\}$ es una base ordenada de $\mathbb{R}_n[t]$. Sea $S = \{t^n, \ldots, t, 1\}$ la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^n[t]$. Calcule $P_{B\leftarrow S}$.

Ejercicios para la clase CP: 4a, 4c, 6, 7, 9, 10c, 11b, 14b, 15.

1. En los siguientes literales se dan un espacio vectorial V y dos subespacios W_1 y W_2. En cada caso, determinar $W_1 + W_2$ y estudiar si W_1 y W_2 están o no en suma directa.

   a) $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \text{gen}(\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\})$ y $W_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : \sum_{k=1}^{4} x_k = 0\right\}$.

   b) $V = \mathbb{R}_2[t]$, $W_1 = \{p \in \mathbb{R}_2[t] : p'(0) = p(0)\}$ y $W_2 = \mathbb{R}_1[t]$.

   c) $V = \mathbb{R}^{3\times 2}$, $W_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 2} : AM = 0\}$ y $W_2 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 2} : N^\intercal A^\intercal - AN = 0\}$, siendo $M = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sean W_1, W_2, W_3, subespacios vectoriales del espacio vectorial E de dimensión finita, tal que

   - $W_1 \subseteq W_2$,
   - $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$, y
   - $W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3$.

   Demostrar que $W_1 = W_2$.

3. Sean W_1, W_2, subespacios vectoriales del espacio vectorial E. Demostrar que:

   a) $W_1 + W_2 \supseteq W_1$ y $W_1 + W_2 \supseteq W_2$

   b) si $W_1 \subseteq W_2$, entonces $W_1 + W_2 = W_2$

   c) si $W_2 \subseteq W_1$, entonces $W_1 + W_2 = W_1$.

4. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se define

   $$\alpha S = \{\alpha x : x \in S\}.$$

   Si W es un subespacio vectorial de E, demuestre o refute los siguientes enunciados:

   a) $W + W = 2W$

   b) $2W + 2W = W$

   c) $2W - 2W = 0$

5. Sea $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] : p''(-1) = 0\}$

   a) Encontrar una base para W

   b) Completar la base del literal anterior a una base para $\mathbb{R}_4[x]$

   c) Determinar un subespacio U de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que $\mathbb{R}_4[x] = U \oplus W$

6. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subseteq E$ dos subespacios vectoriales de E de dimensión finita. Demuestre que $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

7. Sean $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot, \mathbb{R})$ y W_1, W_2 los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

   a) Determinar $W_1 + W_2$.

   b) ¿Es $\mathbb{R}^{2\times 2} = W_1 \bigoplus W_2$?

8. Sean W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Sea

$$W_1 = \text{gen}(\{e_1 + e_2, e_3 - e_4\})$$

y

$$W_2 = \text{gen}(\{-e_2 + e_1, e_3 + e_4\}).$$

Determinar $W_1 + W_2$ y su dimensión.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz invertible, muestre que el conjunto $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, de vectores columna de la matriz, es linealmenete independiente.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Encuentre el espacio nulo y determine la nulidad de la matriz A.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, se define la **imagen** de la matriz como el conjunto

$$\text{img}(A) := \{y \in \mathbb{R}^n : \text{existe } x \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } Ax = y\}.$$

Se define también el **espacio columna** de la matriz A como el conjunto

$$C_A = \text{gen}\{c^1, c^2, \ldots c^m\}.$$

Donde c^i es la columna i-ésima de A. Muestre que $C_A = \text{img}(A)$.

12. Encuentre el espacio nulo, la nulidad y la imagen de las siguientes matrices:

   - $A = \begin{pmatrix} -15 & 9 & -6 \\ 0 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
   - $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
   - $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

13. Demuestre o refute si las siguientes funciones son un producto interno:

   a) $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ en $\mathbb{C}^n$.

   b) $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j$ en $\mathbb{C}^n$.

   c) $\langle x, y \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$ en $\mathbb{R}^2$.

   d) $\langle x, y \rangle = 5x_1y_1 + 2x_2y_2$ en $\mathbb{R}^2$.

e) $\langle f, g\rangle = f'(0) + g'(0)$ en $\mathcal{C}'[0,1]$

f) $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)dx$ en $\mathbb{R}_2[x]$

Ejercicios para la clase CP: 1c, 2, 3b, 5, 9, 10, 12, 13a, 13c, 13f.

1. Una matriz en $\mathbb{R}^{n\times n}$ se dice ortogonal si sus columnas constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Sean $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Muestre cada uno de los siguientes enunciados.

   a) Si Q es una matriz ortogonal y simétrica, entonces $Q^2 = I_n$.

   b) Si Q es una matriz ortogonal, entonces $\det(Q) = \pm 1$.

   c) Si P y Q son matrices ortogonales, entonces PQ es una matriz ortogonal.

2. Muestre que para cualquier $t \in \mathbb{R}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

3. Sean $u_1, \ldots, u_n$ vectores ortogonales en $\mathbb{R}^m$, demuestre que

   a) $\|u_1 - u_2\| = \sqrt{2}$.

   b) $\|u_1 + \ldots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_n\|^2 = n$.

4. En cada espacio vectorial V utilice el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base B de V en (a) una base ortogonal; (b) una base ortonormal.

   a) En $V = \mathbb{R}^2$ con $B = \{(1,2), (-3,4)\}$.

   b) En $V = \mathbb{R}^3$ con $B = \{(1,1,1), (0,1,1), (1,2,3)\}$.

5. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $abc \neq 0$. En cada caso determine una base ortonormal del subespacio vectorial W del espacio vectorial V .

   a) En $V = \mathbb{R}^2$ siendo $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ax + by = 0\}$.

   b) En $V = \mathbb{R}^3$ siendo $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, ax + by + cz = 0\}$.

   c) En $V = \mathbb{R}^4$ siendo $W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x - y - 2z + w = 0\}$.

6. Sean $u, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que si u es ortogonal a $v_1, v_2, \ldots, v_n$, entonces u es ortogonal a todo vector en $\operatorname{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

7. Sean $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$, $S = \operatorname{gen}\{u_1, \ldots, u_k\}$ y $T = \{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$. Demuestre que si $x \in S$ y $y \in T$, entonces x es ortogonal a y.

8. Sea
$$W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a - b + c = 0, a + c = 0\}$$
   un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Calcular $W^\perp$.

9. Sea
$$W = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 2a - b = 0\}$$
   un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

   a) Calcular $W^\perp$.

   b) Calcular $(W^\perp)^\perp$.

   c) ¿Se verifica que $(W^\perp)^\perp = W$?

10. Sea

$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(-1) = p(0)\}$$

un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$.

a) Calcular $W^\perp$

b) ¿$\mathbb{R}_2[x] = W \oplus W^\perp$?

Ejercicios para la clase CP: 3a, 4b, 5b, 9, 10

1. En cada literal, demuestre que las funciones dadas son aplicaciones lineales.

   a)
   $$\begin{aligned} T: \ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} T: \ \mathbb{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) &\longmapsto p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{p''(1)}{2}(x-1)^2. \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} T: \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=1}^{n} k x_k \end{aligned}$$

   d) La función $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ definida, para cada función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por
   $$T(f)(x) = \int_0^x e^{-t} f(2t)\, dt.$$

   e) La función $T : \mathcal{C}^k(I) \to \mathbb{R}_k[x]$ definida para cada $f \in \mathcal{C}^k(I)$ como $T(f) = T_k f$, siendo $T_k f$ el polinomio de aproximación de Taylor de orden k para f alrededor del punto $a \in I$.

2. Sean E, F, G tres espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Para todo $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se definen $f + g : E \to F$ y $\alpha f : E \to F$ mediante
   $$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{y} \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$
   para todo $x \in E$.

   a) Demuestre que con estas operaciones, el conjunto $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$.

   b) Sea $h \in \mathcal{L}(F,G)$. Se define
   $$\begin{aligned} T: \ \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,G) \\ f &\longmapsto h \circ f. \end{aligned}$$
   Demuestre que T es una aplicación lineal.

   c) Sea $k \in \mathcal{L}(E,F)$. Se define
   $$\begin{aligned} S: \ \mathcal{L}(F,G) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,G) \\ f &\longmapsto f \circ k. \end{aligned}$$
   Demuestre que S es una aplicación lineal.

3. Sean E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{L}(E,E)$. Se define $T^0 = I$ y $T^{n+1} = T \circ T^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $I : E \to E$ la aplicación lineal identidad.

   a) Demuestre que $T^n \in \mathcal{L}(E,E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_r x^r \in \mathbb{K}_r[x]$, donde $r \in \mathbb{N}$. Se define

$$p(T) = a_0 I + a_1 T + \cdots + a_r T^r,$$

(refiérase al ejercicio anterior para la definición de las operaciones que intervienen). Demuestre que $p(T)$ es una aplicación lineal.

c) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ la transformación lineal definida por $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{K}^n$. Demuestre que existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}_r[x]$, para algún $r \in \mathbb{N}$, tal que $p(T) = 0$.

4. Sea V un espacio vectorial real con producto interno y sean $w \in V$ un vector fijo, pero arbitrario. Considere

$$\begin{array}{rccc} T: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \langle v, w\rangle \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} S: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \langle w, v\rangle \end{array}.$$

Demuestre que T y S son aplicaciones lineales.

5. Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una aplicación lineal

a) Suponga que T es sobreyectiva y que el conjunto S genera a W. Sea

$$S' = \{v \in V : T(v) \in S\}.$$

Demuestre que S' genera a V. ¿Qué sucede si T no es sobreyectiva?

b) Sea $S \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente y sea

$$S' = \{Tv : v \in S\}.$$

¿Es S' un conjunto linealmente independiente?

6. Sea $\mathbb{R}^+$ con la estructura de espacio vectorial

$$x \oplus y = xy \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que la función $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función tal que $f(1,1,0) = (0,1,-1)$, $f(0,1,1) = (0,0,1)$ y $f(1,0,-1) = (1,0,0)$. ¿Es f una aplicación lineal?

8. Demuestre que una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal si y sólo si existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = ax_1 + bx_1 + cx_3,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Ejercicios para la clase CP: 1a, 1b, 1d, 7

1. En cada caso, determine el núcleo y la imagen de la aplicación lineal dada:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = (x_1 - x_3, 2x_2 + x_3)$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

   b) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(A) = Ae^1 - 3Ae^2$, para todo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   c) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ dada por $T(p(x)) = p(0) + p'(0)$, para todo $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$.

   d) $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $T(A) = A - A^\intercal$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   e) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$, dada por
   $$T(p(x)) = \int_0^x p(t)\, dt,$$
   para todo $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

   f) $T : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f' + \alpha f$, para todo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante. (*Sugerencia:* Recuerde que $(e^{\alpha x} f(x))' = e^{\alpha x}(f'(x) + \alpha f(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$.)

2. Sean V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 cinco espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$ y sean $T_i : V_{i-1} \to V_i$ aplicaciones lineales, para todo $i \in \{1,2,3,4\}$ tales que $\ker(T_i) = \operatorname{img}(T_{i-1})$ para $i \in \{2,3,4\}$. Suponga que $\dim(V_0) = \dim(V_4) = 0$. Demuestre que:

   a) T_1 y T_4 son la aplicación lineal nula;

   b) T_2 es inyectiva;

   c) T_3 es sobreyectiva;

   d) $\dim(V_1) - \dim(V_2) + \dim(V_3) = 0$

3. Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una aplicación lineal.

   a) Demuestre que T es inyectiva si y sólo si, para toda familia linealmente independiente de vectores $v_1, \dots, v_n \in V$, la familia $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$ también es linealmente independiente.

   b) Demuestre que T es sobreyectiva si y sólo si, para toda familia $v_1, \dots, v_n$ de generadores de V, la familia $T(v_1), \dots, T(v_n)$ genera a W.

4. Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal tal que $\ker(T) = \operatorname{img}(T)$.

   a) Demuestre que $T^2 := T \circ T = 0$.

   b) Suponga que V es de dimensión finita. Demuestre que $\dim(V)$ es un número par.

5. En cada uno de los siguientes literales, presente de manera explícita una aplicación lineal $T : V \to W$ que verifique las condiciones impuestas:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^4$, con $T(1,1,0) = (0,0,1,1)$, $T(1,0,1) = (-2,3,0,0)$ y $T(1,1,1) = (0,0,-1,1)$.

   b) $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $W = \mathbb{R}^3$, con $T(1+x) = (1,1,1)$, $T(1-x) = (-1,1,0)$ y $T(1+x^2) = (0,2,-1)$.

   c) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $W = \mathbb{R}^{2\times 2}$, con
   $$T\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
   y
   $$T\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

6. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, y suponga que $V = V_1 \oplus V_2$. Sea $T_1 : V_1 \to W$ una aplicación lineal. Demuestre que existe una única aplicación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v) = T_1(v)$ para todo $v \in V_1$ y tal que $\ker(T) = V_2$.

7. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y suponga que $V = V_1 \oplus V_2$ y $W = W_1 \oplus W_2$. Sean $T_1 \to W_1$ y $T_2 : V_2 \to W_2$ aplicaciones lineales. Demuestre que existe una única aplicación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v) = T_1(v)$ para todo $v \in V_1$ y tal que $T(v) = T_2(v)$ para todo $v \in V_2$.

8. Sean V_1 y V_2 subespacios vectoriales de un espacio vectorial V y sea W un espacio vectorial. Sean $T_1 : V_1 \to W$ y $T_2 : V_2 \to W$ dos aplicaciones lineales. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes:

   a) $T_1(v) = T_2(v)$ para todo $v \in V_1 \cap V_2$.

   b) Existe una aplicación lineal $T : V \to W$ tal que $T(v) = T_1(v)$ para todo $v \in V_1$ y tal que $T(v) = T_2(v)$ para todo $v \in V_2$.

9. En cada caso, determinar si las aplicaciones lineales dadas son o no isomorfismos.

   a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por
   $$T(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 + x_1 \end{pmatrix}$$
   para todo $x \in \mathbb{R}^4$.

   b) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por
   $$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p'''(0) \end{pmatrix}.$$

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x) = x \times e^2$.

   d) $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \ln(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, donde sobre $\mathbb{R}^+$ se considera la estructura de espacio vectorial dada por las operaciones
   $$x \oplus y = xy \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha,$$
   para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. Dado un espacio vectorial V, un *automorfismo* sobre V es un isomorfismo $T : V \to V$.

    a) Demuestre que la composición de automorfismos es un automorfismo.

    b) ¿Es el conjunto de automorfismos sobre V un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(V, V)$?

    c) Demuestre que si T es un automorfismo sobre V, entonces existe T^{-1} y este también es un automorfismo sobre V.

11. Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Demuestre T es inyectiva si y sólo si existe $S : W \to V$ tal que $S \circ T = I_V$, donde $I_V : V \to V$ es la aplicación identidad sobre V.

12. Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal.

    a) Suponga que existen $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(W, V)$ tales que $S_1 \circ T = I_V$ y $T \circ S_2 = I_W$. Demuestre que $S_1 = S_2$.

    b) Deduzca, con las hipótesis del ejercicio anterior, que T es un isomorfismo.

13. Sean V y W espacios vectoriales con producto interno. Una aplicación lineal $T : V \to W$ se dice una *isometría* si verifica la siguiente propiedad: Para todo $v \in V$, $\|T(v)\| = \|v\|$.

    a) Demuestre que Si T es una isometría, entonces $\ker(T) = \{0\}$ y concluya que toda isometría es inyectiva.

b) Demuestre que una isometría $T : V \to W$ es un isomorfismo si y sólo si $\dim(V) = \dim(W)$.

14. Una aplicación lineal $T : V \to V$ se dice una *homotecia* si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$.

    a) Demuestre que si $T \neq 0$ es una homotecia, entonces T es un isomorfismo.

    b) Demuestre que $T : V \to V$ es una homotecia si y sólo si $\{v, T(v)\}$ es un conjunto linealmente dependiente para todo $v \in V$.

    c) Sea $v_0 \in V$ y $f : V \to V$ una función definida por $f(v) = v_0 + T(v)$, donde $T \neq I$ es una homotecia. Demuestre que existe un único $u_0 \in V$ tal que $T(u_0) = u_0$. Al vector u_0 se lo llama *centro de homotecia* de f.

15. Sea $T : V \to W$ una aplicación lineal. Sean U un subespacio vectorial de V tal que $V = \ker(T) \oplus U$ y Q la imagen de T. Demuestre que la aplicación $S : U \to Q$ definida por $S(v) = T(v)$, para todo $v \in U$ es un isomorfismo.

Ejercicios para la clase CP: 1a, 1c, 1d, 2, 5a, 5b, 9a, 9b, 13, 15.

1. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x-2y, 2x+y, x+y). \end{aligned}$$

Sean S y T las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Además, sean

$$S' = \{(1,-1),(0,1)\}$$

y

$$T' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,-1,1)\}$$

bases para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

a) Determine $[f]_{T,S}$.

b) Determine $[f]_{T',S'}$ a través de la expresión $[f]_{T',S'} = P_{T'\leftarrow T}[f]_{T,S}P_{S\leftarrow S'}$.

c) Verifique que se cumple que:

$$[f(1,2)]_{T'} = [f]_{T',S'}[(1,2)]_{S'}.$$

2. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_1[t] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ p(t) &\longmapsto tp(t)+p(0). \end{aligned}$$

Sean

$$S = \{t, 1\} \qquad \text{y} \qquad S' = \{t+1, t-1\}$$

bases para $\mathbb{R}_1[t]$. Sean

$$T = \{t^2, t, 1\} \qquad \text{y} \qquad T' = \{t^2+1, t-1, t+1\}$$

bases para $\mathbb{R}_2[t]$.

a) Determine $[f]_{T,S}$.

b) Determine $[f]_{T',S'}$.

c) Verifique que se cumple que:

$$[f(-3t+3)]_{T'} = [f]_{T',S'}[(-3t+3)]_{S'}.$$

3. Dado $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, considere la transformación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ A &\longmapsto AC - CA. \end{aligned}$$

Sean

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bases para $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine: $[f]_{S,S}$, $[f]_{T,T}$, $[f]_{T,S}$ y $[f]_{S,T}$.

4. Suponga que la matriz de la trasformación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a las bases $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T = \{w_1, w_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (1, 0, 0)$ y $w_1 = (1, 2)$ y $w_2 = (1 - 1)$.

   a) Calcule $[f(v_1)]_T$, $[f(v_2)]_T$ y $[f(v_3)]_T$.
   b) Calcule $f(v_1)$, $f(v_2)$ y $f(v_3)$.
   c) Calcule $f(2, 1, -1)$.
   d) Calcule $f(a, b, c)$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, tal que

$$f(1,0,0) = (1,1,0), \quad f(0,1,0) = (2,0,1) \quad \text{y} \quad f(0,0,1) = (1,0,1).$$

   a) Determine la matriz de representación de f con respecto a la base canónica S de $\mathbb{R}^2$.
   b) Determine $f(1, 2, 3)$.
   c) Calcule $f(a, b, c)$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

6. Suponga que la matriz de representación de la transformación lineal $f\colon \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ con respecto a la base $S = \{t + 1, t - 1\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determine la matriz de f con respecto a la base $T = \{t, 1\}$ para $\mathbb{R}_1[t]$.

7. Dadas las funciones

$$\begin{aligned} f_1\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^t \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} f_2\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-t}. \end{aligned}$$

Sean V el espacio vectorial con base $S = \{f_1, f_2\}$, y el operador lineal

$$\begin{aligned} L\colon V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto f'. \end{aligned}$$

Determine la matriz de L con respecto a la base S.

Ejercicios para la clase CP: 2, 4, 6.