1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcule:

   a) $A^T + A$
   b) $A - A$
   c) $A + A$
   d) $3A$

2. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Calcule:

   a) $A + B$
   b) A^T
   c) B^T

3. Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, considere los siguientes elementos de $\mathbb{C}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & \alpha - 1 \\ 4\alpha & -4 & -8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & -5 \\ 3 & 3 - 2\alpha & -1 \\ 5 & 1 & 3\alpha \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -2\alpha & 1 - \alpha \\ 3\alpha & 0 & \alpha + 1 \\ -3\alpha & -4 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

   Hallar las siguientes matrices:

   a) $A + B$,
   b) $B - C$,
   c) $(-B)^T$,
   d) $A + B + C$,
   e) $3A - B$,
   f) $(2C - 2B)^T$,
   g) $\overline{\alpha} A$; y
   h) $(2 - \alpha)A$.

4. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

   Calcule $A + B$ y AB.

5. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

   a) Encuentre una matriz C tal que $2A + B - C$ es la matriz cero de $\mathbb{R}^{3\times 2}$.

   b) Encuentre una matriz $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $AB^T - BA^T + 2D$ es la matriz de $\mathbb{R}^{3\times 3}$ cuyas entradas son todas igual a 2.

6. Demuestre que la suma de dos matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales, es una matriz de la misma forma.

7. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

   encuentre una matriz $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $3(2A + B + X) = 5(X - A + B)$.

8. Sea E_{pq} la matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contiene un 1 en el lugar $pq-$ésimo y el elemento 0 en los demás lugares.

   a) Obtenga E_{11}, E_{12}, E_{21} y E_{22}.

   b) Encuentre los reales a, b, c y d tales que:

$$aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Determinar x, y, z y $w \in \mathbb{R}$ tales que

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $C, D \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $E \in \mathbb{K}^{p\times q}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Demuestre que:

   a) $A(DE) = (AD)E$;

   b) $A(C + D) = AC + AD$;

   c) $(A + B)C = AC + BC$;

   d) $A(\alpha C) = \alpha(AC) = (\alpha A)C$.

11. Utilizando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

   calcule:

   a) AB;

   b) BC;

   c) $B(C + D)$;

d) $(E+A)B$.

12. Sea $x \in \mathbb{R}$, considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} x & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valores de x se cumple que $bAb^T = 0$?

13. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ donde

$$a_{ij} = \text{máx}\{i, j\} \quad \text{y} \quad b_{ij} = i + j \quad \text{para cada } i \in \{1, 2, 3\} \text{ y } j \in \{1, 2\}.$$

Calcule:

a) $A + B$
b) AB^T
c) $A^T B$

14. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ donde

$$a_{ij} = i - j \quad \text{y} \quad b_{ij} = \sqrt{(-1)^{i+j}} \quad \text{para cada } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Calcule:

a) AB
b) $2A + 3B$
c) $A^T B$

15. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ donde

$$a_{ij} = i^2 + j \quad \text{y} \quad b_{ij} = ij \quad \text{para cada } i \in \{1, 2\} \text{ y } j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Calcule:

a) $A + B$
b) AB^T
c) $A^T B$

16. Determine si existen valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que las matrices A y B conmutan, donde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1+\beta \end{pmatrix}.$$

En caso de existir, determínelos.

17. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que A y B conmutan si y sólo si $ad - bc = 0$.

18. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

donde a y b son reales distintos de cero. Encuentre todas las matrices $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que A y B sean conmutables.

19. Demuestre que para todos los valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

conmutan.

20. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sean

$$C_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B \qquad \text{y} \qquad C_2 = \alpha_2 A + \beta_2 B$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son escalares tales que $\alpha_1\beta_2 \neq \alpha_2\beta_1$. Demuestre que $C_1C_2 = C_2C_1$ sí y solo si $AB = BA$.

21. Determine dos elementos A y B de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $AB = 0$ y $BA \neq 0$.

22. Proponga un ejemplo, no trivial, de matrices $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2).$$

23. Considere un conjunto de n estaciones entre las cuales puede o no haber comunicación. Denotemos esta situación en una matriz $A = (a_{ij})$ donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay comunicación de } i \text{ a } j. \\ 0 & \text{si no hay comunicación.} \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

A continuación, se indica la matriz de comunicación entre cuatro estaciones.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Escriba el diagrama correspondiente.

b) Calcule $A + A^2$ e interprete el resultado.

24. Sean a, b y c tres números reales tales que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Sean las matrices reales

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = I_3 + M^2.$$

a) Calcule QQ^T. ¿Cómo se relaciona este producto con la matriz P?

b) Demuestre que $P^2 = P$.

c) Demuestre que $PM = MP = 0$.

25. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea $B = A - I$; donde I es la identidad. Calcule B^n para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

26. Sea $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$.

a) Determine A^2.

b) Determine A^3.

c) Conjeture la forma para A^n, para $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Demuestre que se verifica la conjetura planteada en el literal anterior.

27. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Conjeture la forma para A^n, para $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Demuestre que se verifica la conjetura planteada en el literal anterior.

28. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Conjeture la forma para A^n, para $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Demuestre que se verifica la conjetura planteada en el literal anterior.

Ejercicios sugeridos: 3a, 3f, 3g, 9, 13a, 17, 18, 20, 22, 24a, 24b y 26.

1. Sean $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $P, Q \in \mathbb{R}^{q\times m}$. Demuestre que:
   a) Si $X^T X = 0$, entonces $X = 0$.
   b) Si $PX^T X = QX^T X$, entonces $PX^T = QX^T$.
   Sugerencia: Muestre primero que si $Y = X(P-Q)^T$, entonces se verifica que $Y^T Y = 0$.

2. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, demuestre que:
   a) $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(A^T)$;
   b) $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$;
   c) $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$;
   d) $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr}(A)$;

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule: $A^T A$, AA^T y $\operatorname{Tr}(A^T A)$.

4. ¿Cuál es el efecto sobre las filas (o columnas) de una matriz A si la multiplicamos por la izquierda (o derecha) por una matriz diagonal?

5. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices diagonales y sea p un entero positivo.
   a) Demuestre que A y B conmutan.
   b) Obtenga una fórmula para A^p.

6. Dado $k \in \mathbb{R}$, sea $D_k = kI_n$ la matriz escalar asociada al escalar k. Sean además $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $k' \in \mathbb{R}$. Probar que:
   a) $D_k A = AD_k = kA$.
   b) $D_{k+k'} = D_k + D_{k'}$.
   c) $D_k D_{k'} = D_{kk'}$.

7. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Demuestre que $AB^T + BA^T$ es una matriz simétrica.

8. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dos matrices simétricas. Demuestre que:
   a) $A + B$ es simétrica.
   b) $(AB)^T = BA$.

9. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dos matrices antisimétricas. Demuestre que:
   a) $A + B$ es antisimétrica.
   b) Toda componente en la diagonal principal de A es cero.
   c) $(AB)^T = BA$ de manera que AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan.

10. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los valores posibles de α y β tal que A sea simétrica.

11. Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, demuestre que:

   a) AA^T y A^TA es simétrica.
   b) $A + A^T$ es simétrica.
   c) $A - A^T$ es antisimétrica.

12. Muestre que toda matriz cuadrada se puede escribir de una forma única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$, escríbala como la suma de una matriz simétrica B y una antisimétrica C.

13. Encuentre una matriz triangular superior A tal que $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -57 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

14. *a*) Recuerde la fórmula del binomio para 2 reales a y b.
   b) Considere la matriz A definida por:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Descomponga A en la suma de la matriz Identidad y de una matriz que llamaremos B. Calcule B^n para todo $n \in \mathbb{N}^*$
   c) Calcule A^n, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, utilizando la fórmula de Newton.

15. Dadas las matrices:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Utilice la fórmula de Newton para determinar A^n y B^n para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

16. Sea la matriz
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$
   a) Compruebe que la matriz $B = A - I$ es idempotente.
   b) Calcule A^n para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

17. Encuentre la matriz elemental, $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, que se obtiene al realizar las siguientes operaciones por filas:

   a) $3F_1 \to F_1$;
   b) $2F_2 \to F_2$;
   c) $\beta F_1 + F_2 \to F_2$, donde $\beta \in \mathbb{R}$;
   d) $3F_1 + F_3 \to F_3$; y
   e) $-\frac{1}{2}F_3 + F_4 \to F_4$.

18. Encuentre las matrices elementales que llevan la matriz
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
   a una matriz escalonada.

19. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -12 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

hallar su rango.

20. Sea $A = \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2i & -1 \end{pmatrix}$, hallar la matriz escalonada reducida por filas equivalente a A.

Ejercicios sugeridos: 1, 2a, 6a, 7, 9, 13, 14, 17a y 19.

1. Considere el siguiente sistema
$$\begin{cases} -x + y - 5z = -2 \\ 3x - 3y + z = -8. \end{cases}$$
   a) Determine el conjunto solución.
   b) Verifique que si se agrega una ecuación como
   $$x - y - 9z = -12$$
   que resulta de sumar dos veces la primera ecuación con la segunda, la información que se agrega es redundante, es decir, la nueva restricción ya está contemplada en las dos primeras ecuaciones.
   c) Por otra parte, explique por qué si se agrega una ecuación como
   $$x - y - 9z = -10$$
   se agrega una inconsistencia. Verifique esto último resolviendo el sistema resultante.

2. Dado el sistema lineal de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 5y - 4z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$
utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

3. Dado el sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$$
utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar si el sistema es consistente.

4. Considere el sistema
$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$
   a) Escriba el sistema en la forma matricial.
   b) Obtenga la solución del sistema y escríbala en la forma $h + u$ donde u es cualquier vector solución del sistema homogéneo y h es un vector solución fijo, del sistema no homogéneo.

5. ¿Existe un valor $r \in \mathbb{R}$, tal que: $x = r$, $y = 2$, $z = 1$ sea una solución del siguiente sistema lineal? De ser así, determínelo.
$$\begin{cases} 3x - 2z = 4 \\ x - 4y + z = -5 \\ -2x + 3y + 2z = 9. \end{cases}$$

6. ¿Cuál o cuáles de los siguientes sistemas lineales tiene una solución no trivial?

   a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ \quad 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$

   b) $\begin{cases} 2x + \ \ y - \ \ z = 0 \\ \ \ x - 2y - 3z = 0 \\ -3x - \ \ y + 2z = 0. \end{cases}$

7. *a*) Sean u, v soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$.
      1) Demuestre que $u + v$ es una solución.
      2) Demuestre que $u - v$ es una solución.
      3) Para cualesquiera escalares r y s, demuestre que $ru + sv$ es una solución.

   b) Demuestre que, si u, v son soluciones del sistema lineal $Ax = b$, entonces $u - v$ es solución del sistema homogéneo $Ax = 0$.

8. *a*) Sea A una matriz de orden 3×3. Suponga que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema homogéneo $Ax = 0$. ¿A es singular o no singular? Justifique su respuesta.

   b) Sea A una matriz de orden $n \times n$. Demuestre que si A es singular, el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene una solución no trivial.

9. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, suponga que los tres puntos $(1, -5)$, $(-1, 1)$ y $(2, 7)$ están en la parábola de ecuación $y = p(x)$, donde $p(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   a) Determinar un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas que debe resolverse para determinar a, b y c.

   b) Encontrar la solución del sistema lineal que obtuvo en la parte anterior para a, b y c.

10. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$; y considere el sistema lineal

$$\begin{cases} x + \ \ y + \alpha z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \alpha \\ 2x + 3y - \ \ z = 1 \end{cases}$$

   a) Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan, determine las condiciones sobre α tales que el sistema tenga solución.

   b) Para las condiciones sobre α en que el sistema tiene solución, escriba el conjunto de soluciones del sistema.

11. Sea $a \in \mathbb{R}$; y considere el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 10y & + & 4z & = & 0. \end{array} \right.$$

   Determine los valores de a tales que el sistema tenga una solución única.

12. Analice para cuáles valores de α y β, el sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = \alpha \\ -6x_1 + 9x_2 + \beta x_3 = 1. \end{cases}$$

a) No tiene solución.

b) Tiene infinitas soluciones.

c) Tiene solución única.

13. *a*) Exprese

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas x, y, z.

b) Encuentre la relación entre α y β para que el sistema tenga solución única. Obtenga dicha solución.

c) Si $\alpha = \beta$, encuentre el rango de la matriz asociada.

14. Considere el sistema de ecuaciones lineales en las variables x, y y z, que depende del parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & kz & = & 3 \\ x & + & ky & + & 3z & = & 2. \end{array} \right.$$

Determinar los valores de k para que el sistema siguiente, con incógnitas x, y y z, tenga:

a) solución única;

b) ninguna solución;

c) infinitas soluciones.

15. Considere el sistema de ecuaciones lineales en las variables x_1, x_2 y x_3, que depende del parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} kx_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & kx_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 1. \end{array} \right.$$

a) Determine los valores de k para los cuales el sistema:

1) no tiene solución;
2) tiene un número infinito de soluciones;
3) tiene solución única.

b) Para los casos en que hay solución única, determine la solución.

c) Para los casos en que hay infinitas soluciones, determine el conjunto solución.

16. Sea el sistema cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array} \right)$$

donde a y b son reales. Para cuáles valores de a y b reales, el sistema:

a) no tiene solución;

b) tiene solución única;

c) tiene infinitas soluciones dependiendo de:

1) un parámetro,
2) dos parámetros.

17. Considere el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & a & a \\ -1 & -a & b \end{pmatrix},$$

donde a , b son reales. En cada caso, para cuáles valores de a y b el sistema tiene:

a) solución única;

b) infinitas soluciones dependiendo de un parámetro;

c) infinitas soluciones dependiendo de dos parámetros.

18. ¿Qué condición debe imponerse a a, b y c para que el siguiente sistema, con incógnitas x, y y z tenga solución?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c. \end{cases}$$

19. Dadas las matrices A y B, comprobar que B es la matriz inversa de A:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

20. *a*) Pruebe que $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

b) Calcule una matriz F escalonada y exprésela como $F = (E_k, \dots, E_1)A$ donde $E_1, \dots, E_k$ son matrices elementales.

21. En cada caso, suponga que la matriz A es invertible, utilizar operaciones por filas para determinar su matriz inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

22. Encuentre la inversa de cada una de las siguientes matrices, donde k_1, k_2, k_3, k_4 y k son escalares diferentes de cero.

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

23. Sean $A, B, A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Demuestre las siguientes proposiciones.

a) Si A y B son invertibles, entonces AB también lo es y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son invertibles, entonces $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

c) A es invertible si y sólo si A^T es invertible.

d) Si A es invertible, entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

24. Si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

    a) Exprese A^{-1} como producto de tres matrices elementales.

    b) Exprese A^T como producto de tres matrices elementales.

25. Sean $A, B, C \in K^{n\times n}$ y $k \in \mathbb{K}$ no nulo.

    a) Suponga que A es invertible. Demuestre que si $AB = AC$, necesariamente $B = C$. Dar un ejemplo de una matriz no nula A tal que $AB = AC$ pero $B \neq C$.

    b) Si A es invertible, demostrar que kA es invertible , con inversa $k^{-1}A^{-1}$.

    c) Suponga que A y B son invertibles y que $A + B \neq 0$. Probar, con un ejemplo, que $A + B$ no es necesariamente invertible.

26. Considere la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

    a) Calcule $M^3 - 2M^2 + 2M$.

    b) Deduzca que la matriz M es invertible y calcule su inversa.

    c) Encuentre M^{-1} mediante operaciones por filas.

27. *a*) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^3 = 0$. Demuestre que $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$.

    b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Verifique que $A^3 = 0$ y utilice el resultado del literal *a* para determinar la inversa de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

28. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, tal que $A^2 - A^3 = I_n$. Demostrar que A es invertible y calcular A^{-1}.

29. Encuentre la matriz B que satisface la ecuación

$$A(B^T + C) = D$$

    donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

30. Dadas las matrices $P, D, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con P y D matrices no singulares determinar una expresión para A bajo cada una de los siguientes supuestos:

    a) $PA = DP$

    b) $PAD = B$

    c) $AP + DB = B$

31. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule una matriz $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertible tal que CA sea triangular con los elementos en la diagonal iguales a uno.

32. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular. Probar que A es invertible si y solo si $a_{ii} \neq 0$ para todo i.

33. Dadas las matrices $P, A, D \in \mathbb{K}^{n\times n}$, con P una matriz no singular, y $k \in \mathbb{N}^*$, determinar una expresión para A^k bajo es supuesto que $PA = DP$.

34. Sea $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, P es ortogonal si $PP^T = P^T P = I_n$. Notemos que esto implica que $P^{-1} = P^T$.

    a) Demuestre que P es una matriz ortogonal, donde

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{3}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

    b) Bajo qué condiciones para a y b la matriz siguiente es ortogonal.

$$X = \begin{pmatrix} a+b & b-a \\ a-b & b+a \end{pmatrix}.$$

    c) Demuestre que si $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

$$I_n - \frac{2}{x^T x} x x^T$$

    es una matriz simétrica y ortogonal.

35. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, supongamos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es ortogonal. Probar que $a^2 + b^2 = 1$ y que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Ejercicios sugeridos: 1, 9, 14, 16, 22c, 23c, 28 y 34b.

1. Obtenga una matriz C triangular tal que A es equivalente a C por filas y $\det(A) = \det(C)$ y calcule $\det(A)$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Sea $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ una matriz de $K^{4\times 4}$ donde A_1, A_2, A_3, A_4 son las columnas de A y $\det(A) = 4$. Calcule:

   a) $\det(A_2, A_1, A_3, A_4)$.
   b) $\det(3A_1, 2A_2 + A_3, A_3, A_4)$.
   c) $\det(3A_1, A_2, 2A_2 + A_3, A_4)$.

3. Calcular los determinantes de cada una de las siguientes matrices transformando cada una de ellas en una matriz triangular superior.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$,

   b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 4 & a & 2 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$,

   c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

   d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Si E_1, E_2, E_3, E_4 son matrices elementales tales que $E_2E_1A = I$ y $E_3E_4 = A$. Determine E_1, E_2, E_3 y E_4.

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

   a) Si A es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
   b) Si $A^2 = A$, entonces $\det(A) = 0$ o $\det(A) = 1$.
   c) Si $A = A^{-1}$, entonces $\det(A) = -1$ o $\det(A) = 1$.
   d) Si $A^TA = I_n$, entonces $\det(A) = -1$ o $\det(A) = 1$.
   e) Si el rango de A es n, entonces $\det(A) \neq 0$.
   f) Si A es antisimétrica y n es impar, entonces $\det(A) = 0$.
   g) Si A es nilpotente, entonces $\det(A) = 0$.
   h) Si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular, entonces $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.
   i) Si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es no singular y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son tales que $PA = BP$, entonces, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica la igualdad $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$, donde $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz identidad.
   j) La matriz A es no singular si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

6. Para cada una de las proposiciones siguientes relativas a matrices cuadradas, dar una demostración o poner un contraejemplo.

   a) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
   b) $\det((A+B)^2) = (\det(A+B))^2$.
   c) $\det((A+B)^2) = \det(A^2 + 2AB + B^2)$.
   d) $\det((A+B)^2) = \det(A^2 + B^2)$.

7. Sea $A \in R^{n\times n}$, invertible. Calcule:

   a) $\dfrac{\det(A^T A (A^T)^{-1})}{\det(A)}$;
   b) $\det(\det(A) I_n)$, donde $\det(A) = 4$.

8. Utilice sólo las propiedades del determinante para verificar que:

   a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & b+a \end{vmatrix} = 0.$ b) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$

9. Si $\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, calcular el determinante de cada una de las matrices siguientes:

   a) $\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} x+1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+1 \end{pmatrix}$. Determine todos los valores de x para los cuales A es invertible.

11. Sea $A = \begin{pmatrix} 4-x & 2\sqrt{5} & 0 \\ 2\sqrt{5} & 4-x & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 4-x \end{pmatrix}$. Determine todos los valores de x para los cuales $\operatorname{rgn}(A) < 3$.

12. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

    Compruebe que $\det(A) = 1$ si n es par y que $\det(A) = -1$ si n es impar.

13. Dada la matriz de orden $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

    calcule su determinante.

14. Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 & -1 \\ 1 & 1 & a & -1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Use el producto de matrices $AA^\intercal$ para obtener el valor de $|\det(A)|$.

15. Demuestre que el sistema

$$\begin{cases} x + y + \ \ z = ax \\ 2x + y - \ \ z = ay \\ x \qquad - 2z = az \end{cases}$$

tiene soluciones no nulas si y sólo si $a(a - \sqrt{6})(a + \sqrt{6}) = 0$.

16. Estudie la solución de los sistemas siguientes con un parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} x & + & ay & - & z & = & a \\ ax & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & a^2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1. \end{cases}$

17. Demuestre que para todo $r \in \mathbb{R}$ y para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ el sistema siguiente tiene solución

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} (1+r)x & + & 2y & + & 2z & + & w & = & a \\ -x & + & (r-1)y & - & z & + & 2w & = & b \\ & & & & (1+r)z & + & 2w & = & c \\ & & & & -z & + & (r-1)w & = & d \end{array} \right.$$

18. Dados $a, b, c, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$, determine condiciones sobre a, b c tal que el sistema posea solución única.

$$\begin{cases} x & - & y & + & az & = & d_1 \\ x & & & + & bz & = & d_2 \\ x & + & y & + & cz & = & d_3 \end{cases}$$

Ejercicios sugeridos: 1, 3b, 5b, 5c, 5g, 9a, 13 y 16a.

1. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sean $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, siendo B una matriz no singular.

   a) Determine una expresión para A bajo el supuesto que
   $$AB + D^T C = \alpha C.$$

   b) Suponga que
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad CB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
   Calcule la matriz A para este caso.

   c) Suponga que $\alpha < 0$. Considerando la matriz A encontrada en el inciso anterior, ¿es posible encontrar una matriz $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = E^2$? Justifique su respuesta.

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, considere la siguiente matriz:
   $$A = \begin{pmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{pmatrix}.$$

   a) Aplique, consecutivamente, las siguientes operaciones por filas a la matriz A:
   $$F_2 + F_1 \to F_1, \qquad F_3 + F_1 \to F_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1+a+b+c} F_1 \to F_1.$$
   Llame a la matriz resultante B.

   b) Considere las siguientes matrices elementales E_1 y E_2 dadas por:
   $$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Determine $C = E_1 E_2 B$ y $\det(C)$.

   c) En base al literal anterior, determine $\det(B)$.

   d) En base al literal *a)*, determine la relación entre $\det(A)$ y $\det(B)$, sin calcularlos.

   e) En base a los literales anteriores, determine $\det(A)$.

3. Considere la siguiente proposición (P): *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz antisimétrica, entonces* $\det(A) = 0$.

   a) Considere
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Verifique que A es antisimétrica y calcule $\det(A)$. Con base en esto, diga si la proposición (P) es verdadera o falsa.

   b) El siguiente razonamiento es erróneo e intenta probar la proposición (P): *Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es antisimétrica, entonces $A^T = -A$, y como el determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta, entonces*
   $$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = -\det(A),$$

de donde $\det(A) = -\det(A)$, *con lo cual* $\det(A) = 0$.

Encuentre el error en el razonamiento precedente, justificando su respuesta.

4. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demuestre o refute los siguientes enunciados:

   a) Si A es nilpotente y conmuta con B, entonces AB es nilpotente.

   b) Si A es singular y B es no singular, entonces AB es singular.

   c) Si A y B son singulares, entonces $A + B$ es singular.

   d) Si A y B son no singulares, entonces $A + B$ es no singular y $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

   e) Si A es no singular, entonces A^2 es no singular y $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

5. Se dice que dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son similares si existe una matriz no singular $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$PA = BP.$$

   a) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dos matrices similares, demuestre que $\det(A) = \det(B)$.

   b) Sean

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ -8 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Determine PA, BP, $\det(B)$ y $\det(P)$.

   c) Considere las matrices A y B del literal anterior, demuestre que A y B son similares.

   d) Considere las matrices A y B del literal anterior, utilice el resultado de los literales a) y c) para calcular $\det(A)$ **sin** realizar la expansión por cofactores.

6. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Demuestre que:

   a) $\text{adj}(A^T) = (\text{adj}(A))^T$;

   b) $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\,\text{adj}(A)$;

   c) $\text{adj}(\alpha A) = \alpha^{n-1}\,\text{adj}(A)$;

   d) $\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$.

7. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ no nulo, demuestre o refute los siguientes enunciados:

   a) Si $\text{adj}(A) = \text{adj}(B)$, entonces $A = B$.

   b) $\text{adj}(\alpha I_n) = \alpha I_n$.

   c) Si $A = \text{adj}(A)$, entonces $\det(A) \neq 0$.

   d) Si $\text{adj}(A - B) = 0$, entonces $A = B$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Obtenga $\text{adj}(A)$, la matriz adjunta de A.

   b) Calcule $\det(A)$.

   c) Verifique sé que cumple la igualdad: $A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = \det(A)I$.

   d) ¿La matriz A es invertible? Si lo es, determine la inversa de A.

9. Considere el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ 3y + 2z = 6, \\ -2x + 3z = -1. \end{cases}$$

Verifique que posee solución única y utilice la regla de Cramer para obtener su solución.

10. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere el siguiente sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ y + \alpha z = 0, \\ \alpha x - 2y + z = \alpha. \end{cases}$$

   a) Determine los valores de α tal que el sistema posee solución única.

   b) Para los casos en donde existe solución única, utilice la regla de Cramer para obtener dicha solución.

11. Dados α, $\beta \in \mathbb{R}$, considere el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y = \alpha, \\ y + z = \beta. \end{cases}$$

Muestre que el sistema posee solución única y utilice la regla de Cramer para resolverlo.

12. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, considere el sistema

$$\begin{cases} x + \lambda y = 1, \\ \lambda x + y = \lambda^2. \end{cases}$$

Determine los valores de λ tales que el sistema

   a) tiene una única solución, escribir el conjunto de soluciones;

   b) tiene infinitas soluciones, escribir el conjunto de soluciones; y

   c) no tiene solución.

13. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = a, \\ 2x_1 + 6x_2 - 11x_3 = b, \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = c. \end{cases}$$

Determine condiciones sobre a, b y c bajo las cuales:

   a) El sistema tiene solución única.

   b) El sistema tiene infinitas soluciones.

   c) El sistema no tiene solución.

En cada caso, determine el conjunto solución.

Ejercicios sugeridos: 3, 4a , 4c, 6a, 7a y 12a.

1. *a*) Sea $V = \mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales, junto con las operaciones usuales de la suma y el producto en los reales, ¿es $\mathbb{N}$ un espacio vectorial real?

   b) ¿Qué se puede decir si se toma $V = \mathbb{Q}$, el conjunto de los números racionales.

2. Sea $V = \{1\}$ el conjunto formado por el número 1, junto con las operaciones $\oplus\colon V \times V \to V$ y $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ definidas por
$$1 \oplus 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot 1 = 1$$
para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es V un espacio vectorial real?

3. Sea $V =]0, +\infty[$ junto con las operaciones $\oplus\colon V \times V \to V$ y $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ definidas por
$$x \oplus y = xy \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha$$
para cada $x, y \in V$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que V es un espacio vectorial real.

4. Sea $V = \mathbb{R}^2$ junto con las operaciones $\oplus\colon V \times V \to V$ y $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ definidas por
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1) \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$
para cada $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es V es un espacio vectorial real?

5. Sea $V = \mathbb{R}^2$ junto con las operaciones $\oplus\colon V \times V \to V$ y $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ definidas por
$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot (x_1, x_2) = (5x_1, 5x_2)$$
para cada $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es V es un espacio vectorial real?

6. Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}$ junto con las operaciones usuales de suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz, verifique que V no es un espacio vectorial real.

7. Sea $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{N} \right\}$ junto con las operaciones $\oplus\colon V \times V \to V$ y $\odot\colon \mathbb{K} \times V \to V$ definidas por
$$A \oplus B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+e & d+f \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot A = \alpha \odot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
para cada $A, B \in V$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$. Determine si V un espacio vectorial real.

8. Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 2 en la variable x. Considere las operaciones $\oplus\colon V \times V \to V$ y $\odot\colon \mathbb{R} \times V \to V$ definidas por
$$p(x) \oplus q(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \oplus (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_2)x + x^2$$
y
$$\alpha \odot p(x) = \alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2$$
para cada $p(x), q(x) \in V$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Es V un espacio vectorial real?

9. Sea $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(1) = 1 + f(0)\}$ junto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función. Determine si se verifica la propiedad de la existencia del neutro aditivo.

10.
    a) Sea $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\}$ junto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función. Demuestre que V es un espacio vectorial real.
    b) Si se define $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lim_{x\to+\infty} f(x) = a\}$ donde $a \in \mathbb{R}$, ¿es V un espacio vectorial real?

11. Sea $V = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es creciente}\}$ junto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un escalar por una función. Determine si V es un espacio vectorial real.

12. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea $p \in E$. Se define el conjunto
$$E_p = \{(x, p) : x \in E\}.$$
Además, se definen las operaciones $+_p : E_p \times E_p \to E_p$ y $\cdot_p : \mathbb{K} \times E_p \to E_p$ mediante
$$(x, p) +_p (y, p) = (x + y, p) \qquad \text{y} \qquad \alpha \cdot_p (x, p) = (\alpha x, p),$$
para todo $x, y \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Demuestre que $(E_p, +_p, \cdot_p, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial.

13. *Unicidad del neutro de la suma y del inverso de la suma.* Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial.
    a) Asuma que existen dos elementos $0 \in E$ y $0' \in E$ tales que, para todo $x \in E$ se verifica $0 + x = x + 0 = x$ y $0' + x = x + 0' = x$. Demuestre que $0 = 0'$. Esto significa que el elemento neutro de la suma es único.
    b) Sea $x \in E$. Asuma que existen dos elementos $x' \in E$ y $x'' \in E$ tales que $x + x' = x' + x = 0$ y $x + x'' = x'' + x = 0$. Demuestre que $x' = x''$. Esto significa que el inverso de la suma, para cada elemento $x \in E$, es único.

14. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial.
    a) Demuestre que para todo $v \in E$ se tiene que $-(-v) = v$.
    b) Sean $v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Demuestre que si $\alpha v = v$, entonces $v = 0$ o $\alpha = 1$.

15. Sean u y $v \in \mathbb{R}^n$ y sea 0_V el vector nulo de $\mathbb{R}^n$.
    a) Demuestre que $0u = 0_V$.
    b) Demuestre que $v + (-1)v = 0_V$.

16. En la definición de espacio vectorial se inicia con la frase "Dados un campo $\mathbb{K}$, un conjunto no vacío E". Explique por qué es necesario que E sea no vacío detallando cuáles de las propiedades de espacio vectorial son satisfechas y cuáles no cuando se considera $E = \varnothing$.

17. Sea $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ equipado con las operaciones $+ : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ y $\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$ definidas por
$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \qquad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \qquad 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad 1 \cdot 1 = 1.$$
Con estas operaciones, $\mathbb{F}_2$ es un campo, conocido como el *campo de Galois de dos elementos*.

    Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{F}_2)$ un espacio vectorial.
    a) Demuestre que, para todo $v \in E$, se tiene que $v + v = 0$.
    b) Demuestre que, para todo $v \in E$, se verifica $-v = v$.

18. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Demuestre que para todo $x, y, z, w \in E$ se verifica la igualdad
$$(x + y) + (z + w) = (y + (z + x)) + w.$$

19. Para $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, se define la siguiente

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

Demuestre que existe el elemento neutro de esta operación.

20. Para $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, se define la siguiente

$$(x_1, x_2, x_3) \oplus (y_1, y_2, y_3) = \left(x_1 y_1, x_2 + y_2, \frac{x_3 y_3}{4} \right).$$

Encuentre el elemento neutro de esta operación y demuestre que en efecto lo es.

Ejercicios sugeridos: 1a, 3, 4, 9, 14a, 15a y 17a.

1. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

   a) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x_1| + |x_2| = x_3\}$

   b) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 \geq x_3\}$

   c) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1^2 = x_2\}$

   d) $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \right\}.$

2. ¿Es W un subespacio del espacio vectorial $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$? Siendo:

   a) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_i = 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

   b) $W = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax^T = \alpha x^T\}$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ fijos.

   c) $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,:\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$

   d) $W = \{\alpha x + \beta y + \gamma z \in \mathbb{R}^n \,:\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$, donde $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ fijos.

   e) $W = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$.

3. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot, \mathbb{R})$? Siendo:

   a) $W = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \,:\, b + c = a - 2\}$.

   b) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,:\, (p(x))^2 > 0\}$.

   c) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,:\, p'(1) = p'(-2)\}$.

   d) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,:\, p(x)$ es de grado $2\}$.

4. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}, +, \cdot)$? Siendo:

   a) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, \det(A) = 0\}$.

   b) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

   c) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A$ es simétrica$\}$.

   d) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A$ es no singular$\}$.

   e) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A$ es diagonal$\}$.

5. ¿Es W subespacio vectorial del espacio vectorial $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$? Siendo:

   a) $W = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,: f(x) = f(x+1)$, para todo $x \in \mathbb{R}\}$.

   b) $W = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,: f$ es par$\}$.

   c) $W = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,: f$ es impar$\}$.

6. En $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, el espacio de funciones del conjunto $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, derivables, con primera derivada continua, se define el conjunto

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : f'(0) = f'(1) = 0 \right\}.$$

   Demostrar que E es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

7. Dado el espacio vectorial V. Sean W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de V. Demuestre que:

   a) $W_1 \cap W_2$ es subespacio vectorial de V.

   b) $W_1 \cup W_2$ es subespacio vectorial de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

8. Los subconjuntos $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_1 + x_3 = 0\}$ y $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x_2 = x_1 + x_3\}$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ con las operaciones usuales. Calcule $W_1 \cap W_2$. ¿El conjunto $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

9. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[t]$, sean:

$$p_1(t) = t^2 + 1, \quad p_2(t) = t - 2 \quad \text{y} \quad p_3(t) = t + 3.$$

   ¿Son los vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$ y $p_3(t)$ linealmente independientes?

10. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $S \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ es un conjunto linealmente dependiente, donde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

11. Suponga que $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de un espacio vectorial V. Muestre que $T = \{w_1, w_2, w_3\}$, donde $w_1 = v_1 + v_2 + v_3$, $w_2 = v_2 + v_3$ y $w_3 = v_3$, también es linealmente independiente.

12. Dado el subconjunto $S = \{(1, 0, -1), (0, 2, 1), (1, 2, 0), (0, -1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

    a) Estudiar la dependencia lineal de S

    b) Si S es linealmente dependiente, encuentre un subconjunto de S, que sea linealmente independiente y tenga el mayor número de vectores linealmente independientes.

13. Si $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ es un subconjunto de un espacio vectorial V, linealmente independiente, entonces ¿$S' = \{u_1 - u_2, u_1 + u_2 - u_3, u_2 - u_3\}$ es linealmente independiente?

14. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan a $\mathbb{R}^2$?

    a) $T = \{(1, 1), (2, -5), (3, 0)\}$

    b) $T = \{(1, -2)\}$

    c) $T = \{(3, -1), (-1, \frac{1}{3})\}$

    d) $T = \{(2, 1), (-1, 4)\}$

15. Sea $S = \{t^2 + 1, t - 2\} \subseteq \mathbb{R}_3[t]$, determine $\langle S \rangle$.

16. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y $T, U \in \mathbb{R}^4$. Determinar los valores de a y b tales que

$$\text{gen}(T) = \text{gen}(U)$$

    con

$$T = \{(a, 1, -1, 2), (1, b, 0, 3)\} \quad y \quad U = \{(1, -1, 1, -2), (-2, 0, 0, -6)\}.$$

17. Sea $x \in \mathbb{R}$, determinar los valores de x tales que el vector $v = (1, x, 2) \in \mathbb{R}^3$ pertenezca a gen(S), donde

$$S = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$$

18. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío de E. Muestre que span(S) es subespacio vectorial de E.

19. Sea $E = \left\{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$, muestre que $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a E.

20. Sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,:\, A \text{ es triangular superior}\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que $B = \{A_1, A_2, A_3\}$ es una base de W.

21. Considere el subespacio vectorial $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_4 = -x_1\}$. Determine una base de W.

22. Sea $S = \{(1,1,0,0,1), (3,4,2,0,-1), (1,1,-1,0,0), (2,3,4,1,1), (2,2,-1,0,1), (2,3,1,0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^5$, determine el subespacio generado por S y una base del mismo.

23. En $\mathbb{R}^{2\times 2}$ se toman los subconjuntos

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a = d, \quad c = b \right\} \qquad \text{y} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Muestre que V y W son subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Determine una base de V y su dimensión.

c) Verifique que la dimensión de W es igual a 2, justificar su respuesta.

d) Determinar $V \cap W$.

24. Sea $S = \langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$ donde $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ y $v_4 = (0,1,1)$.

a) Demuestre que $S = \mathbb{R}^3$.

b) Determine una base para S.

c) ¿El sistema, $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = (a,b,c)$, de ecuaciones lineales, tiene solución única para todo $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$?

Ejercicios sugeridos: 1a, 3c, 5a, 9, 11, 16 , 21 y 23.

1. Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial. Demuestre cada uno de las proposiciones siguientes.

   a) Si $S \subseteq V$, entonces $S \subseteq \operatorname{span}(S)$.

   b) Si $S \subseteq T \subseteq V$ y si T es un subespacio de V, entonces $\operatorname{span}(S) \subseteq T$. Esta propiedad se expresa diciendo que $\operatorname{span}(S)$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

   c) Un subconjunto S de V es un subespacio de V si y solo si $\operatorname{span}(S) = S$.

   d) Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $\operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(T)$.

   e) Si S y T son subconjuntos de V, entonces $\operatorname{span}(S \cap T) \subseteq \operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T)$.

2. Sean V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, S un subespacio de V y $T = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un subconjunto de V. Demuestre que:
$$\operatorname{span}(T) \subseteq S \quad \text{si y solo si} \quad v_i \in S \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

3. Sean V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, S un subespacio de V y $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V$. Demuestre que:
$$\langle\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}\rangle = \langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle \quad \text{si y solo si} \quad v_{n+1} \in \langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle .$$

4. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, y S un subespacio de V. Demuestre que:
$$\dim(S) = \dim(V) \quad \text{si y solo si} \quad S = V.$$

5. Demuestre que los siguientes conjuntos son base de $\mathbb{R}_2[t]$:

   a) $B_1 = \{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$;

   b) $B_2 = \{p(t), p'(t), p''(t)\}$, siendo $p(t) = t^2 + t - 3$.

6. Sea V un espacio vectorial y W un subespacio vectorial de V. Suponga que $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ es base de W. Demuestre que $B_2 = \{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, v_3\}$ también es base de W.

7. Determine, si existen, los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\{(a, 1, -1, 2), (1, b, 0, 3)\}$ es base del subespacio vectorial $\operatorname{gen}(\{(1, -1, 1, -2), (-2, 0, 0, -6)\})$ de $\mathbb{R}^4$.

8. Determine bases y calcule la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^{n\times n}$:

   a) $W_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^\intercal\}$;

   b) $W_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = -A^\intercal\}$;

   c) $W_3 = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} : a_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j, \text{ para todo } i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$;

   d) $W_4 = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} : A \text{ es una matriz escalar}\}$.

9. Sea $E = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ equipado con las siguientes operaciones:
$$(u, v) + (u', v') = (uu', v + v') \qquad \text{y} \qquad \alpha(u, v) = (u^\alpha, \alpha v),$$
para todo $(u, v), (u', v') \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Demuestre que $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

   b) Sea e el número de Euler (o constante de Napier). Demuestre que $\{(e, 0), (1, 1)\}$ es base de E y deduzca el valor de $\dim(E)$.

c) ¿Es el conjunto $\{(1,0),(1,1)\}$ una base de E?

10. Sea $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B_1 = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V. Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ y sea $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ sea $u_i = u + v_i$. Demuestre que $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es base de V si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq -1$.

11. Suponga que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de un espacio vectorial V. Demuestre que $\{v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_n - v_1\}$ también es base de V. ¿Es el recíproco verdadero?

12. Sea $B = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de un espacio vectorial V, y sea $B' = \{w_1,\ldots,w_n\}$ un subconjunto de V tal que $v_i \in \text{gen}(B')$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Demuestre que B' también es una base para V.

13. En cada uno de los siguientes literales se da un espacio vectorial V y un subespacio W de este. Encuentre una base para W y a partir de esta complete una base para V:

    a) $V = \mathbb{R}^4$ y $W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_3, x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

    b) $V = \mathbb{R}_4[t]$ y $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_4[t] : p'(0) + p(0) = 0, p'''(0) - p''(0) = 0\}$.

    c) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $W = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{12} - a_{21} = 0, a_{11} + a_{22} = 0\}$.

14. En cada uno de los siguientes literales se da un espacio vectorial V, un subconjunto $S \subseteq V$. Determine el subespacio generado por S y halle, a partir de S, una base para dicho subespacio.

    a) $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \{(1,-1,0),(1,0,0),(1,-2,0)\}$.

    b) $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$ y $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

    c) $V = \mathbb{R}^2$ y $S = \{(1,2),(-2,1),(1,0),(0,-2)\}$.

Ejercicios sugeridos: 1b, 1c, 4, 5a, 8, 10, 13a y 14a.

1. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de este Probar que:
   a) $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.
   b) W_1 y W_2 están contenidos en $W_1 + W_2$
   c) $W_1 + W_2$ es el menor subespacio de V que contiene a W_1 y a W_2, esto es, $W_1 + W_2 = \text{gen}(W_1, W_2)$.
   d) si $W_1 \subseteq W_2$, entonces $W_1 + W_2 = W_2$
   e) si $W_2 \subseteq W_1$, entonces $W_1 + W_2 = W_1$.

2. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial, $S \subseteq V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se define
$$\alpha S = \{\alpha x : x \in S\}.$$
   Si W es un subespacio vectorial de E, demuestre o refute los siguientes enunciados:
   a) $W + W = 2W$
   b) $2W + 2W = W$
   c) $2W - 2W = \{0\}$, con $W \neq \{0\}$

3. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subseteq E$ dos subespacios vectoriales de E de dimensión finita. Demuestre que $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

4. Sean W_1, W_2 dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ y $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Sea
$$W_1 = \text{gen}(\{e_1 + e_2, e_3 - e_4\}) \qquad \text{y} \qquad W_2 = \text{gen}(\{-e_2 + e_1, e_3 + e_4\}).$$
   Determinar $W_1 + W_2$ y su dimensión.

5. En $\mathbb{R}^3$ sean los subespacios $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$ y $W_2 = \text{gen}(\{(1,1,1), (1, \alpha, 3)\})$, donde α es un número real.
   a) Calcule la dimensión de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$ en función de α.
   b) Si $\alpha = 1$, ¿existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $(\beta, 2, 1) \in W_1 + W_2$?

6. Sean W_1, W_2, W_3, subespacios vectoriales del espacio vectorial E de dimensión finita, tal que
   a) $W_1 \subseteq W_2$,
   b) $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$, y
   c) $W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3$.

   Demostrar que $W_1 = W_2$.

7. Suponga que W_1 y W_2 son subespacios de dimensión igual a 4 de un espacio vectorial V con $\dim(V) = 6$. Hallar todas las dimensiones posibles de $W_1 \cap W_2$.

8. En los siguientes literales se dan un espacio vectorial V y dos subespacios W_1 y W_2. En cada caso, determinar $W_1 + W_2$ y estudiar si W_1 y W_2 están o no en suma directa.
   a) $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{x \in V : x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0\}$ y $W_2 = \{x \in V : x_1 = 0, x_2 = 0\}$.

b) $V=\mathbb{R}^4$, $W_1=\text{gen}(\{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\})$ y $W_2=\left\{x\in V:\sum_{k=1}^{4}x_k=0\right\}$.

c) $V=\mathbb{R}^4$, $W_1=\{x\in V\,:\,x_2+x_3+x_4=0\}$ y $W_2=\{x\in V\,:\,x_1+x_2=0,\,x_3=2x_4\}$.

d) $V=\mathbb{R}^{n\times n}$, $W_1=\{A\in V\,:\,A=A^T\}$ y $W_2=\{A\in V\,:\,A=-A^T\}$.

e) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $W_1=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}:b=-a\in\mathbb{R}\right\}$ y $W_2=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}:a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

f) $V=\mathbb{R}^{3\times 2}$, $W_1=\{A\in V:AM=0\}$ y $W_2=\{A\in V:N^{\intercal}A^{\intercal}-AN=0\}$, siendo $M=\begin{pmatrix}1\\ -3\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

g) $V=\mathbb{R}_2[t]$, $W_1=\{p\in V:p'(0)=p(0)\}$ y $W_2=\mathbb{R}_1[t]$.

h) $V=\mathbb{R}_3[t]$, $W_1=\{p\in V:p(0)+p'(0)=0\}$ y $W_2=\{p\in V:p''(0)-p'(0)=0\}$.

i) V es el espacio de funciones reales, $W_1=\{f\in V\,:\,f(-x)=f(x),$ para todo $x\in\mathbb{R}\}$ y $W_2=\{f\in V\,:\,f(-x)=-f(x),$ para todo $x\in\mathbb{R}\}$.

9. Sea $W=\{p(x)\in\mathbb{R}_4[x]:p''(-1)=0\}$

   a) Encontrar una base para W

   b) Completar la base del literal anterior a una base para $\mathbb{R}_4[x]$

   c) Determinar un subespacio U de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que $\mathbb{R}_4[x]=U\oplus W$

10. En $\mathbb{R}_1[t]$, se define el subespacio vectorial

$$V=\{p(t)\in\mathbb{R}_1[t]:p'(0)=p(1)\}.$$

Determinar un subespacio vectorial W de $\mathbb{R}_1[t]$ tal que

$$\mathbb{R}_1[t]=V\oplus W.$$

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

   a) Si W_1, W_2 son subespacios de $\mathbb{R}^3$ con $\dim(W_1)=\dim(W_2)=2$, entonces existe $v\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ tal que $v\in W_1\cap W_2$.

   b) Si W_1, W_2 y W_3 son subespacios de $\mathbb{R}^{11}$ con $\dim(W_1)=\dim(W_2)=\dim(W_3)=4$, entonces $\dim(W_1\cap W_2\cap W_3)\geq 1$.

Ejercicios sugeridos: 1a, 1b, 1c, 4, 6, 7, 8a, 8d, 8e y 10.

1. Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y sean $u,v,w\in V$. Desarrolle $\langle w,\alpha u+\beta v\rangle$ y $\langle\alpha u+\beta v,\alpha u+\beta v\rangle$.

2. Demuestre o refute si las siguientes funciones son un producto interno:

   a) $\langle x,y\rangle = 2x_1x_2+3y_1y_2$ en $\mathbb{R}^2$.
   b) $\langle x,y\rangle = 5x_1y_1+2x_2y_2$ en $\mathbb{R}^2$.
   c) $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i$ en $\mathbb{R}^n$.
   d) $\langle A,B\rangle = \operatorname{Tr}(AB-BA)$ en $\mathbb{R}^{n\times n}$.
   e) $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)(q(t)+1)\,dt$ en $\mathbb{R}_2[t]$.
   f) $\langle f,g\rangle = f'(0)+g'(0)$ en $\mathcal{C}'[0,1]$.
   g) $\langle f,g\rangle = f(x)-g(x)$ en $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
   h) $\langle p,q\rangle = \sum_{i\in\mathcal{I}} p(i)q(i)$ en $\mathbb{R}_2[t]$, con $\mathcal{I}=\{1,2,3\}$.

3. Sean a y b números reales. Determine las condiciones sobre a y b para que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dado por
$$\langle x,y\rangle = x_1y_1+x_2y_2-ax_1y_2-bx_2y_1$$
para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, defina a un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

4. Para el espacio vectorial $\mathcal{P}[x]$ donde $p(x),q(x)\in\mathcal{P}[x]$, tales que $p(x) = a_1x+a_0$ y $q(x) = b_1x+b_0$; se define el producto interno:
$$\langle p,\, q\rangle = a_1b_1+a_0b_1+a_1b_0+8a_0b_0$$
Sean los vectores $p(x) = -1+4x$ y $q(x) = 5+2x$, calcule $\langle p,\, q\rangle$ y $\|p-q\|$.

5. Sean $u,v_1,v_2,\ldots,v_n$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que si u es ortogonal a $v_1,v_2,\ldots,v_n$, entonces u es ortogonal a todo vector en $\operatorname{gen}(\{v_1,v_2,\ldots,v_n\})$.

6. Sean $\{u_1,\ldots,u_k,u_{k+1},\ldots,u_n\}$ una base ortogonal para $\mathbb{R}^n$, $S=\operatorname{gen}\{u_1,\ldots,u_k\}$ y $T=\{u_{k+1},\ldots,u_n\}$. Demuestre que si $x\in S$ y $y\in T$, entonces x es ortogonal a y.

7. Sea $a\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Considere el conjunto
$$M=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,a\rangle = 0\}.$$
Demuestre que:

   a) $0\in M$;
   b) Si $x,y\in M$, entonces $x+y\in M$;
   c) Si $x\in M$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $\alpha x\in M$.

8. Sea V un espacio vectorial real con producto interno. Sean $x,y\in V$. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados.

   a) $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ si y sólo si $\langle x,y\rangle=0$.
   b) $\|x+y\|=\|x-y\|$ si y sólo si $\langle x,y\rangle=0$.
   c) $\|x\|=\|y\|$ si y solo si $\langle x+y,x-y\rangle=0$.
   d) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

9. Se define la distancia entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \|x-y\|. \end{aligned}$$

Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, demuestre que

a) $\mathrm{d}(x,y) \geq 0$.

b) $\mathrm{d}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

c) $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$.

d) $\mathrm{d}(x,y) \leq \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$.

10. Sean $u_1, \ldots, u_n$ vectores ortonormales en $\mathbb{R}^m$, demuestre que

a) $\|u_1 - u_2\| = \sqrt{2}$.

b) $\|u_1 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2 = n$.

11. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se define la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ dado por

$$\langle u, v \rangle_\alpha = \langle \alpha u, (\alpha + 1)v \rangle$$

para todo $(u, v) \in V \times V$.

a) Si $\alpha = -1$, muestre que $\langle u, u \rangle_\alpha = 0$, para todo $u \in V$. ¿Qué se puede decir respecto a este resultado si $\alpha = 0$?

b) Determine todos los valores de α tales que $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ sea un producto interno.

c) Tomando $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$, para los valores de α obtenidos en el literal anterior, considerando la norma $\|\cdot\|_\alpha$ y la distancia $d_\alpha(\cdot, \cdot)$ asociados a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$, calcule $\|u\|_\alpha$ y $d_\alpha(u, v)$, donde $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$.

12. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ se define la función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((u_1, u_2), (v_1, v_2)) &\longmapsto \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Obtenga todos los valores de α tal que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sea un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

Utilizando los valores de α obtenido en el literal a junto con el producto interno definido:

b) Sea $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Muestre que B es un conjunto ortogonal.

c) Obtenga una base ortonormal a partir de la base B.

13. En el espacio vectorial

$$\mathcal{M} = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{21} = 0\},$$

el espacio vectorial de las matrices triangulares superiores de orden 2×2, para $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}$ se define

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}.$$

a) Sea $A \in \mathcal{M}$, demuestre que $\langle A, A \rangle = 0$ si y sólo si $A = 0$.

b) Asumiendo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno sobre $\mathcal{M}$, determine si las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son ortogonales entre sí.

14. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[t]$, definimos

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{k} p(k/n)q(k/n)$$

para cada $p, q \in \mathcal{R}_n[t]$.

a) Demostrar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno para $\mathbb{R}_n[t]$.

b) Calcular $\langle p, q \rangle$ cuando $p(t) = t$ y $q(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

c) Si $p(t) = t$, hallar todos los polinomios ortogonales q a p.

15. Suponga que $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de V. Demostrar cada enunciado.

a) Para todo $u \in V$ se tiene que $u = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle u, e_n \rangle e_n$.

b) $\langle a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.

c) Para todo par de vectores $u, v \in V$ tenemos que $\langle u, v \rangle = \langle u, e_1 \rangle \langle v, e_1 \rangle + \cdots + \langle u, e_n \rangle \langle v, e_n \rangle$.

Ejercicios sugeridos: 2a, 2d, 2h, 6, 10, 12 y 15a.

1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $abc \neq 0$. En cada caso determine una base ortonormal del subespacio vectorial W del espacio vectorial V .

   a) En $V = \mathbb{R}^2$ siendo $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ax + by = 0\}$.
   b) En $V = \mathbb{R}^3$ siendo $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, ax + by + cz = 0\}$.
   c) En $V = \mathbb{R}^4$ siendo $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x - y - 2z + w = 0\}$.

2. En cada espacio vectorial V utilice el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base B de V en (a) una base ortogonal; (b) una base ortonormal.

   a) En $V = \mathbb{R}^2$ con $B = \{(1, 2), (-3, 4)\}$.
   b) En $V = \mathbb{R}^3$ con $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$.

3. Sea $V = (\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot, \mathbb{R})$ donde $\mathcal{M}_{2\times 2}$ es el conjunto de matrices simétricas, se define la función:

$$\langle A,\, B\rangle = \operatorname{Tr}(AB)$$

   Para todo $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   a) Demostrar que $\langle A,\, B\rangle$ define un producto interno en V.
   b) Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, determinar si B es ortogonal usando el producto interno anterior. Si no lo es, construir una base ortogonal a partir de B.

4. Sean V un espacio vectorial con producto interno y sean U, W subespacios de V. Muestre que:

   a) $W^\perp$ es un subespacio de V.
   b) $\{0_V\}^\perp = V$.
   c) $V^\perp = \{0_V\}$.
   d) $W \cap W^\perp = \{0_v\}$.
   e) Si $U \subseteq W$, entonces $W^\perp \subseteq U^\perp$

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea W un subespacio de este. Demuestre que:

   a) Si $\dim(V) < +\infty$, entonces $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$.
   b) Si $\dim(W) < +\infty$, entonces $W = \left(W^\perp\right)^\perp$.

6. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sea W un subespacio de dimensión finita de V. Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^\perp$ y $\langle x, y\rangle \neq 0$.

7. Suponga que U es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno. Demuestre que $U^\perp = \{0\}$ si y solo si $U = V$.

8. Suponga que V es un espacio vectorial con producto interno, sean $v_1, \ldots, v_m \in V$. Muestre que

$$\{v_1, \ldots, v_m\}^\perp = (\operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_m\}))^\perp .$$

9. Sea
$$W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a-b+c=0, a+c=0\}$$
un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Calcular $W^{\perp}$.

10. Sea
$$W = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 2a-b=0\}$$
un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

    a) Calcular $W^{\perp}$.

    b) Calcular $(W^{\perp})^{\perp}$.

    c) ¿Se verifica que $(W^{\perp})^{\perp} = W$?

11. Sea
$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : p(-1) = p(0)\}$$
un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$.

    a) Calcular $W^{\perp}$

    b) ¿$\mathbb{R}_2[x] = W \oplus W^{\perp}$?

12. Sabemos que
$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}_n[t] \times \mathbb{R}_n[t] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p,q) &\longmapsto \sum_{k=0}^{n} p(k/n)q(k/n) \end{aligned}$$
Es un producto interno en $\mathbb{R}_n[t]$. Para $n=2$, calcular $\langle\{t\}\rangle^{\perp}$

13. En $\mathbb{R}^4$, sea
$$U = \operatorname{span}(\{(1,1,0,0),(1,1,1,2)\}).$$
Encuentre $u \in U$ tal que $\|u-(1,2,3,4)\|$ es lo más pequeño posible.

14. Sea $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, considere los subespacios de $\mathbb{R}^4$:
$$S = \langle\{w_1, w_2\}\rangle \qquad \text{y} \qquad T = \langle\{w_3, w_4\}\rangle\,.$$

    a) Demuestre que U y T son subespacios ortogonales.

    b) Si $x = 2w_1 - w_2 - 4w_3 + 2w_4$.

        1) Determine vectores $x_1 \in S$ y $x_2 \in T$, tales que $x = x_1 + x_2$.

        2) Calcule $\operatorname{proy}_T(x)$.

        3) Determine la distancia de x al subespacio S.

Ejercicios sugeridos: 1b, 4a, 4b, 4d, 5, 9, 11 y 13.

1. En cada literal, demuestre que las funciones dadas son aplicaciones lineales.

   a)
   $$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} -x_2 & x_1+x_2 \\ x_3-x_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} T: \mathbb{R}_3[x] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[x] \\ p(x) &\longmapsto p(1)+p'(1)(x-1)+\frac{p''(1)}{2}(x-1)^2. \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=1}^{n} kx_k \end{aligned}$$

   d) La función $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1/2])$ definida, para cada función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por
   $$T(f)(x) = \int_0^x e^{-t} f(2t)\, dt,$$
   para todo $x \in [0,1/2]$.

2. Sean E, F, G tres espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Para todo $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se definen $f+g : E \to F$ y $\alpha f : E \to F$ mediante
   $$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad \text{y} \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$
   para todo $x \in E$.

   a) Demuestre que, con estas operaciones, el conjunto $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$.

   b) Sea $h \in \mathcal{L}(F,G)$. Se define
   $$\begin{aligned} T: \mathcal{L}(E,F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,G) \\ f &\longmapsto h \circ f. \end{aligned}$$
   Demuestre que T es una aplicación lineal.

   c) Sea $k \in \mathcal{L}(E,F)$. Se define
   $$\begin{aligned} S: \mathcal{L}(F,G) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,G) \\ f &\longmapsto f \circ k. \end{aligned}$$
   Demuestre que S es una aplicación lineal.

3. Sea $\mathbb{R}^+$ con la estructura de espacio vectorial
   $$x \oplus y = xy \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha,$$
   para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Demuestre que la función $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función tal que $f(1,1,0) = (0,1,-1)$, $f(0,1,1) = (0,0,1)$ y $f(1,0,-1) = (1,0,0)$. ¿Es f una aplicación lineal?

5. En cada caso, determine el núcleo y la imagen de la aplicación lineal dada:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = (x_1 - x_3, 2x_2 + x_3)$, para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

   b) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(A) = Ae^1 - 3Ae^2$, para todo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   c) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ dada por $T(p(x)) = p(0) + p'(0)$, para todo $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$.

   d) $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $T(A) = A - A^{\intercal}$, para todo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   e) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x]$, dada por
   $$T(p(x)) = \int_0^x p(t)\, dt,$$
   para todo $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

   f) $T : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $T(f) = f' + \alpha f$, para todo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante. (*Sugerencia:* Recuerde que $(e^{\alpha x} f(x))' = e^{\alpha x}(f'(x) + \alpha f(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$.)

6. Sean V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 cinco espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$ y sean $T_i : V_{i-1} \to V_i$ aplicaciones lineales, para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tales que $\ker(T_i) = \operatorname{img}(T_{i-1})$ para $i \in \{2, 3, 4\}$. Suponga que $\dim(V_0) = \dim(V_4) = 0$. Demuestre que:

   a) T_1 y T_4 son la aplicación lineal nula;

   b) T_2 es inyectiva;

   c) T_3 es sobreyectiva;

   d) $\dim(V_1) - \dim(V_2) + \dim(V_3) = 0$

7. Sean V, W dos espacios vectoriales y $T : V \to W$ una aplicación lineal.

   a) Demuestre que T es inyectiva si y sólo si, para toda familia linealmente independiente de vectores $v_1, \dots, v_n \in V$, la familia $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$ también es linealmente independiente.

   b) Demuestre que T es sobreyectiva si y sólo si, para toda familia $v_1, \dots, v_n$ de generadores de V, la familia $T(v_1), \dots, T(v_n)$ genera a W.

8. Sea $T : V \to V$ una aplicación lineal tal que $\ker(T) = \operatorname{img}(T)$.

   a) Demuestre que $T^2 := T \circ T = 0$.

   b) Suponga que V es de dimensión finita. Demuestre que $\dim(V)$ es un número par.

9. En cada uno de los siguientes literales, presente de manera explícita una aplicación lineal $T : V \to W$ que verifique las condiciones impuestas:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^4$, con $T(1,1,0) = (0,0,1,1)$, $T(1,0,1) = (-2,3,0,0)$ y $T(1,1,1) = (0,0,-1,1)$.

   b) $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $W = \mathbb{R}^3$, con $T(1+x) = (1,1,1)$, $T(1-x) = (-1,1,0)$ y $T(1+x^2) = (0,2,-1)$.

   c) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $W = \mathbb{R}^{2\times 2}$, con
   $$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   y
   $$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. En cada caso, determinar si las aplicaciones lineales dadas son o no isomorfismos.

    a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por
    $$T(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 & x_4 + x_1 \end{pmatrix}$$
    para todo $x \in \mathbb{R}^4$.

b) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por
$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p''(0) & p'''(0) \end{pmatrix}.$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x) = x \times e^2$.

d) $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $T(x) = \ln(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$, donde sobre $\mathbb{R}^+$ se considera la estructura de espacio vectorial dada por las operaciones
$$x \oplus y = xy \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha,$$
para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

11. Dado un espacio vectorial V, un *automorfismo* sobre V es un isomorfismo $T : V \to V$.

a) Demuestre que la composición de automorfismos es un automorfismo.

b) ¿Es el conjunto de automorfismos sobre V un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(V, V)$?

c) Demuestre que si T es un automorfismo sobre V, entonces existe T^{-1} y este también es un automorfismo sobre V.

12. Sean V y W espacios vectoriales con producto interno. Una aplicación lineal $T : V \to W$ se dice una *isometría* si verifica la siguiente propiedad: Para todo $v \in V$, $\|T(v)\| = \|v\|$.

a) Demuestre que Si T es una isometría, entonces $\ker(T) = \{0\}$ y concluya que toda isometría es inyectiva.

b) Demuestre que una isometría $T : V \to W$ es un isomorfismo si y sólo si $\dim(V) = \dim(W)$.

13. Una aplicación lineal $T : V \to V$ se dice una *homotecia* si existe un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$.

a) Demuestre que si $T \neq 0$ es una homotecia, entonces T es un isomorfismo.

b) Demuestre que $T : V \to V$ es una homotecia si y sólo si $\{v, T(v)\}$ es un conjunto linealmente dependiente para todo $v \in V$.

c) Sea $v_0 \in V$ y $f : V \to V$ una función definida por $f(v) = v_0 + T(v)$, donde $T \neq I$ es una homotecia. Demuestre que existe un único $u_0 \in V$ tal que $T(u_0) = u_0$. Al vector u_0 se lo llama *centro de homotecia* de f.

14. En $\mathbb{R}^3$, se define el conjunto
$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}.$$

a) Demuestre que S es una base para $\mathbb{R}^3$.

b) Determine si existe una única aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[t]$ tal que
$$T(1, 0, 0) = 1 - t, \qquad T(0, 1, 1) = 2t \qquad \text{y} \qquad T(0, 0, 1) = 2.$$
De existir, ¿a qué es igual $T(x, y, z)$ con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$?

c) Halle la imagen de T y determine $\dim(\text{img}(T))$.

d) Determine $\dim(\ker(T))$.

e) ¿Es T inyectiva?, ¿es T sobreyectiva? Justifique sus respuestas.

15. Sean E un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $T \in \mathcal{L}(E, E)$ una aplicación lineal de E en sí mismo.

a) Demuestre que $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de E.

b) Si $\text{img}(T) = \{0\}$, determine $\ker(T)$.

c) Sea $S \in \mathcal{L}(E, E)$, demuestre que $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$.

Ejercicios sugeridos: 1a, 4, 5b, 6, 9b, 10a, 12 y 15.

1. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x-2y, 2x+y, x+y). \end{aligned}$$

Sean S y T las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Además, sean

$$S' = \{(1,-1),(0,1)\}$$

y

$$T' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,-1,1)\}$$

bases para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

a) Determine $[f]_T^S$.
b) Determine $[f]_{T'}^{S'}$ a través de la expresión $[f]_{T'}^{S'} = [I]_{T'}^{T}[f]_T^S[I]_S^{S'}$.
c) Verifique que se cumple que:

$$[f(1,2)]_{T'} = [f]_{T'}^{S'}[(1,2)]_{S'}.$$

2. Dada la transformación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_1[t] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ p(t) &\longmapsto tp(t)+p(0). \end{aligned}$$

Sean

$$S = \{t,1\} \qquad \text{y} \qquad S' = \{t+1, t-1\}$$

bases para $\mathbb{R}_1[t]$. Sean

$$T = \{t^2, t, 1\} \qquad \text{y} \qquad T' = \{t^2+1, t-1, t+1\}$$

bases para $\mathbb{R}_2[t]$.

a) Determine $[f]_T^S$.
b) Determine $[f]_{T'}^{S'}$.
c) Verifique que se cumple que:

$$[f(-3t+3)]_{T'} = [f]_{T'}^{S'}[(-3t+3)]_{S'}.$$

3. Dado $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, considere la transformación lineal

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ A &\longmapsto AC - CA. \end{aligned}$$

Sean

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bases para $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine:

a) $[f]_S^S$ b) $[f]_T^T$ c) $[f]_T^S$ d) $[f]_S^T$

4. Suponga que la matriz de la trasformación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con respecto a las bases $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T = \{w_1, w_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, es
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
donde $v_1 = (-1,1,0), v_2 = (0,1,1)$ y $v_3 = (1,0,0)$ y $w_1 = (1,2)$ y $w_2 = (1-1)$.
   a) Calcule $[f(v_1)]_T$, $[f(v_2)]_T$ y $[f(v_3)]_T$.
   b) Calcule $f(v_1)$, $f(v_2)$ y $f(v_3)$.
   c) Calcule $f(2,1,-1)$.
   d) Calcule $f(a,b,c)$, para cada $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

5. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, tal que
$$f(1,0,0) = (1,1,0), \quad f(0,1,0) = (2,0,1) \quad \text{y} \quad f(0,0,1) = (1,0,1).$$
   a) Determine la matriz de representación de f con respecto a la base canónica S de $\mathbb{R}^3$.
   b) Determine $f(1,2,3)$.
   c) Calcule $f(a,b,c)$, para cada $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

6. Suponga que la matriz de representación de la transformación lineal $f\colon \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$ con respecto a la base $S = \{t+1, t-1\}$ es
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Determine la matriz de f con respecto a la base $T = \{t, 1\}$ para $\mathbb{R}_1[t]$.

7. Dadas las funciones
$$\begin{aligned} f_1\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^t \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} f_2\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-t}. \end{aligned}$$
Sean V el espacio vectorial con base $S = \{f_1, f_2\}$, y el operador lineal
$$\begin{aligned} L\colon V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto f'. \end{aligned}$$
Determine la matriz de L con respecto a la base S.

8. Determine una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(P_1) = P_2$, donde
$$P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x,y,z) = (1+t, 1+s, -2t+s),\ t,s \in \mathbb{R}\}$$
y
$$P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 2y - z = 0\}.$$

9. Considere a una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$\ker(T) = \text{gen}(\{(1,1,1,0), (2,-1,1,1)\}) \qquad \text{y} \qquad \text{img}(T) = \text{gen}(\{(1,1,1), (0,0,1)\}).$$
Encuentre a T.

10. Sean W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y la aplicación lineal
$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow W \\ v &\longmapsto \text{proy}_W(v). \end{aligned}$$
   a) Demuestre que T es lineal.

b) Si $n = 3$ y $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$, encuentre una base B de W y calcule $[T]_B^C$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) Utilice el resultado del literal anterior para determinar $T(x, y, z)$ para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

d) Calcule la distancia de $(-1, 2, 5)$ a W, utilizando la transformación T.

11. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal, $B_1 = \{v_1, v_2\}$, $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente y $[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & y \\ 3 & z \end{pmatrix}$ la matriz asociada a T en las bases B_1 y B_2.

a) Si $T(v_2) = w_1 + 2w_2 + w_3$. Encuentre x, y, z.

b) Si $v = 2v_1 - v_2$. Calcule $[T(v)]_{B_2}$.

c) Decida si T es inyectiva, sobreyectiva. Justifique su respuesta.

12. En $\mathbb{R}_1[t]$ y $\mathbb{R}^2$, los conjuntos

$$M = \{1 + t, \quad 1 - t\} \qquad \text{y} \qquad N = \{(1, -1), \quad (0, 1)\}$$

son bases de $\mathbb{R}_1[t]$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Sea $T\colon \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que

$$[T]_N^M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar $[2 + t]_M$.

b) Determinar $[T(2 + t)]_N$.

c) Calcular $\det([T]_N^M)$, con esto, indicar si T es biyectivo.

d) Determine $T(a + bt)$, para $a + bt \in \mathbb{R}_1[t]$.

13. Sean $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{w_1, w_2\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ tales que

$$w_1 = -v_2 \qquad \text{y} \qquad w_2 = v_1 + v_2.$$

a) Sea $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación identidad. Encuentre $[I]_{B'}^B$.

Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Encuentre $[T]_{B'}^B$.

c) Calcule $[T(2v_1 - v_2)]_{B'}$.

d) Suponga B es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Calcule las coordenadas en la base B de los vectores $T(u)$ y $T(v)$, si $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $[v]_{B'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

14. Sean B_1 y B_2 bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 80 \\ 1 & -7 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre $[v]_{B_1}$ si $[T(v)]_{B_2} = \begin{pmatrix} -240 \\ 23 \\ 60 \end{pmatrix}$.

b) Encuentre la dimensión de $\operatorname{img}(T)$ y de $\ker(T)$.

c) ¿Es T inyectiva?, ¿es T sobreyectiva? Justifique su respuesta.

d) Sea $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que

$$[S]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule $[T \circ S]_{B_2}^{B_2}$.

15. Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por $T(v) = Av$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Compruebe que T es invertible. Justifique su respuesta.

b) Calcule $[T^{-1}]_C^C$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

c) Sea $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[T^{-1}]_C^B$.

16. Dada

$$[f]_S^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde

$$B = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$$

y S una base de $\mathbb{R}^3$.

a) Determinar $[I]_B^C$, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Determinar $[f]_S^C$.

17. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$f(1,1,-1) = (1,1,0), \quad f(1,-1,1) = (1,0,1) \quad \text{y} \quad f(-1,1,1) = (0,1,1).$$

Sean

$$B_1 = \{(1,0,1),(1,-1,0),(1,1,-1)\} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \{(1,0,-1),(0,-1,1),(-1,1,1)\}$$

dos bases de $\mathbb{R}^3$. Determine:

$$[I]_{B_2}^{B_1}, \quad [I]_{B_1}^{B_2}, \quad [f]_{B_1}^{B_1}, \quad [f]_{B_2}^{B_1} \quad \text{y} \quad [f]_{B_1}^{B_2}.$$

18. Sea $f\colon \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que su matriz asociada respecto a las bases canónicas en ambos espacios es

$$[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encontrar:

a) la aplicación f,

b) el valor de $f(p(t))$, donde $p(t) = 1 + t - t^2$,

c) bases y dimensión para $\ker(f)$ y para $\operatorname{img}(f)$.

d) Verifique que f es invertible y encuentre f^{-1}.

Ejercicios sugeridos: 1, 2, 9, 11, 12 y 14.

1 Valores y vectores propios

1. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, considere la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 1 \end{pmatrix}$. Determine los valores de a y de b tales que el vector $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A asociado al valor propio 3.

2. Dados $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & e & f \end{pmatrix}$, una matriz simétrica. Determine los valores de a, b, c, d, e, f tales que los vectores $(1, 1, 1)^T$ y $(1, 0, -1)^T$ sean vectores propios de A, asociados a dos valores propios distintos.

3. Los valores propios de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica son $1, -2$ y 3 con vectores propios $(1, 1, -1)^T$ y $(0, 1, 1)^T$ asociados a los valores propios 1 y -2, respectivamente. Hallar a la matriz A y el vector propio asociado al valor propio 3.

4. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal y u, v dos vectores de $\mathbb{R}^n$ asociados a los valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) El vector propio u tiene un único valor propio asociado.
   b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, el vector αu es un vector propio del valor propio λ.
   c) El vector $u + v$ es un vector propio de f.

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal de manera que $f \circ f = f$. Calcular los valores propios de f.

6. Sea f una aplicación lineal, hallar sus valores y vectores propios, donde:

   a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, 2x - 3y). \end{aligned}$$

   b)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^{2\times 2} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a + b - d & b \\ c & -a + c + d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   c)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[t] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ a + bt + ct^2 &\longmapsto (a - b + c) + (-a + b - c)t + (a - b + c)t^2. \end{aligned}$$

7. Dado $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Compruebe que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A. Hallar el valor propio λ asociado. Calcule una base de E_λ.

b) Compruebe que $1 - a$ es un valor propio de A y calcule una base del espacio propio correspondiente.

c) Compruebe que todo vector $x \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir como $x = y + z$ donde $y \in E_\lambda$ y $z \in E_{1-a}$ y que $E_\lambda \cap E_{1-a} = \{0\}$.

8. Sea λ un valor propio de la matriz A, asociado a x. Probar que:

   a) Para todo $r \in \mathbb{N}$, λ^r es un valor propio de A^r, asociado a x.

   b) Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ con $a_i \in \mathbb{R}$, entonces $p(\lambda)$ es un valor propio de $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$ asociado a x.

   c) Si A es invertible con $\lambda \neq 0$, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1} asociado a x.

9. Sean $A, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con C una matriz no singular. Pruebe que:

   a) A y A^T tienen el mismo polinomio característico.

   b) $C^{-1}AC$ y A tienen igual polinomio característico.

   c) 0 es valor propio de A si y solo si A es singular.

10. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pruebe que si λ es un valor propio de AB también lo es de BA.

    Sugerencia: Distinga los casos $\lambda \neq 0$ y $\lambda = 0$. Al tratar este último, considere el polinomio característico de AB.

2 DIAGONALIZACIÓN

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ una matriz con valores propios 2 y 1 con vectores propios $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, respectivamente.

   a) Hallar la matriz A.

   b) Encontrar dos matrices $P, D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, P no singular tales que $A = P^{-1}DP$.

   c) Determinar A^3.

2. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Verifique que para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, 2 es un valor propio de A con multiplicidad algebraica igual a 4.

   b) Obtenga condiciones sobre a, b, c para que la multiplicidad geométrica de 2 sea 1, es decir, $\dim(V_2) = 1$. Repita este ejercicio para la condición $\dim(V_2) = 2$.

   c) Obtenga condiciones sobre a, b, c para que A sea diagonalizable.

3. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalizable, y sean λ_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$, los valores propios de A (no necesariamente distintos). Demuestre que:

   a) $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   b) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ con valores propios 1 y 2 (con multiplicidad aritmética igual a 2). Dados los subespacios

   $$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x = y = z\} \qquad \text{y} \qquad E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x = -y\}.$$

   a) ¿Es A diagonalizable?

b) Calcular la traza y el determinante de A.

c) Calcular la matriz A.

5. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine los valores de α y β tales que A sea diagonalizable.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Encuentre todos los valores propios de A y los vectores propios asociados.

   b) Determine una matriz no singular P tal que $D = P^{-1}AP$ sea diagonal.

   c) Encontrar una raíz cuadrada positiva de D, es decir, una matriz B con valores propios no negativo tal que $B^2 = D$.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule los valores propios de A.

   b) Halle una base de $\mathbb{R}^3$ formada de vectores propios de A.

   c) Calcule dos matrices $C, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, C no singular, con D diagonal tales que $C^{-1}AC = D$.

8. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Calcule el polinomio característico de A. Factorícelo en factores lineales y diga cual es la multiplicidad algebraica de cada valor propio.

   b) Obtenga una base para cada espacio propio.

   c) Defina una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $[f]_C^C = A$ y $[f]_B^B$ es diagonal, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y B es una base que debe determinar a partir del literal (b).

9. Sean $A, D, P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ con P no singular.

   a) Muestre que si $A = PDP^{-1}$, entonces $A^n = PD^nP^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   b) Tomando $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz A^n, utilizando el resultado del literal a.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

    a) Calcule una base de cada espacio propio de A.

    b) Calcule una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada de vectores propios de A.

    c) Obtenga una matriz ortogonal $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que P^TAP sea diagonal.

11. Sea

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+z, y-z, x-y) \end{aligned}$$

una aplicación lineal.

a) Calcule el polinomio característico de f y factorícelo. Halle una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_B^B$ sea diagonal. Es decir, B está formada por vectores propios de f.

b) Calcule una matriz H ortogonal tal que $H^T[f]_C^C H = D$ es diagonal, donde C es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

12. Sea $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Hallar:

a) el polinomio característico;

b) los valores propios de A;

c) una base para R^3 conformada por vectores propios ortogonales de A;

d) una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

Ejercicios sugeridos:

a) Valores y vectores propios: 1, 4, 6c, 7 y 9.

b) Diagonalización: 1, 3, 6, 8 y 12