EJERCICIO 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} -v+3w&=1\\ u+v+w&=1\\ u-v-w&=-1 \end{aligned}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. Tenemos que las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\qquad \text{y}\qquad b=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix}0&-1&3&1&|&1\\1&1&1&1&|&1\\1&-1&-1&1&|&-1\end{pmatrix}$$

Ahora, procedemos a realizar la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}0&-1&3&|&1\\1&1&1&|&1\\1&-1&-1&|&-1\end{pmatrix}&\sim\begin{pmatrix}1&1&1&|&1\\0&-1&3&|&1\\1&-1&-1&|&-1\end{pmatrix} && F_1\leftrightarrow F_2\\
&\sim\begin{pmatrix}1&1&1&|&1\\0&-1&3&|&1\\0&-2&-2&|&-2\end{pmatrix} && -1F_1+F_3\to F_3\\
&\sim\begin{pmatrix}1&1&1&|&1\\0&1&-3&|&-1\\0&-2&-2&|&-2\end{pmatrix} && -1F_2\to F_2\\
&\sim\begin{pmatrix}1&0&4&|&2\\0&1&-3&|&-1\\0&-2&-2&|&-2\end{pmatrix} && -1F_2+F_1\to F_1
\end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & -8 & | & -4 \end{pmatrix} \qquad 2F_2 + F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad -\frac{1}{8}F_3 \to F_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad -4F_3 + F_1 \to F_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad 3F_3 + F_2 \to F_2$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

con esto, tenemos que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$, de donde el sistema tiene solución, además, $\text{rang}(A) = 3$, por lo tanto, la solución es única. Además, los sistemas

$$\begin{aligned} -v + 3w &= 1 \\ u + v + \ \ w &= 1 \\ u - v - \ \ w &= -1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u \qquad &= 0 \\ v \quad &= \tfrac{1}{2} \\ w &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

tienen las mismas soluciones, es decir, la solución es $u = 0$, $v = \frac{1}{2}$ y $w = \frac{1}{2}$. Es decir, el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(0, 1/2, 1/2)\}. \qquad \square$$

EJERCICIO 2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} -v + 3w &= 1 \\ u + v + \ \ w &= 1 \end{aligned}$$

utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar el conjunto de soluciones del sistema.

Solución. Tenemos que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De donde, la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, luego de realizar la eliminación de Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 2 \\ 0 & 1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix},$$

con esto, tenemos que $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$, de donde el sistema tiene solución, además, $\operatorname{rang}(A) = 2 < 3$, por lo tanto, tiene infinitas soluciones. Además, los sistemas

$$\begin{aligned} -v + 3w &= 1 \\ u + v + w &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u \quad + 4w &= 2 \\ v - 3w &= -1 \end{aligned}$$

tienen las mismas soluciones, así, se tiene que

$$\begin{aligned} u &= 2 - 4\alpha \\ v &= -1 + 3\alpha \\ w &= \alpha, \end{aligned}$$

es solución del sistema para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, de donde el conjunto de soluciones del sistema es

$$\{(2 - 4\alpha, -1 + 3\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}. \qquad \square$$

EJERCICIO 1. Determinar, si existe, una factorización LU de la matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Empecemos determinando una matriz triangula superior U que sea equivalente por filas a A y en la cual solo utilicemos el múltiplo de una fila más otra

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}. \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} & \qquad -2F_1 \leftrightarrow F_2 \\
\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} & \qquad 1F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \\
\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \qquad 1F_2 + F_3 \rightarrow F_3
\end{aligned}$$

Las matrices elementales correspondientes a las operaciones por filas realizadas son

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con esto, tenemos que

$$U = E_3E_2E_1A,$$

así, podemos tomar

$$L = (E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo cual, obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU.$$ □

! Notemos que las entradas de la matriz L son los inversos aditivos de los múltiplos que fueron utilizados para “eliminar” las entradas bajo la diagonal correspondientes.

EJERCICIO 2. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

determinar su solución utilizando factorización LU.

Solución. Tenemos que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema en forma matricial es

$$Ax = b.$$

Dado que A tiene factorización LU con

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resolvamos el sistema

$$Ly = b,$$

cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 2 & 1 & 0 & | & -2 \\ -1 & -1 & 1 & | & 9 \end{pmatrix}.$$

Podemos resolver este sistema utilizando sustitución progresiva y obtenemos

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, resolvemos el sistema

$$Ux = y$$

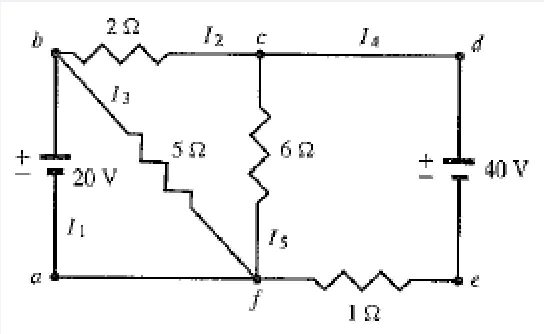
cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & -8 & -2 & | & -12 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

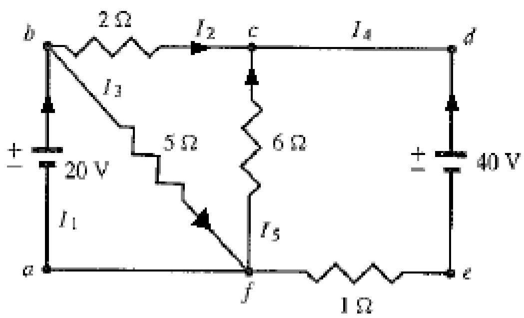
Podemos resolver este sistema utilizando sustitución regresiva y obtenemos

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$ □

EJERCICIO 1. Determinar las corrientes desconocidas en el circuito dado a continuación:



Solución. Iniciamos orientando las corrientes en el circuito como se indica a continuación:



Aplicando la ley de corriente de Kirchhoff en el nodo b se tiene que, con la orientación asignada, la corriente I_1 ingresa al nodo, mientras que las corrientes I_2 e I_3 salen del mismo, con lo cual

$$I_1 = I_2 + I_3. \tag{1}$$

De igual manera, en el nodo c se tiene que las tres corrientes, I_1, I_2 e I_3 ingresan al nodo, y ninguna sale del mismo, con lo cual la ecuación obtenida es

$$I_2 + I_4 + I_5 = 0 \tag{2}$$

La ley de corriente de Kirchhoff en el nodo f nos da la ecuación

$$I_3 = I_1 + I_4 + I_5, \tag{3}$$

ya que la corriente I_3 ingresa al mismo, mientras que las corrientes I_1, I_4 e I_5 sale de este.

A continuación, aplicamos la ley de voltajes de Kirchhoff en el ciclo $f \to a \to b \to f$. Vemos que la batería aporta con $20\,V$ entre los puntos a y b, mientras que la resistencia de $5\,\Omega$ produce una pérdida de $5I_3$ voltios. Esto nos da la ecuación

$$20 - 5I_3 = 0. \tag{4}$$

De manera similar, por el ciclo $f \to b \to c \to f$ se tiene que la resistencia de $5\,\Omega$ produce una ganancia (debido a la orientación) de $5I_3$ voltios entre los puntos f y b. De manera análoga se tienen una perdida de $2I_2$ voltios y una ganancia de $6I_5$ voltios, con lo cual

$$5I_3 - 2I_2 + 6I_5 = 0. \tag{5}$$

Finalmente, la ley de voltajes de Kichhoff en el ciclo $f \to c \to d \to e$ nos da la ecuación

$$-6I_5 - 40 + I_4 = 0. \tag{6}$$

Juntando las ecuaciones desde la (1) hasta la (6), se obtiene el sistema lineal descrito en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es

$$I_1 = -8/3, \quad I_2 = -20/3, \quad I_3 = 4, \quad I_4 = 110/9 \qquad \text{y} \qquad I_5 = -50/9.$$

Esto, en particular, indica que los sentidos escogidos para las corrientes I_1, I_2 e I_5 no fue el correcto, debido a que las magnitudes obtenidas son negativas. $\square$

EJERCICIO 1. Determinar la recta de mínimos cuadrados para los puntos $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$.

Solución. Definamos las matrices

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad u = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}.$$

Debemos resolver el sistema

$$A^\intercal A u = A^\intercal y,$$

es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema, se tiene que

$$m = \frac{2}{5} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{3}{5},$$

por lo tanto, la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los puntos dados es

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}. \qquad \square$$

EJERCICIO 1. Un psicólogo del comportamiento coloca todos los días una rata en una jaula con dos puertas A y B. La rata puede pasar por la puerta A, en cuyo caso recibirá un choque eléctrico, o por la puerta B, con lo cual obtiene cierto alimento. Se registra la puerta por la que pasa la rata. Al inicio del experimento, un lunes, la rata tiene la misma probabilidad de pasar por la puerta A que por la puerta B. Después de pasar por la puerta A y recibir una descarga eléctrica, la probabilidad de que vuelva a pasar por la misma puerta el día siguiente es 0,3. Después de pasar por la puerta B y recibir alimento, la probabilidad de pasar por la misma puerta al día siguiente es 0.6.

1. Escriba la matriz de transición para el proceso de Markov.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la rata vuelva a pasar por la puerta A el jueves (el tercer día después del inicio del experimento)?
3. ¿Cuál es el vector de estado estacionario?

Solución.

1. La matriz de transición asociada al proceso de Markov descrito está dada por:

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Se tiene que:

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0,363 & 0,634 \\ 0,637 & 0,636 \end{pmatrix}$$

y supongamos que pasó por A el día lunes, lo cual notamos por:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces la probabilidad que la rata vuelva a pasar por A es de 0,363.

3. Resolvemos el sistema homogéneo

$$(I - T)u = 0$$

en este caso es:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

realizando operaciones elementales de fila

$$\begin{pmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0,7 & -0,4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -0,57 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$u_1 = 0{,}57 r u_2 \qquad u_2 = r$$

tal que

$$u_1 + u_2 = 0{,}57r + r = (1{,}57)r = 1$$

por lo cual

$$r = 0{,}64$$

el vector de estado estacionario es:

$$x = \begin{pmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}64 \end{pmatrix}.$$

$\square$

EJERCICIO 1. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$, demostrar que para todo $v \in E$ se cumple que

$$(-1)v = -v$$

Demostración. Sea $v \in E$, debemos demostrar que $(-1)v$ es igual a $-v$, es decir, es igual al inverso aditivo de v. Con esto, lo que se debe demostrar es que

$$v + (-1)v = 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
v + (-1)v &= 1v + (-1)v && \text{elemento neutro del producto} \\
&= (1 + (-1))v && \text{distributividad del producto} \\
&= 0v && \text{elemento neutro del campo} \\
&= 0 && \text{Hoja 8, Teorema 7.}
\end{aligned}$$

De donde, por la unicidad de inverso aditivo, se tiene que

$$(-1)v = -v. \qquad \square$$

EJERCICIO 2. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$, demostrar que para todo $v \in E$ se cumple que

$$-(-v) = v$$

Demostración. Sea $v \in E$, notemos que

$$\begin{aligned}
-(-v) &= (-1)(-v) && \text{ejercicio anterior} \\
&= (-1)((-1)v) && \text{ejercicio anterior} \\
&= ((-1)(-1))v && \text{asociatividad de producto} \\
&= (1)v && \text{propiedades del campo} \\
&= v && \text{elemento neutro del producto.}
\end{aligned} \qquad \square$$

EJERCICIO 3. En $\mathcal{C}([-1,1])$, se define

$$I = \left\{ f \in \mathcal{C}([-1,1]) : \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son elementos de I:

$$\begin{aligned} g\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   es elemento de I?

2. Demostrar que I es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}([-1,1])$.

Demostración.

1. Se tiene que g es una función continua y

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0,$$

   por lo tanto $g \in I$.

   Se tiene que h es una función continua y

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 3x^2\,dx = 2,$$

   por lo tanto $h \notin I$.

   Se tiene que f no es una función continua por lo tanto $f \notin I$.

2. Debemos demostrar tres cosas

   - Que la función 0 es elemento de I: Recordemos que la función 0 es

$$\begin{aligned} 0\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0, \end{aligned}$$

     por lo tanto, la función 0 es continua y

$$\int_{-1}^{1} 0(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 0\,dx = 0,$$

     se tiene que $0 \in I$.

   - Que la suma de dos elementos de I es otro elemento de I: Sean f y g elementos de I, se tiene que f y g son funciones continuas y

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 0.$$

     Con esto, se tiene que $f + g$ es continua y

$$\int_{-1}^{1} (f+g)(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x) + g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 0 + 0 = 0,$$

     por lo tanto $f + g \in I$.

   - Que el producto por un escalar de un elemento de I es otro elemento de I: Sean f un elemento de I y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que f es una función continua y

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.$$

Con esto, se tiene que λf es continua y

$$\int_{-1}^{1} (\lambda f)(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lambda 0 = 0,$$

por lo tanto $\lambda f \in I$.

Con esto, se tiene que I es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}([-1,1])$.

$\square$

Ejercicio 1. En $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, demostrar que $\{\text{sen}, \cos\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, supongamos que

$$\alpha \,\text{sen} + \beta \cos = 0,$$

lo cual equivale a

$$\alpha \,\text{sen}(x) + \beta \cos(x) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Evaluando la expresión anterior en 0 y $\pi/2$, se tiene que

$$\alpha \,\text{sen}(0) + \beta \cos(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha \,\text{sen}(\pi/2) + \beta \cos(\pi/2) = 0,$$

de donde

$$\beta = 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha = 0.$$

Con esto, se tiene que $\{\text{sen}, \cos\}$ es linealmente independiente. $\square$

Notemos que el método del ejercicio anterior, depende de los valores en los cuales evaluemos la expresión resultante, es decir, existen valores que no nos ayudarán a llegar a la conclusión buscada (por ejemplo si evaluamos en 0 y π). Una mejor forma es utilizando la siguiente definición y teorema.

Definición 1

Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$, con I un intervalo de $\mathbb{R}$. Se define el *wronskiano* de estas funciones por

$$\mathcal{W}(f_1, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

para todo $x \in I$.

Teorema 1

Sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$, con I un intervalo de $\mathbb{R}$. Si existe $x_0 \in I$ tal que

$$\mathcal{W}(f_1, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0,$$

entonces $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es linealmente independiente.

Demostración. Por el absurdo, supongamos que el conjunto es linealmente dependiente, es decir, supongamos que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, no todos iguales a 0, tales que

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n = 0,$$

es decir,

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Derivando, tenemos que

$$\alpha_1 f_1^{(k)}(x) + \alpha_2 f_2^{(k)}(x) + \cdots + \alpha_n f_n^{(k)}(x) = 0$$

para todo $x \in I$ y todo $k = 1, \ldots, n-1$. En especial, para x_0 se tiene que

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \ldots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \ldots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pero, dado que

$$\begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \ldots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \ldots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \mathcal{W}(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x_0) \neq 0,$$

la única solución del sistema es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente. □

EJERCICIO 2. En $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, demostrar que $\{f, g\}$ es linealmente independiente, donde

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \operatorname{sen}(x) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x\operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Solución. Calculemos el wronskiano de las función f y g,

$$\mathcal{W}(f,g)(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x) & x\operatorname{sen}(x) \\ \cos(x) & \operatorname{sen}(x) + x\cos(x) \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2(x)$$

para $x \in \mathbb{R}$. Dado que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{W}(f,g)(x) = \operatorname{sen}^2(x) \neq 0,$$

entonces el conjunto el linealmente independiente. □

EJERCICIO 1. En $\mathbb{R}^3$, consideremos el subespacio vectorial

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Demuestre que

$$B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

es una base de E.

Demostración. Debemos demostrar que B genera a E y que B es linealmente independiente.

- Sea $(x, y, z) \in E$, se tiene que

$$x + y + z = 0.$$

  Debemos determinar si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y, z) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1),$$

  es decir, debemos determinar si el sistema

$$\begin{cases} -\alpha - \beta = x, \\ \alpha \qquad\; = y, \\ \qquad\;\; \beta = z, \end{cases}$$

  tiene solución. La matriz ampliada asociada a este sistema es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & | & x \\ 1 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & | & z \end{pmatrix}$$

  además,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & | & x \\ 1 & 0 & | & y \\ 0 & 1 & | & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -x \\ 0 & 1 & | & -x-y \\ 0 & 0 & | & x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & -x \\ 0 & 1 & | & -x-y \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

  por lo tanto, el sistema sí tiene solución, por lo tanto,

$$\operatorname{span}(B) = E.$$

- Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$(0, 0, 0) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1),$$

se tiene α, β son soluciones del sistema

$$\begin{cases} -\alpha - \beta = 0, \\ \alpha \quad\quad = 0, \\ \quad\quad \beta = 0. \end{cases}$$

La matriz ampliada asociada a este sistema es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

además,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, $\alpha = \beta = 0$, de donde, se concluye que B es linealmente independiente.

Con esto, se tiene que B es una base para E. □

! Como podemos observar, los sistemas que se obtiene son similares, es más, basta demostrar que la solución del primer sistema es única, de ahí, se puede concluir que el conjunto genera y el linealmente independiente.

EJERCICIO 2. En $\mathbb{R}_n[t]$, consideremos el subespacio vectorial

$$E = \{at^2 + b \in \mathbb{R}_n[t] : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestre que

$$B = \{t^2, t^2 + 2\}$$

es una base de E.

Demostración. Sea $p(t) \in E$, se tiene que

$$p(t) = at^2 + b$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Debemos determinar si existen únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} at^2 + b &= \alpha(t^2) + \beta(t^2 + 2) \\ &= (\alpha + \beta)t^2 + 2\beta, \end{aligned}$$

es decir, debemos determinar si el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \quad \beta = a, \\ \quad\quad 2\beta = b, \end{cases}$$

tiene solución única. La matriz ampliada asociada a este sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & a \\ 0 & 2 & | & b \end{pmatrix}$$

por lo tanto, el sistema sí tiene solución única, por lo tanto, B es base para E. $\square$

EJERCICIO 3. En $\mathbb{R}^3$, consideremos el subespacio vectorial

$$E = \operatorname{span}(D)$$

donde

$$D = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,0,1), (1,1,1), (0,1,0)\}.$$

Determinar una base para E.

Solución. Dado que D genera a E, existe un subconjunto de E que es base para E. Para esto, tomemos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$(0,0,0) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,1,0),$$

es decir, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que sean soluciones del sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

La matriz ampliada asociada a este sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

además,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que la matriz resultante tiene los unos principales en la primera y segunda columna, una base para E puede estar conformada por

$$\{v_1, v_2\} = \{(1,0,1), (1,1,1)\}.$$

$\square$

EJERCICIO 4. En $\mathbb{R}^3$, consideremos el subespacio vectorial

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Determinar una base para E.

Solución. Sea $(x, y, z) \in E$, se tiene que

$$x + y + z = 0$$

de donde se obtiene que

$$x = -y - z,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (-y - z, y, z) \\ &= y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1).\end{aligned}$$

Con esto, se obtiene que

$$\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

es un conjunto generador de E, a partir de este conjunto hallamos una base para E (como en el ejercicio anterior), y obtenemos que

$$B = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

es una base para E □

EJERCICIO 5. En $\mathbb{R}_3[t]$, consideremos el subespacio vectorial

$$E = \{at^3 + (a + b)t + 2b \in \mathbb{R}^3 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Determinar una base para E.

Solución. Sea $at^3 + (a + b)t + 2b \in E$, con $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$at^3 + (a + b)t + 2b = a(t^3 + t) + b(t + 2).$$

Con esto, se obtiene que

$$\{t^3 + t, t + 2\}$$

es un conjunto generador de E, a partir de este conjunto hallamos una base para E (como en el ejercicio anterior), y obtenemos que

$$B = \{t^3 + t, t + 2\}$$

es una base para E □

EJERCICIO 1. En $\mathbb{R}^2$, consideremos la siguiente base ordenada

$$T = \{(1,0), (-1,1)\}.$$

Determine $[(1,1)]_T$.

Solución. Llamemos

$$v_1 = (1,0) \qquad \text{y} \qquad v_2 = (-1,1),$$

con esto se tiene que

$$T = \{v_1, v_2\}.$$

Para determinar $[(1,1)]_T$, debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} (1,1) &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \\ &= \alpha_1(1,0) + \alpha_2(-1,1) \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2), \end{aligned}$$

es decir, debemos debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ que sean solución del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1, \\ \qquad \alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$\alpha_1 = 2, \qquad \text{y} \qquad \alpha_2 = 1,$$

por lo tanto

$$[x]_T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$ □

EJERCICIO 2. En $\mathbb{R}^2$, consideremos las siguientes bases ordenadas

$$S = \{(1,1), (0,1)\} \qquad \text{y} \qquad T = \{(1,0), (-1,1)\}.$$

Determine la matriz de cambio de base $P_{T \leftarrow S}$.

Solución. Llamemos

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,1), \qquad u_2 = (0,1) \\ v_1 &= (1,0) \qquad \text{y} \qquad v_2 = (-1,1), \end{aligned}$$

con esto se tiene que
$$S = \{u_1, u_2\} \qquad \text{y} \qquad T = \{v_1, v_2\}.$$
Dado que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2, buscamos una matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que
$$[x]_T = P_{T\leftarrow S}[x]_S$$
para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Vamos a utilizar los elementos de la base de S para determinar $P_{T\leftarrow S}$. Notemos que
$$[u_1]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{y} \qquad [u_2]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
(esto siempre ocurre con los elementos de la base). Con esto, si
$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
tenemos que
$$[u_1]_T = P_{T\leftarrow S}[u_1]_S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$
y
$$[u_2]_T = P_{T\leftarrow S}[u_2]_S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$
es decir, la primera columna de $P_{T\leftarrow S}$ es $[u_1]_T$ y la segunda columna de $P_{T\leftarrow S}$ es $[u_2]_T$, por lo tanto, basta calcular
$$[u_1]_T \qquad \text{y} \qquad [u_2]_T.$$
Tal como se realizó en el ejercicio anterior, debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ que sean solución de los sistemas
$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1, \\ \qquad\ \alpha_2 = 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = 0, \\ \qquad\ \beta_2 = 1. \end{cases}$$
Resolviendo los sistemas, tenemos que
$$\alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \beta_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad \beta_2 = 1$$
por lo tanto
$$[u_1]_T = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [u_1]_T = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
así, se obtiene que
$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Notemos que el razonamiento realizado en el ejercicio anterior se cumple de manera general, es decir, dado un espacio vectorial y dos bases ordenadas de este:
$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \qquad \text{y} \qquad T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

se tiene que, para $j = 1, \ldots, n$, la j-ésima columna de la matriz $P_{T \leftarrow S}$ es $[u_j]_T$, así,

$$P_{T \leftarrow S} = \begin{pmatrix} [u_1]_T & [u_2]_T & \ldots & [u_n]_T \end{pmatrix}.$$

Notemos que los sistemas de ecuaciones resueltos en el ejercicio anterior son similares, esto también pasa de manera general, así, podemos plantear todos los sistemas y resolverlos simultáneamente como se muestra en el siguiente ejercicios.

EJERCICIO 3. En $\mathbb{R}^3$, consideremos las siguientes bases ordenadas

$$S = \{(1,1,0), (0,1,1), (0,1,0)\} \qquad \text{y} \qquad T = \{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}.$$

1. Dado el vector $x = (-1, 2, 0)$, determine $[x]_S$.
2. Determine la matriz de cambio de base $P_{T \leftarrow S}$.
3. Con los literales anteriores, calcule $[x]_T$.
4. Compruebe el resultado anterior utilizando la definición de $[x]_T$.

Solución. Llamemos

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,1,0), & u_2 &= (0,1,1), & u_3 &= (0,1,0) \\ v_1 &= (1,0,1) & v_2 &= (0,1,0) \quad \text{y} & v_3 &= (0,1,1), \end{aligned}$$

con esto se tiene que

$$S = \{u_1, u_2, u_3\} \qquad \text{y} \qquad T = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

1. Para determinar $[x]_S$, debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} x = (-1, 2, 0) &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ &= \alpha_1 (1,1,0) + \alpha_2 (0,1,1) + \alpha_3 (0,1,0) \\ &= (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2), \end{aligned}$$

es decir, debemos debemos determinar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ que sean solución del sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 & = -1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 2, \\ \alpha_2 & = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$\alpha_1 = -1, \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3 = 3,$$

por lo tanto

$$[x]_S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Tenemos que la matriz de cambio de base es

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} [u_1]_T & [u_2]_T & [u_3]_T \end{pmatrix},$$

por lo cual, debemos encontrar $[u_1]_T$, $[u_2]_T$ y $[u_3]_T$, por lo tanto, debemos determinar escalares tales que

$$\begin{aligned} u_1 = (1,1,0) &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \\ &= \beta_1(1,0,1) + \beta_2(0,1,0) + \beta_3(0,1,1) \\ &= (\beta_1, \beta_2 + \beta_3, \beta_1 + \beta_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 = (0,1,1) &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 \\ &= \gamma_1(1,0,1) + \gamma_2(0,1,0) + \gamma_3(0,1,1) \\ &= (\gamma_1, \gamma_2 + \gamma_3, \gamma_1 + \gamma_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 = (0,1,0) &= \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \delta_3 v_3 \\ &= \delta_1(1,0,1) + \delta_2(0,1,0) + \delta_3(0,1,1) \\ &= (\delta_1, \delta_2 + \delta_3, \delta_1 + \delta_3), \end{aligned}$$

es decir, se deben resolver los sistemas

$$\begin{cases} \beta_1 & = 1, \\ \quad \beta_2 + \beta_3 & = 1, \\ \beta_1 \quad + \beta_3 & = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_1 & = 0, \\ \quad \gamma_2 + \gamma_3 & = 1, \\ \gamma_1 \quad + \gamma_3 & = 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \delta_1 & = 0, \\ \quad \delta_2 + \delta_3 & = 1, \\ \delta_1 + \delta_2 & = 0. \end{cases}$$

Podemos colocar estos tres sistemas en una matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Realizando reducción por filas tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

De donde obtenemos que

$$[u_1]_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad [u_2]_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [u_3]_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto, tenemos que

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} [u_1]_T & [u_2]_T & [u_3]_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Tenemos que

$$[x]_T = P_{T\leftarrow S}[x]_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Para comprobar el resultado anterior utilizando la definición, debe ser verdad que

$$x = -1v_1 + 1v_2 + 1v_3,$$

por lo tanto, calculemos el lado derecho:

$$\begin{aligned} -1v_1 + 1v_2 + 1v_3 &= -1(1,0,1) + 1(0,1,0) + 1(0,1,1) \\ &= (-1,2,1) \\ &= x, \end{aligned}$$

por lo tanto, queda comprobado. □

Ejercicio 4. En $\mathbb{R}_2[t]$, consideremos las siguientes bases ordenadas

$$S = \{t^2+1, 2t, 2\} \qquad \text{y} \qquad T = \{t^2-1, t^2+t, t\}.$$

Determine la matriz de cambio de base $P_{T\leftarrow S}$.

Solución. Llamemos

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^2+1, \qquad p_2(t) = 2t, \qquad p_3(t) = 2 \\ q_1(t) &= t^2-1 \qquad q_2(t) = t^2+t \qquad \text{y} \qquad q_3(t) = t, \end{aligned}$$

con esto se tiene que

$$S = \{p_1(t), p_1(t), p_1(t)\} \qquad \text{y} \qquad T = \{q_1(t), q_1(t), q_1(t)\}.$$

Tenemos que la matriz de cambio de base es

$$P_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} [p_1(t)]_T & [p_2(t)]_T & [p_3(t)]_T \end{pmatrix},$$

por lo cual, debemos encontrar $[p_1(t)]_T$, $[p_2(t)]_T$ y $[p_3(t)]_T$, por lo tanto, debemos determinar escalares tales que

$$\begin{aligned} p_1(t) = t^2+1 &= \alpha_1 q_1(t) + \alpha_2 q_2(t) + \alpha_3 q_3(t) \\ &= \alpha_1(t^2-1) + \alpha_2(t^2+t) + \alpha_3(2) \\ &= (\alpha_1+\alpha_2)t^2 + \alpha_2 t + (2\alpha_3 - \alpha_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(t) = 2t &= \beta_1 q_1(t) + \beta_2 q_2(t) + \beta_3 q_3(t) \\ &= \beta_1(t^2-1) + \beta_2(t^2+t) + \beta_3(2) \\ &= (\beta_1+\beta_2)t^2 + \beta_2 t + (2\beta_3 - \beta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(t) = 2 &= \gamma_1 q_1(t) + \gamma_2 q_2(t) + \gamma_3 q_3(t) \\ &= \gamma_1(t^2-1) + \gamma_2(t^2+t) + \gamma_3(2) \\ &= (\gamma_1+\gamma_2)t^2 + \gamma_2 t + (2\gamma_3 - \gamma_1), \end{aligned}$$

es decir, se deben resolver los sistemas

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = 1, \\ \alpha_2 & = 0, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 & = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 & = 0, \\ \beta_2 & = 2, \\ -\beta_1 + 2\beta_3 & = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 & = 0, \\ \gamma_2 & = 0, \\ -\gamma_1 + 2\gamma_3 & = 2, \end{cases}$$

Podemos colocar estos tres sistemas en una matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Realizando reducción por filas tenemos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

De donde obtenemos que

$$[p_1(t)]_T = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad [p_2(t)]_T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad [p_3(t)]_T = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Con esto, tenemos que

$$P_{T \leftarrow S} = \Big([p_1(t)]_T \quad [p_2(t)]_T \quad [p_3(t)]_T \Big) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \square$$