En este curso, tomaremos:

- $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > 0$ y $m > 0$;
- $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $J = \{1, 2, \ldots, n\}$; y
- $\mathbb{K}$ un cuerpo o campo (es decir, cualquier conjunto que cumpla con los axiomas de cuerpo), puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1. Sistemas de ecuaciones

DEFINICIÓN 1: Sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones lineales en las cuales figuran n incógnitas a las que notaremos por: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Así, dados $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in I$ y $j \in J$, fijos, un sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

2. Matrices

DEFINICIÓN 2: Matriz

Una matriz sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una función

$$\begin{aligned}
A\colon\ I \times J &\longrightarrow \mathbb{K} \\
(i, j) &\longmapsto A(i, j) = a_{ij},
\end{aligned}$$

la cual se representa por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Con esto, se dice que A es de orden $m \times n$ y que tiene m filas y n columnas.

Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre el campo $\mathbb{K}$ se denota por $\mathbb{K}^{m\times n}$.

Dada una matriz A, esta se la representa también por $A = (a_{ij})$.

Otras notaciones usuales para el conjunto de la matrices, que se puede encontrar en la literatura, son $\mathcal{M}_{m\times n}$, $M_{m\times n}$, $\mathcal{M}_{mn}$ o M_{mn}.

DEFINICIÓN 3: Filas y columnas

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $i \in I$ y $j \in J$. A la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

se la llama la j-ésima columna de A y a la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

se la llama la i-ésima fila de A.

PROPOSICIÓN 1 (Igualdad de matrices)**.** Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{p\times q}$. Se dice que las A y B son iguales, y se representa por $A = B$, si:

- $m = p$ y $n = q$; y
- $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in I$ y $j \in J$.

DEFINICIÓN 4: Vectores

El conjunto $\mathbb{K}^n$ es:

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ veces}},$$

es decir,

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in J\}.$$

Por notación, si $a \in \mathbb{R}^n$, se asumirá $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Podemos identificar cada elemento de $\mathbb{K}^n$ con una matriz de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ de la siguiente manera: si

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n,$$

entonces, visto como matriz es

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

DEFINICIÓN 5: Suma de matrices

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. La suma de las matrices A y B es la matriz $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por $A + B$.

Con esto, tenemos que $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

DEFINICIÓN 6: Multiplicación por un escalar

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. El producto del escalar α por la matriz A es la matriz $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tal que:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por αA.

Con esto, tenemos que $\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$.

Definición 7: Transpuesta de una matriz

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. *La matriz transpuesta de* A *es la matriz* $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ *tal que:*

$$(b_{ij}) = (a_{ji})$$

para todo $i \in I$ *y* $j \in J$. *A esta matriz se la denota por* $A^\intercal$.

Con esto, tenemos que si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, entonces $A^\intercal \in \mathbb{K}^{n \times m}$ y $(a_{ij})^\intercal = (a_{ji})$.

1. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES ENTRE MATRICES

TEOREMA 1

Sean $A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se tiene que

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- *Existe una única matriz* 0 *de orden* $m \times n$ *tal que*

  $$A + 0 = A$$

  para cualquier matriz A *de orden* $m \times n$. *La matriz* 0 *se denomina neutro aditivo de orden* $m \times n$, *también llamada la matriz nula.*
- *Para cada matriz* A *de orden* $m \times n$, *existe una única matriz, denotada por* $-A$, *de orden* $m \times n$ *tal que:*

  $$A + (-A) = 0.$$

  A la matriz $-A$ *se la denomina el inverso aditivo* A.

TEOREMA 2

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se tiene que

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; *y*
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

2. MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

En esta sección consideramos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > 0$ y $q > 0$.

DEFINICIÓN 1: Multiplicación de matrices

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$, el producto de las matrices A y B es la matriz $C \in \mathbb{K}^{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{1p}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por AB.

TEOREMA 3

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $C, D \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $E \in \mathbb{K}^{p\times q}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se tiene que

- $A(DE) = (AD)E$;
- $A(C + D) = AC + AD$;
- $(A + B)C = AC + BC$;
- $A(\alpha C) = \alpha(AC) = (\alpha A)C$.

En general, $AB \neq BA$.

DEFINICIÓN 2: Matriz cuadrada

Si A es un elemento de $K^{n\times n}$, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n.

DEFINICIÓN 3: Matriz identidad de orden n

Se define la matriz identidad de orden n al elemento A de $\mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in I$. A esta matriz se la denota por I_n.

PROPOSICIÓN 4. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ se tiene que

$$I_m A = AI_n = A.$$

DEFINICIÓN 4

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{N}$. Se define A a la potencia r por

- $A^0 = I_n$; *y*
- $A^{r+1} = A^r A$.

TEOREMA 5

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $r, s \in \mathbb{N}$. Se tiene que

- $A^r A^s = A^{r+s}$; *y*
- $(A^r)^s = A^{rs}$.

Note que en general $(AB)^r \neq A^r B^r$.

TEOREMA 6

Sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Se tiene que

- $(A^\intercal)^\intercal = A$;
- $(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$;
- $(AC)^\intercal = C^\intercal A^\intercal$;
- $(\alpha A)^\intercal = \alpha A^\intercal$.

3. TIPOS DE MATRICES

DEFINICIÓN 5: Matriz diagonal

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que A es una matriz diagonal si verifica que:

$$a_{ij} = 0$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$ con $i \neq j$.

DEFINICIÓN 6: Matriz escalar

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que A es una matriz escalar si es una matriz diagonal que verifica:

$$a_{ii} = \alpha$$

para todo $i \in I$, con $\alpha \in \mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 7: Matriz simétrica

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que A es simétrica si $A^{\intercal} = A$.

DEFINICIÓN 8: Matriz antisimétrica

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que A es simétrica si $A^{\intercal} = -A$.

DEFINICIÓN 9: Matriz triangular

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que A es

- *una matriz triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ con $i, j \in J$; y*
- *una matriz triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$ con $i, j \in J$.*

DEFINICIÓN 10: Matriz nilpotente

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $r \in \mathbb{N}$. Se dice que A es nilpotente de orden r si r es el menor entero positivo tal que

$$A^r = 0.$$

DEFINICIÓN 11: Matriz idempotente

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que A es una matriz idempotente si $A^2 = A$.

1. Transformaciones matriciales

Definición 1: Transformación matricial

Dada $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, una transformación matricial es una función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ u &\longmapsto Au. \end{aligned}$$

2. Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2: Matriz aumentada

Dado un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones lineales en las cuales figuran n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in I$ y $j \in J$. A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se la llama matriz de coeficientes del sistema y a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad y \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se las llama columnas de constantes y de incógnitas, respectivamente.

Bajo estas definiciones, dado un sistema de ecuaciones lineales, se dice que

$$Ax = b$$

es la representación matricial del sistema de ecuaciones.

DEFINICIÓN 3: Matriz ampliada

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m\times p}$, se define la matriz ampliada de A y B al elemento de $\mathbb{K}^{m\times(m+p)}$ dado por:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{array}\right)$$

y se la denota por $(A|B)$.

DEFINICIÓN 4

Dado el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, se dice que

$$(A|b)$$

es la matriz ampliada asociada al sistema.

DEFINICIÓN 5: Matriz escalonada reducida por filas

Se dice que una matriz está en forma escalonada reducida por filas cuando satisface las siguientes propiedades:

1. *Todas las filas que constan de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.*

2. *La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un* 1*. Esta entrada se denomina entrada principal o uno principal de su fila.*

3. *Para cada fila que no consta sólo de ceros, el uno principal aparece a la derecha y abajo de cualquier uno principal en las filas que le preceden.*

4. *Si una columna contiene un uno principal, el resto de las entradas de dicha columna son iguales a cero.*

Se dice que una matriz está en forma escalonada por filas si satisface las primeras tres propiedades .

DEFINICIÓN 6: Operaciones elementales de fila

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, una operación elemental por filas sobre A es una de las siguientes:

- ***Intercambio de filas:*** *dados $i \in I$ y $j \in J$, intercambiar la fila i por la fila j, denotado por*

$$F_i \leftrightarrow F_j,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

por la fila

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

y viceversa.

- ***Multiplicar una fila por un escalar:*** *dados $i \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, con $\alpha \neq 0$, multiplicar la fila i por α, denotado por*

$$\alpha F_i \to F_i,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

por

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \end{pmatrix}.$$

- ***Sumar un múltiplo de una fila con otra:*** *dados $i, j \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, multiplicar la fila i por α y sumarlo a la fila j, denotado por*

$$\alpha F_i + F_j \to F_j,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

por

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} + a_{j1} & \alpha a_{i2} + a_{j2} & \dots & \alpha a_{in} + a_{jn} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 7: Matriz elemental

Dada una operación elemental por fila, se llama matriz elemental correspondiente a la operación al resultado de aplicar dicha operación a la matriz identidad.

TEOREMA 1

Sean $E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz elemental y $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, el resultado aplicar la operación por filas correspondiente a E a la matriz A es EA.

DEFINICIÓN 8: Equivalente por filas

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se dice que la matriz A es equivalente por filas a una matriz B, denotado por $A \sim B$, si B se puede obtener al aplicar a la matriz A una sucesión de operaciones elementales por fila.

TEOREMA 2

Toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas.

Teorema 3

Toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida por filas.

El proceso para obtener una matriz escalonada reducida por filas a partir de una matriz cualquiera se conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

Definición 9

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ la única matriz escalonada reducida por filas equivalente a A. El rango de A, denotado por $\operatorname{rang}(A)$, es el número de filas no nulas que tiene la matriz B.

Proposición 4. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Se tiene que si $A \sim B$, entonces

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B).$$

Proposición 5. Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Se tiene que si A es una matriz escalonada, entonces $\operatorname{rang}(A)$ es el número de filas no nulas que tiene A.

2.1 Resolución de sistemas lineales

Teorema 6

Sean $A, C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b, d \in \mathbb{K}^m$, se tiene que los sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b \qquad y \qquad Cx = d$$

tienen las mismas soluciones si y solo si

$$(A|b) \sim (C|d),$$

es decir, si las matrices aumentadas de los sistemas son equivalentes por filas.

Definición 10

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se dice que

- *el sistema es **inconsistente** si no tiene solución;*
- *el sistema es **consistente** si tiene solución.*

TEOREMA 7

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se tiene una y solo una de las siguientes

- *el sistema es inconsistente;*
- *el sistema es consistente y tiene una única solución; o*
- *el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones.*

TEOREMA 8: Teorema de Rouché–Frobenius

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se tiene que

- *el sistema es consistente si y solo si $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b)$;*
- *en caso de que el sistema sea consistente, la solución es única si y solo si $\operatorname{rang}(A) = n$.*

2.2 Sistemas homogéneos

DEFINICIÓN 11: Sistema homogéneo

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ al sistema

$$Ax = 0$$

se lo denomina sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

DEFINICIÓN 12

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, *dado el sistema homogéneo*

$$Ax = 0,$$

entonces

- *a* $x = 0$ *se la llama la solución trivial del sistema;*
- *a* $x \neq 0$ *tal que* $Ax = 0$ *se la llama una solución no trivial.*

TEOREMA 9

Un sistema homogéneo de m *ecuaciones con* n *incógnitas siempre tiene una solución no trivial si* $m < n$, *es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.*

1. INVERSA DE UNA MATRIZ

DEFINICIÓN 1

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es no singular o invertible si existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

la matriz B se denomina inversa de A y se la denota por A^{-1}. Si no existe tal matriz, entonces se dice que A es singular o no invertible.

PROPOSICIÓN 1. Si una matriz tiene inversa, la inversa es única.

TEOREMA 2

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

- *Si A es una matriz no singular, entonces A^{-1} es no singular y*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

- *Si A y B son matrices no singulares, entonces AB es no singular y*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- *Si A es una matriz no singular, entonces*

$$(A^{\intercal})^{-1} = (A^{-1})^{\intercal}.$$

TEOREMA 3

Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $A_1, A_2, \ldots, A_p \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matrices no singulares. Se tiene que $A_1A_2\cdots A_p$ es no singular y

$$(A_1A_2\cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1}A_{p-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}.$$

TEOREMA 4

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se tiene que si $AB = I_n$, entonces $BA = I_n$.

TEOREMA 5

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se tiene que A es no singular si y solo si es equivalente por filas a I_n. Es más

$$(A|I_n) \sim (I_n|A^{-1}).$$

TEOREMA 6

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, el sistema homogéneo

$$Ax = 0$$

tiene una solución no trivial si y solo si A es singular.

TEOREMA 7

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se tiene que A es no singular si y solo si el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{K}^n$.

PROPOSICIÓN 8. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se tienen que las siguientes son equivalentes:

1. A es no singular;
2. el sistema $Ax = 0$ solamente tiene la solución trivial;
3. A es equivalente por filas a I_n; y
4. el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{K}^n$.

2. FACTORIZACIÓN LU

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Suponga que A puede escribirse como el producto de una matriz triangular inferior L, un una matriz triangular superior U, es decir,

$$A = LU$$

entonces se dice que A tiene una factorización LU.

La factorización LU de una matriz A puede usarse de manera eficiente para resolver un sistema lineal $Ax = b$, tomando $Ux = z$ y $Lz = b$.

3. CIRCUITOS ELÉCTRICOS

En general, en el caso de circuitos eléctricos que constan de baterías, resistencias, cables y que tienen n diferentes asignaciones de corriente, las leyes de voltaje y corriente de Kirchoff siempre conducen a n ecuaciones lineales que tienen una sola solución.

1. Cadenas de Markov

DEFINICIÓN 1

Una cadena de Markov o proceso de Markov es aquel en el que la probabilidad de que el sistema esté en un estado particular en un período de observación dado, depende solamente de su estado en el período de observación inmediatamente anterior.

DEFINICIÓN 2

Supongamos que el sistema de estudio tiene n estados posibles. Se llama probabilidad de transición, notada t_{ij} es la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado j y en el siguiente período esté en el estado i, con $i, j \in I$.

Se representa con $T \in \mathbb{K}^{m\times n}$ a la matriz tal que $T = (t_{ij})$ a la matriz de transición de la cadena de Markov.

Al ser una probabilidad se cumple que:

$$0 \leq t_{ij} \leq 1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{n} t_{ij} = 1$$

para todo $i, j \in I$.

Podemos utilizar la matriz de transición del proceso de Markov para determinar la probabilidad de que el sistema se encuentre en cualquiera de los n estados en el futuro.

DEFINICIÓN 3

El vector de estado del proceso de Markov en el período de observación k, notado por $x^{(k)}$, es el vector:

$$\begin{pmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ \vdots \\ p_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

para todo $k \geq 0$, donde p_j^k es la probabilidad que el sistema se encuentre en el estado j en el período de observación k.

Al vector $x^{(0)}$, se lo llama vector de estado inicial que indica el estado del sistema en el período 0.

TEOREMA 1

Si T es una matriz de transición de un proceso de Markov, el vector de estado $x^{(k+1)}$, en el $(k+1)$-ésimo período de observación, puede determinarse a partir del vector de estado $x^{(k)}$ en el k-ésimo período de observación, como:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)}.$$

DEFINICIÓN 4

El vector

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

es un vector de probabilidad si

1. $u_i \geq 0$ *para todo* $i \in I$ *y*
2. $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1.$

DEFINICIÓN 5

Una matriz de transición T de un proceso de Markov es regular si todas las entradas de alguna potencia de T son positivas. Un proceso de Markov es regular si su matriz de transición es regular.

TEOREMA 2

Si T es la matriz de transición de un proceso de Markov regular, entonces:

1. *A medida que $n \to \infty$, T^n tiende a una matriz*

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n & u_n & \cdots & u_n \end{pmatrix}$$

tal que todas sus columnas son idénticas.

2. *Toda columna*

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

de A es un vector de probabilidad tal que todos sus componentes son positivos.

TEOREMA 3

Si T es una matriz de transición regular y A y u son como en el teorema anterior, entonces:

1. *Para cualquier vector de probabilidad x,*

$$T^n x \to u$$

conforme $n \to \infty$, de modo que u es un vector de estado estacionario.

2. *El vector de estado estacionario u es el único vector de probabilidad que satisface la ecuación matricial $Tu = u$.*

2. MÍNIMOS CUADRADOS

DEFINICIÓN 6: Problema de la recta de mínimos cuadrados

En $\mathbb{R}^2$, dados n puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), se plantea encontrar la ecuación de la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta, es decir, se busca la pendiente m y el intercepto b de una recta que minimice la función definida por

$$L(m,b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - b)^2.$$

A la recta de pendiente m e intercepto b que minimizan la función anterior se la llama recta de mínimos cuadrados.

PROPOSICIÓN 4. Dados los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots$, (x_n, y_n), definimos

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad u = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}.$$

Se tiene que el problema de la recta de mínimos cuadrados es equivalente a resolver el sistema

$$A^\intercal A u = A^\intercal y.$$

PROPOSICIÓN 5. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\operatorname{rang}(A) = n$, entonces, $A^\intercal A$ es no singular.

DEFINICIÓN 7: Problema de la parábola de mínimos cuadrados

En $\mathbb{R}^2$, dados n puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots$, (x_n, y_n), se plantea encontrar la ecuación de la parábola que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la parábola, es decir, se busca $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que minimicen la función definida por

$$L(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - a x_k^2 - b x_k - c)^2.$$

A la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ minimizan la función anterior se la llama parábola de mínimos cuadrados.

PROPOSICIÓN 6. Dados los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots$, (x_n, y_n), definimos

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad u = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}.$$

Se tiene que el problema de la parábola de mínimos cuadrados es equivalente a resolver el sistema

$$A^\intercal A u = A^\intercal y.$$

1. DETERMINANTES

En esta sección tomaremos $n \in \mathbb{N}$, con $n > 0$, e $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

DEFINICIÓN 1: Menor

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e $i, j \in I$. A la matriz de $\mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ que se obtiene eliminar la fila i y la columna j de A se la llama el menor ij de A, denotado por A_{ij}.

En la literatura se puede encontrar la notación de M_{ij} para el menor de ij de A.

DEFINICIÓN 2: Menor principal

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $k \in I$. A la matriz de $\mathbb{K}^{k\times k}$ que se obtiene eliminar las $n-k$ últimas filas y columnas de A, se la llama el menor principal k de A, denotado por M_k.

En la literatura se puede encontrar la notación de A_k para el menor principal k de A.

DEFINICIÓN 3: Determinantes

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se define el determinante de A, denotado por $\det(A)$ (o por $|A|$), de manera inductiva, como sigue:

- Si $n = 1$ y $A = (a_{11})$, entonces $\det(A) = a_{11}$.
- Si $n > 1$, entonces

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}\det(A_{1k}) \\ &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}).\end{aligned}$$

Ejemplos:

- Sea A una matriz de orden 2×2 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A_{11} = (a_{22}) \qquad \text{y} \qquad A_{12} = (a_{21}),$$

por lo tanto

$$\det(A_{11}) = a_{11} \qquad \text{y} \qquad \det(A_{12}) = a_{12},$$

de esta forma,

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

es decir,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Sea A una matriz de orden 3×3 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el determinante de la matriz A está dado por:

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

DEFINICIÓN 4: Cofactores

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ e $i, j \in I$. El cofactor ij de A, denotado C_{ij}, está dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

donde A_{ij} es el menor ij de A.

En la literatura, también se suele llamar menor al determinante de A_{ij} en lugar de a la matriz, como lo haremos en este texto. Además, al cofactor, se lo suele denotar por A_{ij}.

TEOREMA 1

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se tiene que para todo $i \in I$,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

y

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}C_{ki} = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \ldots + a_{ni}C_{ni}.$$

El lado derecho de las igualdades toma el nombre de expansión por cofactores del determinante de A.

PROPOSICIÓN 2. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si una fila o columna de A contiene solo ceros, entonces $\det(A) = 0$.

TEOREMA 3

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz triangular superior o triangular inferior, entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

es decir, el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

PROPOSICIÓN 4. Sea $E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz elemental, $i, j \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, con $\alpha \neq 0$. Se tiene que

- si la operación es $F_i \leftrightarrow F_j$, entonces $\det(E) = -1$;
- si la operación es $\alpha F_i \to F_i$, entonces $\det(E) = \alpha$; y
- si la operación es $\alpha F_i + F_j \to F_j$, entonces $\det(E) = 1$.

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

PROPOSICIÓN 5. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. El determinante de una matriz A y de su transpuesta son iguales, es decir,

$$\det(A^\intercal) = \det(A).$$

TEOREMA 6

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se tiene que:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

PROPOSICIÓN 7. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si la matriz B se obtiene intercambiando dos filas o columnas de A entonces

$$\det(B) = -\det(A).$$

PROPOSICIÓN 8. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si dos filas o columnas de A son iguales, entonces

$$\det(A) = 0$$

PROPOSICIÓN 9. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si B se obtiene al multiplicar una fila o columna de A por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$\det(B) = \alpha\det(A).$$

PROPOSICIÓN 10. Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se tiene que

$$\det(\alpha A) = \alpha^n\det(A).$$

PROPOSICIÓN 11. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $i, j \in I$, con $i \neq j$. Si B se obtiene al aplicar una operación de fila $\alpha F_i + F_j \to F_j$, entonces

$$\det(B) = \det(A).$$

TEOREMA 12

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si A es no singular, entonces $\det(A) \neq 0$ y

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

PROPOSICIÓN 13. Sean $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $j \in I$ tales que A, B y C difieran únicamente en la columna j. Si la columna j de C es el resultado de sumar las columnas j de A y B, entonces

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

3. INVERSA DE UNA MATRIZ

DEFINICIÓN 5: Matriz de cofactores

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. La matriz de cofactores de A, que se denota por $\operatorname{cof}(A)$, es la matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ que está formada por los cofactores de A, es decir,

$$\operatorname{cof}(A) = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 6

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. La matriz adjunta de A, que se denota por $\operatorname{adj}(A)$, es la matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$ que está formada por los cofactores de A, es decir,

$$\operatorname{adj}(A) = \operatorname{cof}(A)^{\intercal}.$$

TEOREMA 14

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces

$$A(\operatorname{adj}(A)) = (\operatorname{adj}(A))A = \det(A)I_n.$$

COROLARIO 15. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A).$$

PROPOSICIÓN 16. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Una matriz A es no singular si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

PROPOSICIÓN 17. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene una solución no trivial si y sólo si $\det(A) = 0$.

PROPOSICIÓN 18. Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^{n}$. El sistema $Ax = b$ tiene una solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$ y su solución es

$$A^{-1}b.$$

TEOREMA 19: Equivalencias no singulares

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se tienen que las siguientes son equivalentes:

1. A es no singular;
2. el sistema $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial;
3. A es equivalente por filas a I_n;
4. $\mathrm{rang}(A) = n$;
5. el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{K}^{n}$; y
6. $\det(A) \neq 0$.

4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

TEOREMA 20: Regla de Cramer

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^n$. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

y denotemos por A a su matriz asociada y b a su vector de resultados. Si $\det(A) \neq 0$, el sistema tiene solución única y está dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)},$$

para $j \in I$ y donde A_j es la matriz que se obtiene reemplazando la j-ésima columna de A por b.

1. EL ESPACIO $\mathbb{R}^n$

En esta sección, consideramos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.

DEFINICIÓN 1: El conjunto $\mathbb{R}^n$

El conjunto $\mathbb{R}^n$ es

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}},$$

es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Recordemos que, por notación, si $y \in \mathbb{R}^n$, se asumirá $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Recordemos que podemos identificar cada elemento de $\mathbb{R}^n$ con una matriz de $\mathbb{R}^{n\times 1}$ de la siguiente manera: si

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

entonces, visto como matriz es

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

TEOREMA 1

En $\mathbb{R}^n$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. **asociativa de la suma:** para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

2. **conmutativa de la suma:** para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$x + y = y + x;$$

3. **elemento neutro de la suma:** existe un elemento de $\mathbb{R}^n$, denotado por 0, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$x + 0 = 0 + x = x;$$

4. **inverso de la suma:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe un elemento de $\mathbb{R}^n$, denotado por $-x$, tal que

$$x + (-x) = 0;$$

5. **distributiva del producto I:** para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

6. **distributiva del producto II:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha, beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

7. **asociativa del producto:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha, beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

8. **elemento neutro del producto:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$1x = x.$$

DEFINICIÓN 2: Base canónica

En $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, definidos por

$$e^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se lo denomina *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 2

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que existen únicos

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

tales que
$$x = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \cdots + \alpha_n e^n.$$

DEFINICIÓN 3: Producto punto

La función
$$\begin{aligned} \cdot \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$
se denomina producto punto de $\mathbb{R}^n$ o producto interno de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 3: Propiedades del producto punto

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $x \cdot x \geq 0$;
- $x \cdot x = 0$ si y solo si $x = 0$;
- $x \cdot y = y \cdot z$;
- $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$; y
- $(\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) = \alpha(x \cdot y)$.

DEFINICIÓN 4: Norma

La función
$$\begin{aligned} \| \cdot \| \colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x \cdot x} \end{aligned}$$
se la llama la norma de $\mathbb{R}^n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ a $\|x\|$ se le llama norma, módulo o longitud de x.

TEOREMA 4: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

TEOREMA 5: Propiedades de la norma

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $\|x\| \geq 0$;

- $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$; y
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia entre x y y por $\|x - y\|$.

Definición 5: Vector unitario

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que x es un vector unitario si $\|x\| = 1$.

Definición 6

Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces al vector

$$u = \frac{1}{\|x\|} x$$

se le llama vector unitario en dirección de x.

Definición 7: Ángulo entre vectores

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, ambos diferentes de 0, se define el ángulo entre estos vectores por

$$\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}\right).$$

Definición 8

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se dice que

- son ortogonales si $x \cdot y = 0$;
- son paralelos si $|x \cdot y| = \|x\| \, \|y\|$; y
- tienen la misma dirección si $x \cdot y = \|x\| \, \|y\|$.

Proposición 6. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \neq 0$. Si x y y son paralelos, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x = \alpha y$.

DEFINICIÓN 9: Proyección ortogonal

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, la proyección ortogonal de x sobre y es

$$\text{proy}_y(x) = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$$

y la componente normal de x respecto a y es

$$\text{norm}_y(x) = x - \text{proy}_y(x).$$

2. PRODUCTO CRUZ

DEFINICIÓN 10

Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, se define el *producto cruz* de x y y por

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, -(x_1y_3 - x_3y_1), x_1y_2 - x_2y_1).$$

En $\mathbb{R}^3$, notaremos

$$\mathbf{i} = (1,0,0), \qquad \mathbf{j} = (0,1,0) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = (0,0,1).$$

Así,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

TEOREMA 7: Propiedades del producto cruz

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $x \times y = -y \times x$;
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$;
- $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$;
- $\alpha(x \times y) = (\alpha x) \times y = x \times (\alpha y)$;
- $x \times x = 0$;
- $0 \times x = x \times 0 = 0$;
- $x \times (y \times z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$; y

- $(x \times y) \times z = (z \cdot x)y - (z \cdot y)x$.

PROPOSICIÓN 8. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si llamamos θ al ángulo entre los vectores x y y, tenemos que

$$\|x \times y\| = \|x\| \, \|y\| \operatorname{sen}(\theta).$$

PROPOSICIÓN 9. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, se tiene que:

- El volumen del paralelepípedo formado por x, y, z es $|x \cdot (y \times z)|$.
- El área del paralelogramo determinado por x, y es $\|x \times y\|$.

1. Geometría de $\mathbb{R}^n$

En esta sección, a menos que se indique lo contrario, asumiremos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.

DEFINICIÓN 1: Recta de $\mathbb{R}^n$

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $b \neq 0$, la recta que pasa por a con dirección b es el conjunto

$$L(a; b) = \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^2$, tenemos la recta que pasa por $(1, -2)$ con dirección $(3, 2)$ es

$$\begin{aligned} L((1,-2);(3,2)) &= \{(1,-2) + t(3,2) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1+3t, -2+2t) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1+3t,\ y = -2+2t,\ t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 4\} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que la recta está definida por

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3t, \\ y &= -2 + 2t, \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$; a esta se la llama la ecuación paramétrica de la recta. Por otro lado, también tenemos que la recta está definida por

$$2x - 3y = 4$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; a esta se la llama la ecuación cartesiana de la recta. □

DEFINICIÓN 2: Plano de $\mathbb{R}^n$

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, con b y c no paralelos y diferentes de 0, el plano que pasa por a con dirección b y c es el conjunto

$$P(a; b, c) = \{a + ub + vc : u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^3$, tenemos la recta que pasa por $(1,-2,-1)$ con direcciones $(3,2,1)$ y $(1,0,2)$ es

$$\begin{aligned}
&L((1,-2,-1);(3,2,1),(1,0,2)) \\
&\quad = \{(1,-2,-1)+u(3,2,1)+v(1,0,2) : u,v \in \mathbb{R}\} \\
&\quad = \{(1+3u+v,-2+2u,-1+u+2v) : u,v \in \mathbb{R}\} \\
&\quad = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=1+3u+v,\ y=-2+2u,\ z=-1+u+2v,\ u,v \in \mathbb{R}\} \\
&\quad = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : 4x-5y-2z=8\}
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que la recta está definida por

$$\begin{aligned}
x &= 1+3u+v, \\
y &= -2+2u, \\
z &= -1+u+2v
\end{aligned}$$

con $u,v \in \mathbb{R}$; a esta se la llama la ecuación paramétrica del plano. Por otro lado, también tenemos que la recta está definida por

$$4x-5y-2z=8$$

con $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; a esta se la llama la ecuación cartesiana de la recta. □

Podemos pasar de la ecuación paramétrica a la ecuación cartesiana si, al verlas como un sistema de ecuaciones en sus parámetros, analizamos cuándo el sistema es consistente.
Además, podemos pasar de la ecuación cartesiana a la ecuación paramétrica si, al verla como un sistema de ecuaciones, resolvemos el sistema.

PROPOSICIÓN 1. Dada una recta o un plano H, se tiene que si $0 \in H$, entonces para todo $x,y \in H$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lambda x \in H \qquad \text{y} \qquad x+y \in H.$$

PROPOSICIÓN 2. Dados dos puntos $a,b \in \mathbb{R}^n$ distintos, existe una única recta que pasa por a y b y esta es

$$L(a;b-a).$$

En $\mathbb{R}^2$, dados dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, la ecuación cartesiana de la recta que pasa por estos dos puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

PROPOSICIÓN 3. Dados tres puntos $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ que no pertenecen a la misma recta, existe un único plano que pasa por a, b y c y este es

$$P(a; b - a, c - a).$$

En $\mathbb{R}^3$, dados tres puntos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$, la ecuación cartesiana del plano que pasa por estos tres puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

DEFINICIÓN 3

En $\mathbb{R}^n$, dadas una recta o plano H y $r \in \mathbb{R}^n$, se dice que r es ortogonal a H si para todo $a, b \in H$ se cumple que $r \cdot (b - a) = 0$.

PROPOSICIÓN 4. En $\mathbb{R}^3$, dados los vectores $a, r \in \mathbb{R}^n$, existe un único plano H, que pasa por a, tal que r es ortogonal a H. Además,

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : r \cdot x = r \cdot a\}.$$

PROPOSICIÓN 5. En $\mathbb{R}^3$, dado el plano $P(a; b, c)$, un vector normal a este es $b \times c$.

2. ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN 4: Espacio Vectorial

Dados un campo $\mathbb{K}$, un conjunto no vacío E y dos operaciones

$$\begin{aligned} \oplus\colon\ E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \oplus y, \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \odot\colon\ \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \odot x \end{aligned}$$

llamadas suma y producto, respectivamente; se dice que $(E, \oplus, \odot, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial si cumplen las siguientes propiedades

1. **asociativa de la suma:** para todo $x, y, z \in E$ se tiene que
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z);$$
2. **conmutativa de la suma:** para todo $x, y \in E$ se tiene que
$$x \oplus y = y \oplus x;$$
3. **elemento neutro de la suma:** existe un elemento de E, denotado por 0_E o simplemente 0, tal que para todo $x \in E$ se tiene que
$$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x;$$
4. **inverso de la suma:** para todo $x \in E$, existe un elemento de E, denotado por $-x$, tal que
$$x \oplus (-x) = 0;$$
5. **distributiva del producto I:** para todo $x, y \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que
$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x + \alpha \odot y$$
6. **distributiva del producto II:** para todo $x \in E$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que
$$(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x;$$
7. **asociativa del producto:** para todo $x \in E$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que
$$(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x);$$

8. **elemento neutro del producto:** para todo $x \in E$ se tiene que

$$1 \odot x = x,$$

donde $1 \in \mathbb{K}$ es el elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{K}$

Utilizamos los símbolos $\oplus$ y $\odot$ para enfatizar el hecho de que, en general, las operaciones definidas no son la suma y el producto estándar que utilizamos. Si no existe riesgo de confusión, utilizaremos la notación

$$x \oplus y = x + y \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = \alpha x$$

y diremos que el espacio vectorial es $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$, es más, en caso de que no exista ambigüedad en las operaciones utilizadas se dirá simplemente que E es un espacio vectorial.

PROPOSICIÓN 6. Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales en el campo $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathbb{R}^{m\times n}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathcal{F}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es una función}\}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es continua en } I\}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^k(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ es } k \text{ veces derivable en } I \text{ y } f^k \in \mathcal{C}^k(I)\}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_n[x]$ el conjunto de todos los polinomio de grado menor igual que n en la variable x, con $n \in \mathbb{N}$;

TEOREMA 7

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, se tiene que para todo $u \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que

1. $0u = 0$;
2. $\alpha 0 = 0$;
3. si $\alpha u = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $u = 0$;

4. $(-1)u = -u$.

3. Subespacios

Definición 5: Subespacio Vectorial

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W \subseteq E$ un conjunto no vacío de E. Si W es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de E, entonces se dice que W es un subespacio de E.

Teorema 8

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de E. Entonces W es un subespacio de E si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$; u
- si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in W$, entonces $\alpha u \in W$.

Definición 6: Combinación lineal

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$. Se dice que un vector $v \in E$ es una combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_k$ si

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

Definición 7

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$. Al conjunto conjunto de todos los vectores en E que son combinaciones lineales de los vectores de S se lo llama cápsula de S y se denota por $\operatorname{span}(S)$, es decir

$$\operatorname{span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$

A este conjunto también se lo conoce como *clausura lineal* y su notación viene de su nombre en inglés, *linear span*. También se utiliza la notación $\langle S \rangle$.

TEOREMA 9

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Se tiene que $\operatorname{span}(S)$ es un subespacio vectorial de E.

1. CONJUNTO GENERADOR

DEFINICIÓN 1

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Al subespacio vectorial más pequeño que contiene a S (es decir, la intersección de todos los subespacios que contienen a S) se lo denomina espacio generado por S y se denota por $\text{gen}(S)$.

PROPOSICIÓN 1. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Se tiene que

$$\text{span}(S) = \text{gen}(S).$$

DEFINICIÓN 2

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$. Se dice que S genera el espacio vectorial E si cada vector en E es una combinación lineal de los elementos de S, es decir, si para todo $v \in E$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in K$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

PROPOSICIÓN 2. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$. Se tiene que S genera el espacio vectorial E si y solo si

$$E = \text{gen}(S) = \text{span}(S).$$

2. INDEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN 3

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$. Se dice que S es un conjunto linealmente dependiente si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, no todos iguales a cero, tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

en caso contrario, se dice que S es un conjunto linealmente independiente.

De esta definición, se tiene que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente si y solo si

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

implica que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Se puede extender esta definición para conjuntos infinitos diciendo que S es linealmente independiente si todo subcojunto finito de S es linealmente independiente.

PROPOSICIÓN 3. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Si $0 \in S$, entonces S es linealmente dependientes.

PROPOSICIÓN 4. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq E$. Se tiene que S es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si alguno de los vectores $v_j \in S$ es una combinación lineal de otros elementos de S.

1. BASES

PROPOSICIÓN 1. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$. Se dice que B es una base de E si

- B genera a E y
- B es linealmente independiente.

TEOREMA 2: Base canónica de $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, definidos por

$$e^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es una base de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 3: Base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$

En $\mathbb{R}_n[x]$, el conjunto $\{1, x, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$. A esta base se la denomina la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$.

TEOREMA 4

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Se tiene que todo elemento de E se puede escribir, de manera única, como combinación lineal de elementos de B.

TEOREMA 5

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$. Se tiene que si todo elemento de E se puede escribir, de manera única, como combinación lineal de elementos de B, entonces B es una base de E.

Proposición 6. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$ un conjunto que genera a E. Se tiene que algún subconjunto de S es base de E.

Teorema 7

Todo espacio vectorial tiene una base.

2. Dimensión

Proposición 8. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Si $S \subseteq E$ es un conjunto linealmente independiente, entonces

$$|S| \leq |B|.$$

Proposición 9. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Si $S \subseteq E$ es un conjunto que genera a E, entonces

$$|B| \leq |S|.$$

Proposición 10. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B, T \subseteq E$ bases de E. Se tiene que

$$|B| = |T|.$$

Definición 1: Dimensión

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Se define la dimensión de E, denotado por $\dim(E)$, por la cantidad de elementos de B.

Proposición 11. Se tiene que

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, con $n \in \mathbb{N}^*$;
- $\dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = mn$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$;

- $\dim(\{0\}) = 0$.

PROPOSICIÓN 12. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$ un conjunto linealmente independiente. Se tiene que existe una base B de E que contiene a S.

TEOREMA 13

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $B \subseteq E$ y $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\dim(E) = n$ y $|B| = n$. Se tiene que

- si B es linealmente independiente, entonces B es una base de E.
- si B genera a E, entonces B es una base de E.

3. RANGO DE UNA MATRIZ

Consideraremos $n, m \in \mathbb{N}^*$.

DEFINICIÓN 2: Espacio filas y espacio columnas

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $v_1, \ldots, v_m$ las filas de A y $u_1, \ldots, u_n$ las columnas de A. Al espacio

$$\operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_m\}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

se lo llama espacio filas de A y al espacio

$$\operatorname{span}(\{u_1, \ldots, u_n\}) \subseteq \mathbb{R}^m$$

se lo llama espacio columnas de A.

PROPOSICIÓN 14. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Si A y B son equivalentes por filas, entonces los espacios filas de A y B son iguales.

PROPOSICIÓN 15. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Se tiene que las dimensiones de los espacios filas y columnas de A son iguales, es más, estas dimensiones son iguales a $\operatorname{rang}(A)$.

4. Componentes y Cambio de base

En esta sección, asumiremos $n \in \mathbb{N}^*$.

Definición 3: Base ordenada

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Si numeramos los vectores de B, obteniendo

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

se la llama una base ordenada.

Definición 4: Vector de componentes

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq E$$

una base ordenada. Para $u \in E$, se define el vector de componentes de u por

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ son tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

En la literatura, también se puede encontrar la definición anterior bajo el nombre de vector de coordenadas.

Definición 5: Matriz de cambio de base

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial tal que $\dim(E) = n$ y $S, T \subseteq E$ bases ordenadas de E. Se llama matriz de cambio de base T a S a la única matriz de $\mathbb{K}^{n \times n}$, denotada por $P_{S \leftarrow T}$, que cumple que

$$[v]_S = P_{S \leftarrow T}[v]_T$$

para todo $v \in E$.

En la literatura, también se puede encontrar la definición anterior bajo el nombre de matriz de transición.

TEOREMA 16

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial tal que $\dim(E) = n$, $S, T \subseteq E$ bases ordenadas de E y $P_{S \leftarrow T}$ la matriz de cambio de base T a S. Se tiene que $P_{S \leftarrow T}$ es no singular y

$$(P_{S \leftarrow T})^{-1} = P_{T \leftarrow S}.$$

DEFINICIÓN 1: Espacio nulo y nulidad

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. El espacio nulo de A, que notaremos por $\text{nul}(A)$, se define como

$$\text{nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

y la nulidad es la dimensión del espacio nulo.

TEOREMA 1: Equivalencias no singulares

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se tienen que las siguientes son equivalentes:

1. A es no singular;
2. el sistema $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial;
3. A es equivalente por filas a I_n;
4. el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{K}^n$;
5. $\det(A) \neq 0$;
6. las filas de A forman un conjunto linealmente de vectores;
7. las columnas de A forman un conjunto linealmente;
8. $\text{rang}(A) = n$; y
9. la nulidad de A es 0.

1. SUMA DE ESPACIOS

DEFINICIÓN 2: Suma

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subseteq E$, entonces la suma de W_1

y W_2 se define como:

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \in E : w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2\}.$$

EJEMPLO 1. Sea

$$U = \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad W = \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}$$

entonces

$$\begin{aligned} U + W &= \{u + v \in \mathbb{R}^3 : u \in U \text{ y } v \in V\} \\ &= \{u + v \in \mathbb{R}^3 : u = (x,0,0) \text{ y } v = (0,y,0), \text{ con } x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,0,0) + (0,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 3: Suma generalizada

Sean $(E,+,\cdot,\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W_1, \ldots, W_m \subseteq E$, entonces la suma de $W_1, \ldots, W_m$ se define como:

$$W_1 + \cdots + W_m = \{w_1 + \cdots + w_m \in E : w_1 \in W_1, \ldots, w_m \in W_m\}$$

PROPOSICIÓN 2. Sean $(E,+,\cdot,\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subseteq E$ dos subespacios vectoriales de E, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio vectorial de E.

PROPOSICIÓN 3. Sean $(E,+,\cdot,\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subseteq E$ dos subespacios vectoriales de E. Si tomemos B_1 y B_2 bases de W_1 y W_2, respectivamente, se tiene que

$$W_1 + W_2 = \operatorname{span}(B_1 \cup B_2).$$

TEOREMA 4

Sean $(E,+,\cdot,\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W_1, W_2 \subseteq E$ dos subespacios vectoriales de E de dimensión finita. Se tiene que

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

DEFINICIÓN 4: Suma directa

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $V, W_1, W_2 \subseteq E$ subespacios vectoriales de E, se dice que V es la suma directa de W_1 y W_2 si

$$V = W_1 + W_2$$

y cada elemento de V se puede escribir de manera única como la suma de elementos de W_1 y W_2. Esto se lo denota por

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

EJEMPLO 2. Sea

$$U = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$$

entonces se tiene que

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W.$$

DEFINICIÓN 5: Suma directa generalizada

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $V, W_1, \ldots, W_m \subseteq E$ subespacios vectoriales de E, se dice que V es la suma directa de $W_1, \ldots, W_m$ si

$$V = W_1 + \cdots + W_m$$

y cada elemento de V se puede escribir de manera única como la suma de elementos de $W_1, \ldots, W_m$. Esto se lo denota por

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m.$$

TEOREMA 5

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $V, W_1, W_2 \subseteq E$ subespacios vectoriales de E, se tiene que

$$E = W_1 \oplus W_2$$

si y sólo si

$$E = W_1 + W_2 \qquad \text{y} \qquad W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

TEOREMA 6

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita. Para todo S subespacio vectorial de E, existe un subespacio vectorial T de E tal que

$$E = S \oplus T.$$

Se dice que T es el subespacio complementario de S en E.

TEOREMA 7

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita y $S, T \subseteq E$ subespacios vectoriales de E. Se tiene que si E es la suma directa de S y T, entonces E

$$\dim(E) = \dim(S) + \dim(T).$$

1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

DEFINICIÓN 1: Producto interno

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Un producto interno sobre E es una función

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon\ E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

tales que cumple:

1. $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in E$;
2. $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$;
3. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in E$;
4. $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.
5. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ para todo $v, w \in E$.

Otra notación para el producto interno es

$$\langle u, v \rangle = (u|v).$$

En caso de tratarse de un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, la propiedad 5 se transforma en

5. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ para todo $v, w \in E$.

Se puede demostrar utilizando la propiedad 4 que

- si $v = 0$, entonces $\langle v, v \rangle = 0$;

por lo cual, podríamos cambiar la propiedad 2 por

2. si $\langle v, v \rangle = 0$, entonces $v = 0$

Si se define un producto interno sobre un espacio vectorial E, a este se lo denomina espacio con producto interno o pre-Hilbertiano.

TEOREMA 1

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces:

1. Para todo $u, v, w \in E$
$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$$
2. Para todo $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$
$$\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle.$$
3. Para todo $u \in E$
$$\langle u, 0 \rangle = \langle 0, u \rangle = 0.$$

En caso de tratarse de un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, la propiedad 2 se transforma en

2. Para todo $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$
$$\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

1.1 Productos internos usuales

1. En $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$, para $x, y \in \mathbb{R}^n$:
$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$
2. En $(\mathbb{C}^n, +, \cdot, \mathbb{C})$, para $x, y \in \mathbb{C}^n$:
$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$
3. En $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot, \mathbb{R})$, para $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, si
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad \text{y} \qquad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

entonces

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

4. En $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot, \mathbb{R})$, para $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^\top).$$

5. En $(\mathcal{C}([a,b]), +, \cdot, \mathbb{R})$, para $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

DEFINICIÓN 2

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y suponga que $u, v \in E$. Entonces:

1. u y v don ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$.

2. La norma de u, denotada por $\|u\|$, está dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

DEFINICIÓN 3

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. La distancia en el espacio se define por

$$\begin{aligned} d\colon\ E\times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto \|u - v\|. \end{aligned}$$

TEOREMA 2: Vectores ortogonales

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para $u, v \in E$, se dice que son ortogonales si

$$\langle u, v\rangle = 0.$$

TEOREMA 3: Teorema de pitágoras

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Si u, v son vectores ortogonales de E, entonces

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

TEOREMA 4: Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para todo $u, v \in E$ se cumple que

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

TEOREMA 5: Desigualdad triangular

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para todo $u, v \in E$ se cumple que

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

DEFINICIÓN 4: Conjunto ortogonal

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y

$$C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq E.$$

Se dice que C es un conjunto ortogonal en E si

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0$$

para todo $i \neq j$.

DEFINICIÓN 5: Conjunto ortonormal

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y

$$C = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq E.$$

Se dice que C es un conjunto ortonormal en E si es ortogonal y

$$\|v_k\| = 1$$

para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

PROPOSICIÓN 6. Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Si $C \subseteq E$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces es linealmente independiente.

A partir de aquí, siempre consideraremos espacios vectoriales provistos con un producto interno.

2. BASES ORTOGONALES

DEFINICIÓN 6: Base ortogonal (ortonormal)

En un espacio vectorial, una base ortogonal (ortonormal) es una base cuyos vectores forman un conjunto ortogonal (ortonormal).

TEOREMA 7

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base ortogonal para E. Se tiene que, para $v \in E$,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

donde

$$c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

TEOREMA 8

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal para E. Se tiene que, para $v \in E$,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$

donde

$$c_k = \langle v, u_k \rangle$$

para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema 9: Proceso de Gram-Schmidt

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ un conjunto linealmente independiente de E. Definamos

1. $v_1 = u_1$ y
2. $v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$, para $k = 2, \ldots, n$.

Se tiene que el conjunto

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

es un conjunto ortogonal. Además, si definimos

$$w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

para $k = 1, \ldots, n$, se tiene que el conjunto

$$\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

es un conjunto ortonormal.

Teorema 10

Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base ortogonal y una base ortonormal.

Ejemplo 1. Considere la base $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$u_1 = (1, 1, 0), \qquad u_2 = (0, 1, 1), \qquad u_3 = (1, 0, 1)$$

mediante el proceso de Gram-schmidt, se obtiene la base ortonormal $T = \{w_1, w_2, w_2\}$ para $\mathbb{R}^3$ donde

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \qquad w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \qquad w_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

3. Complemento ortogonal

A partir de aquí, siempre consideraremos espacios vectoriales provistos con un producto interno.

Definición 7: Complemeto ortogonal

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $H \subseteq E$. El complemento ortogonal de H denotado por $H^{\perp}$, está dado por:

$$H^{\perp} = \{x \in E : \langle x, h \rangle = 0, \text{ para todo } h \in H\}$$

Teorema 11

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y H subespacio vectorial de H, entonces:

1. $H^{\perp}$ es un subespacio vectorial de E.
2. $H \cap H^{\perp} = \{0\}$
3. Si $\dim(E) = n$, entonces $\dim(H^{\perp}) = n - \dim(H)$

Teorema 12

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, entonces:

1. El espacio nulo de A es el complemento ortogonal del espacio fila de A.
2. El espacio nulo de $A^{\intercal}$ es el complemento ortogonal del espacio columna de A.

Definición 8: Matrix ortonormal

Una matriz $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se llama ortonormal si Q es invertible y

$$Q^{-1} = Q^{\intercal}$$

Teorema 13

La matriz $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es una matriz ortonormal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

1. Complemento ortogonal

TEOREMA 1

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, W un subespacio vectorial de E, entonces

$$E = W \oplus W^{\perp}.$$

TEOREMA 2

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, W un subespacio vectorial de E, entonces

$$\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W.$$

DEFINICIÓN 1: Proyección ortogonal

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y H un subespacio vectorial de E, con base ortogonal $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Para $v \in E$, la proyección ortogonal de v sobre H, denotado por $\operatorname{proy}_H v$, se define por:

$$\operatorname{proy}_H(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \cdots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n,$$

donde $\operatorname{proy}_H(v) \in H$.

TEOREMA 3: Teorema de la proyección

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, H un subespacio vectorial de E y $v \in E$. Se tiene que

$$v = \operatorname{proy}_H(v) + \operatorname{proy}_{H^{\perp}}(v).$$

TEOREMA 4

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, H un subespacio vectorial de E y $v \in E$. Se tiene que el vector en H más cercano a v es $\text{proy}_H(v)$, es decir,

$$\|v - w\| \quad \text{es mínima cuando} \quad w = \text{proy}_W(v).$$

2. APLICACIONES LINEALES

DEFINICIÓN 2: Aplicación lineal

Sean $(E, +_1, \cdot_1, \mathbb{K})$ y $(F, +_2, \cdot_2, \mathbb{K})$ espacios vectoriales. A una función $T\colon E \to F$ se la llama una aplicación lineal (transformación lineal) si satisface que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, y todo $u, v \in E$ se cumple

1. $T(u +_1 v) = T(u) +_2 T(v)$ y
2. $T(\alpha \cdot_1 v) = \alpha \cdot_2 T(v)$.

En adelante, consideraremos $(E, +_1, \cdot_1, \mathbb{K})$ y $(F, +_2, \cdot_2, \mathbb{K})$ espacios vectoriales. Notaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de las aplicaciones lineales de E en F.

En caso de que no exista riesgo de ambigüedad, dado $T \in \mathcal{L}(E, F)$, se denotará

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$,

para $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u, v \in E$.

TEOREMA 5

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para todo $u, v, v_1, v_2, \ldots, v_n \in E$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

1. $T(0_E) = 0_F$;
2. $T(u - v) = T(u) - T(v)$: y
3. $T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(v_k)$.

2.1 Ejemplos de transformaciones lineales

1. Transformación nula,
$$\begin{aligned} T\colon F &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

2. Transformación identidad,
$$\begin{aligned} T\colon F &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto v. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x,y). \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,0). \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+y,y+z,x). \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ (x,y,z) &\longmapsto x+(x-y)t+zt^2. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} D\colon\ \mathcal{C}^1([0,1]) &\longrightarrow \mathcal{C}([0,1]) \\ f \quad &\longmapsto Df. \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} I\colon\ \mathcal{C}([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f \quad &\longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Toda transformación matricial es una aplicación lineal.

PROPOSICIÓN 6. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de E, entonces T está completamente determinada por

$$\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}.$$

Es decir, si se conoce el valor de $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$, entonces se conoce $T(u)$ para todo $u \in E$.

3. NÚCLEO E IMAGEN

DEFINICIÓN 3: Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. El núcleo de T, denotado por $\ker(T)$, está definida por:

$$\ker(T) = \{v \in E : T(v) = 0\}.$$

2. La imagen de T, denotada por $\operatorname{img}(T)$, está definida por:

$$\operatorname{img}(T) = \{w \in F : w = T(v) \text{ para algún } v \in E\}.$$

PROPOSICIÓN 7. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces

1. $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de E.
2. $\operatorname{img}(T)$ es un subespacio vectorial de F.

PROPOSICIÓN 8. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se tiene que T es inyectiva si y solo si $\ker(T) = \{0\}$.

DEFINICIÓN 4: Nulidad y rango de una aplicación lineal

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Se llama nulidad de T a $\dim(\ker(T))$.
2. Se llama rango de T a $\dim(\operatorname{img}(T))$.

TEOREMA 9

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con E un espacio de dimensión finita. Se tiene que

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{img}(T)).$$

PROPOSICIÓN 10. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con E un espacio de dimensión finita. Si $\dim(E) = \dim(F)$, entonces se tiene que la siguientes son equivalentes

- T es inyectiva,
- T es sobreyectiva.

1. PROPIEDADES DE APLICACIONES LINEALES

TEOREMA 1

Se tiene que $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio vectorial.

PROPOSICIÓN 2. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para E. Si

$$T_1(v_i) = T_2(v_i)$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces se tiene que $T_1(v) = T_2(v)$, para todo $v \in E$, es decir,

$$T_1 = T_2.$$

PROPOSICIÓN 3. Sean $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para E y $w_1, w_2, \ldots, w_n \in F$. Se tiene que existe una única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que

$$T(v_i) = w_i$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

TEOREMA 4

Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Supongamos que $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$, se tiene que:

1. si $n > m$, entonces T no es inyectiva; y
2. si $m > n$, entonces T no es sobreyectiva.

2. ISOMORFISMOS

DEFINICIÓN 1: Isomorfismo

Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Se dice que T es un isomorfismo de E en F si T es biyectiva.

DEFINICIÓN 2: Espacios isomorfos

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ y $(F, +, \cdot, \mathbb{K})$. Se dice que E y F son isomorfos si existe un isomorfismo T de E en F, se lo denonta por $E \cong F$.

TEOREMA 5

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorfismo, se tiene que

1. si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera a E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$$
genera a F;
2. si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ son linealmente independientes en E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$$
es linealmente independientes en F;
3. si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es base de E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$$
es base de F;
4. si E es de dimensión finita, entonces F es de dimensión finita y
$$\dim(E) = \dim(F).$$

TEOREMA 6

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ y $(F, +, \cdot, \mathbb{R})$ espacios de dimensión finita tales que $\dim(E) = \dim(F)$, entonces $E \cong F$.

PROPOSICIÓN 7. Se tiene que

1. $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;
2. $P_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Matriz asociada

En adelante, consideraremos E y F espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$.

Definición 3

Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y B, D bases para E y F, respectivamente. Se tiene que existe una única matriz de $\mathbb{K}^{m\times n}$, denotada por $[T]_{D,B}$, tal que

$$[T(v)]_D = [T]_{D,B}[v]_B$$

para todo $v \in E$. A esta matriz se la llama matriz asociada a la aplicación lineal T.

Proposición 8. Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \qquad \text{y} \qquad D = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

bases para E y F, respectivamente. Se tiene que las columnas de la matriz $[T]$ son los vectores de coordenadas de $T(v_j)$ en la base D, para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es decir

$$[T]_{D,B} = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_D & [T(v_2)]_D & \cdots & [T(v_n)]_D \end{pmatrix}.$$

En caso de no existir riesgo de confusión en las bases que se utiliza, se nota simplemente $[T]$ a la matriz asociada a la aplicación lineal T.

Se pueden ver ejemplos del procedimiento para encontrar una matriz asociada a una aplicación lineal entre las páginas 522 y 527 del libro de Kolman.

Proposición 9. Sean $I \in \mathcal{L}(E, E)$ la aplicación identidad y B, D dos bases para E, considerando B para el conjunto de salida y D para el conjunto de llegada. Se tiene que

$$[I]_{D,B} = P_{D\leftarrow B}.$$

Proposición 10. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se tiene que T es biyectiva si y solo si $[T]$ es invertible.

Teorema 11

Sean $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, con G un espacio vectorial de dimensión finita. Se tiene que

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1].$$

Teorema 12

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ una aplicación lineal invertible. Se tiene que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}.$$

Teorema 13

Se tiene que $\mathcal{L}(E, F)$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{m \times n}$, es decir

$$\mathcal{L}(E, F) \cong \mathbb{K}^{m \times n}.$$

1. Valores y vectores propios

DEFINICIÓN 1

Sean $T \in \mathcal{L}(E,E)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se dice que λ es un valor propio de T si existe $v \in E$, con $v \neq 0$, tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

A este vector v se lo llama vector propio de T asociado al valor propio λ.

Note que, por definición, el vector 0 no puede ser un vector propio asociado a una aplicación lineal.

PROPOSICIÓN 1. Sean $T \in \mathcal{L}(E,E)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de T. Se tiene que el conjunto

$$E_\lambda = \{v \in E : T(v) = \lambda v\}$$

es un subespacio vectorial de E. Se lo denomina el espacio propio de T aosociado al valor propio λ.

TEOREMA 2

Sean $T \in \mathcal{L}(E,E)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores propios de T distintos entre sí. Si tomamos $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectivamente, se tiene que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

En adelante, consideraremos a E como un espacio vectorial de dimensión finita.

DEFINICIÓN 2

Sea $T \in \mathcal{L}(E,E)$. Se denomina espectro de T al conjunto de todos los valores propios de T.

DEFINICIÓN 3

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se define la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T_A\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto Au. \end{aligned}$$

a los valores propios de T_A se los denomina valores propios de A, a los vectores propios de T_A se los denomina vectores propios de A y a los espacios propios de T_A se los denomina espacios propios de A. Además, se denomina espectro de A al espectro de T_A.

PROPOSICIÓN 3. Sea $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Se tiene

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de T si y solo si es un valor propio de $[T]$; y
2. $v \in E$ es un vector propio de T si y solo si $[v]$ es un vector propio de $[T]$.

De este resultado, se sigue que, para determinar los valores, vectores y espacios propios de un operador lineal, basta determinar los valores, vectores y espacios propios de una matriz.

PROPOSICIÓN 4. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se tiene que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A si y solo si existe $v \in \mathbb{R}^n$, con $v \neq 0$, tal que

$$Av = \lambda v,$$

además, v es un vector propio de A asociado al valor propio λ.

PROPOSICIÓN 5. Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene que λ es un valor propio de A si y solo si

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

donde I es la matriz identidad.

PROPOSICIÓN 6. Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal de la matriz.

DEFINICIÓN 4

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Al polinomio

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

se lo denomina polinomio característico de A.

TEOREMA 7: Teorema de Cayley–Hamilton

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $p_A(\lambda)$ su polinomio característico. Se tiene que

$$p_A(A) = 0.$$

1. VALORES Y VECTORES PROPIOS

EJERCICIO 1. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Determine el polinomio característico de A.
2. Determine lo valores propios de A.
3. Determine el espacio propio asociado a cada valor propio encontrado.
4. Determine una base para cada espacio propio.
5. Defina la matriz P formada por los vectores del literal anterior como columnas.
6. Calcule P^{-1}.
7. Defina la matriz diagonal D que tenga en su diagonal los valores propios de A.
8. Compruebe que $A = PDP^{-1}$.

Las soluciones parciales de este ejercicio puede encontrarse en el libro de Kolman, páginas 410 y 422.

EJERCICIO 2. En $\mathbb{R}_1[t]$, considere la siguiente aplicación lineal:

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}_1[t] &\longrightarrow \mathbb{R}_1[t] \\ a + bt &\longmapsto a + b + (-2a + 4b)t. \end{aligned}$$

1. Determine $[T]$ en función de la base canónica.
2. Determine los valores propios de T.
3. Determine un vector propio asociado a cada valor propio de T.