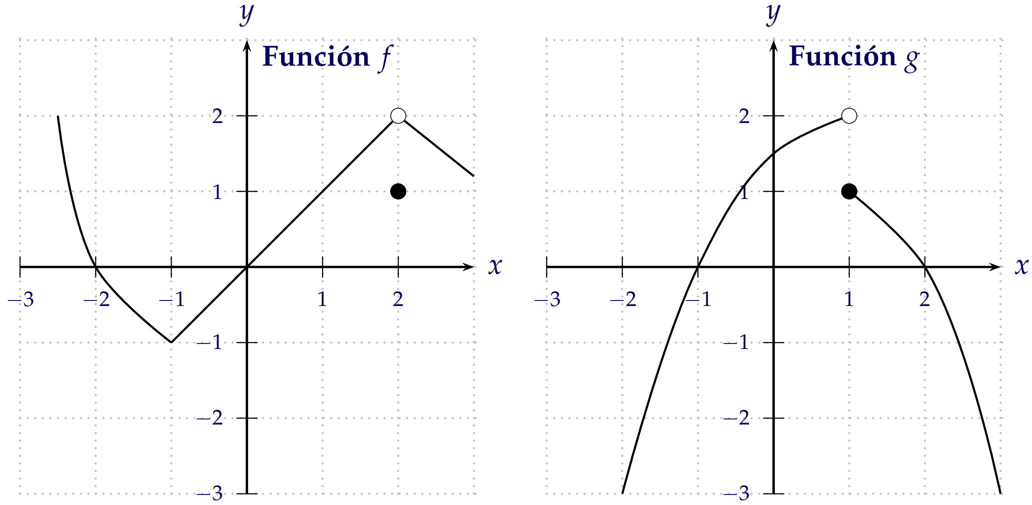
## SOLUCIONES

1. Las siguientes son las gráficas de las funciones $f$ y $g$:




Sobre la base de estas gráficas y apoyándose en el teorema del límite de funciones localmente iguales, conjeture los valores adecuados para los límites de $f$ y $g$ en los puntos $-2$, $-1$, $1$ y $2$. A partir de los valores conjeturados, justifique si existe cada uno de los siguientes límites; en el caso afirmativo, calcule el límite y justifique cada uno de los pasos realizados para el cálculo.

*a)* $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$

*b)* $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)g(x)]$

*c)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

*d)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

*e)* $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$

*Solución.* Con ayuda de las gráficas, podemos conjeturar si existen o no los límites propuesto y cuáles son sus "valores". En efecto, para la función $f$, la gráfica nos muestra que en valores cercanos a $-2$ (tanto mayores como menores a $-2$), los valores que toma $f$ están cerca de 0; por tanto, conjeturamos que el límite de $f$ en $-2$ es igual a 0. Un razonamiento similar nos lleva a proponer que existen los límites de $f$ en $-1$, 1 y 2 y que sus valores son $-1$, 1 y 2, respectivamente. Para los tres primeros límites, podemos observar que los límites coinciden con los valores que las funciones toman en $-1$, 1 y 2, respectivamente. En cambio, en 2, el límite sería 2, pero $f(2)=1$. En resumen, tenemos que

$$\lim_{x\to -2} f(x)=0,\quad \lim_{x\to -1} f(x)=-1,\quad \lim_{x\to 1} f(x)=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} f(x)=2. \tag{1}$$

Razonando de manera similar, tenemos que:

$$\lim_{x\to -2} g(x)=-3,\quad \lim_{x\to -1} g(x)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2} g(x)=0. \tag{2}$$

Por otra parte, podemos conjeturar que no existe el límite de $g$ en 1. En efecto, para valores cercanos a 1 pero menores que este número, los valores que $g$ toma en ellos son cercanos a 2, mientras que para valores cercanos a 1 pero mayores que este número, $g$ toma valores cercanos a 1. Luego, $g$ no puede tener límite en este punto. No obstante, por lo anterior sí podemos conjeturar que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x)=1.$$

*a*) **Cálculo de** $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)]$: puesto que los límites de $f$ y $g$ existe en 2, por el límite de la suma de funciones (*numeral 1 del Teorema 4 del Resumen 1*), de (1) y (2), se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)] &= \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x)\\ &= 2+0\\ &= 2.\end{aligned}$$

*b*) **Cálculo de** $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$: El límite de $f$ en 1, pero el de $g$ no; así que no podemos aplicar el límite del producto de funciones (*numeral 2 del Teorema 4 del Resumen 2*) y, al menos por este medio, no podemos concluir si existe o no el límite del producto. Sin embargo, puesto que tenemos que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = 1,$$

tenemos que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)g(x) = 1\cdot 2 = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)g(x) = 1\cdot 1 = 1;$$

es decir,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)g(x);$$

luego, no existe el límite del producto de $f$ y $g$ en 1 (*Teorema 6 del Resumen 3*).

*c*) **Cálculo de** $\lim_{x\to -1}\dfrac{g(x)}{f(x)}$: puesto que existen los límites de $f$ y $g$ en $-1$ y el límite de $g$ es diferente de 0, podemos aplicar el límite de un cociente para obtener que:

$$\lim_{x\to -1}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to -1} g(x)}{\lim_{x\to -1} f(x)} = \frac{0}{-1} = 0.$$

*d*) **Cálculo de** $\lim_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$: con razonamiento similar al ejercicio anterior, concluimos que

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to -2} f(x)}{\lim_{x\to -2} g(x)} = \frac{0}{-3} = 0$$

*e*) **Cálculo de** $\lim_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)}$: de acuerdo a la gráfica de $f$, alrededor de 1, los valores de $3+f(x)$ son mayores que 0, por tanto, existe $\sqrt{3+f(x)}$ para cualquier intervalo centrado en 1 "lo suficientemente pequeño". Y puesto que existe el límite de $f$ en 1, entonces existe el límite de $3+f$ en dicho punto; luego, por el el *numeral 1 del Teorema 4 del Resumen 2*, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\sqrt{3+f(x)} &= \sqrt{\lim_{x\to 1} 3+f(x)}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to 1} 3 + \lim_{x\to 1} f(x)}\\ &= \sqrt{3+1}\\ &= 2.\end{aligned}$$

□

2. Suponga que $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función tal que $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 2$.

*a*) Determine si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$; en el caso afirmativo, determine su valor.

*b*) Determine si existe $\lim_{y\to 1} f(y^2-1)$, de existir, determine su valor.

*c*) Determine si existe $\lim_{z\to 1}\dfrac{f(z^2-1)}{z-1}$, de existir, determine su valor.

*Solución.*

*a*) Dado que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0,$$

y que

$$f(x) = x \cdot \frac{f(x)}{x}$$

para todo $x \neq 0$, por el teorema de límites de funciones localmente iguales y del límite del producto de funciones, se tiene que existe

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

y que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{f(x)}{x} = \left(\lim_{x\to 0} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}\right) = (0)(2) = 0.$$

*b*) Tomando el cambio de variable $x = y^2 - 1$, se tiene que

$$\lim_{y\to 1} x = \lim_{y\to 1} y^2 - 1 = 0.$$

Dado que existe

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

y que $x = y^2 - 1 \neq 0$ para $y \in [0,2] \setminus \{1\}$, por el teorema de cambio de variable para límites, se tiene que existe

$$\lim_{y\to 1} f(y^2 - 1)$$

y

$$\lim_{y\to 1} f(y^2 - 1) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

*c*) Notemos que

$$\frac{f(z^2-1)}{z-1} = (z+1)\frac{f(z^2-1)}{z^2-1}$$

para todo $z \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, por tanto, por el teorema del límite de funciones localmente iguales, basta determinar si existe

$$\lim_{z\to 1} (z+1)\frac{f(z^2-1)}{z^2-1}.$$

Tenemos que

$$\lim_{z\to 1} (z+1) = 2$$

y, utilizando el cambio de variable $x = z^2 - 1$, se tiene que

$$\lim_{z\to 1} z^2 - 1 = 0.$$

Dado que existe

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

y que la función

$$x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

no está definida en 0, por el teorema de cambio de variable para límites, se tiene que existe

$$\lim_{y\to 1} \frac{f(z^2-1)}{z^2-1} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2.$$

Con esto, por el teorema del límite del producto, se tiene que existe

$$\lim_{z\to 1} \frac{f(z^2-1)}{z^2-1}$$

y que

$$\lim_{z\to 1} \frac{f(z^2-1)}{z^2-1} = \lim_{z\to 1}(z+1)\frac{f(z^2-1)}{z^2-1} = \left(\lim_{z\to 1}(z+1)\right)\left(\lim_{z\to 1} \frac{f(z^2-1)}{z^2-1}\right) = (2)(2) = 4. \qquad \square$$

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$-x^2 < 2f(x) - 3 < \frac{x^2}{\operatorname{sen}(2x)}$$

para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Demuestre que existe el límite

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

y calcule su valor.

*Solución.* El saber que son verdaderas las desigualdades

$$-x^2 < 2f(x) - 3 < \frac{x^2}{\operatorname{sen}(2x)}$$

para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, nos sugiere demostrar la existencia del límite

$$\lim_{x\to 0^-} 2f(x) - 3$$

utilizando los teoremas de monotonía de los límites. Para ello, consideremos las funciones

$$\begin{aligned} g_1\colon \left]-\tfrac{\pi}{2}, 0\right[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x^2 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g_2\colon \left]-\tfrac{\pi}{2}, 0\right[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2}{\operatorname{sen}(2x)}. \end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$g_1(x) < 2f(x) - 3 < g_2(x)$$

para todo $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

Por otra parte, como $g_1$ es una función polinomial,

$$\lim_{x\to 0} g_1(x) = g_1(0) = 0.$$

Además, para cada $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, se tiene que

$$g_2(x) = -\frac{x^2}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{x}{2\cos(x)}.$$

Luego, por lo continuidad de las funciones polinomiales, de la función coseno y el teorema del límite del cociente de funciones, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{2\cos(x)} = 0;$$

por tanto, existe el límite lateral izquierdo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{2\cos(x)} = 0.$$

Y, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

se tiene que existe el límite lateral izquierdo y:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1.$$

Finalmente, por el teorema del límite del producto de dos funciones,

$$\lim_{x\to 0^-} g_2(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{x}{2\cos(x)} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, por la monotonía del límite (o por el teorema del Sánduche), existe el

$$\lim_{x\to 0^-} (2f(x) - 3) = 0.$$

Luego, como para cada $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{2}(2f(x) - 3) + \frac{3}{2},$$

por la linealidad de los límites, se deduce que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{3}{2}.$$

□

4. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, se verifica la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0.$$

**Sugerencia**: utilice inducción matemática.

*Solución.* Para aplicar el método de inducción matemática, debemos probar que:

*a*) **Base de la inducción**:la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$$

es verdadera para $n = 1$; es decir, que es verdadera la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

*b*) **Paso inductivo**: si la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^k}\right) = 0$$

es verdadera para todo $k \geq 1$, también es verdadera la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right) = 0.$$

La demostración de la **Base de la inducción**: esa igualdad es verdadera pues se trata simplemente de la igualdad que aparece en la *Proposición 21 del Resumen 3*.

La demostración del **Paso inductivo**: supongamos que para todo $k \geq 1$, se verifica la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^k}\right) = 0;$$

vamos a demostrar que también se verifica la igualdad

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right) = 0.$$

En primer lugar, tenemos que para todo $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x^{k+1}} = \frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{x};$$

luego, puesto que por la base y la hipótesis inductivas, las siguientes igualdades son verdaderas:

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{x^k} \right) = 0,$$

entonces también es verdadera la igualdad

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{x^k} \cdot \frac{1}{x} \right) = 0,$$

gracias a la *Proposición 23*, *numeral 1* del *Resumen No. 3*. En otras palabras, es verdadera la igualdad

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{x^{k+1}} \right) = 0.$$

Otra demostración de la igualdad

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{x^n} \right) = 0$$

tomaría como base el hecho de que

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$ y la *Proposición 23, numeral 3*. Por su puesto, en este caso, la igualdad anterior debería probarse mediante inducción. □

**Escuela Politécnica Nacional**
**Hoja de enunciados**
**Cálculo en una variable • Examen del Primer Bimestre**

Viernes 30 de noviembre de 2018 (100 minutos) Departamento de Formación Básica

## Criterios de calificación

1. No se penalizará la omisión de la cuantificación de variables en ninguna pregunta.
2. La omisión de la notación para indicar la evaluación de una función en un punto (técnicamente, la imagen de un elemento del dominio respecto de la función) se penalizará con 0,3 en el componente de conceptos y cálculos (AC).
3. La omisión o errores en la notación (como los paréntesis para vectores, matrices, las comas entre las componentes de los vectores, etcétera) se penalizará con 0,2 en el componente de conceptos y cálculos (AC).
4. Si una pregunta se responde utilizando un procedimiento diferente del que se señala en el enunciado, el puntaje máximo que se puede obtener en el componente de aplicación de conceptos y cálculos (AC) es el 50 %; no se penalizarán los otros componentes.
5. **El puntaje de cada pregunta es** 2,0 **puntos**, divididos de la siguiente manera: 0,3 de punto por la redacción de todo el ejercicio (R) y 1,7 puntos por el uso correcto de las definiciones y propiedades que contribuyen a la resolución de problema y por la corrección de los cálculos que contribuyen a la resolución del problema (AC). Este último puntaje se distribuye para la pregunta 3 de la siguiente manera: 0,9 de punto para los literales a) y b) en conjunto (es decir, no tiene que decir, necesariamente, que $a = 0$ y que $b = 1$); para el literal c), 0,8 de punto.
6. Respecto de la primera pregunta, las dos alternativas de solución presentadas son igualmente válidas, aunque la segunda sea "más breve".
7. El puntaje de redacción (R) se lo califica de manera transversal a lo largo de todos los literales.

## Soluciones

1. Si $a$ es un número real, calcule

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(a)}{x-a}$$

sin hacer uso de la regla de L'Hopital.

*Solución.* Como el límite del denominador es cero, no podemos aplicar el teorema que dice que el límite de la división, es la división de los límites, si éstos existen. Entonces, definamos la función $f$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \smallsetminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(a)}{x-a} \end{aligned}$$

Como para $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{a\}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(a)}{x-a} \\ &= \frac{(\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a))(\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(a))}{x-a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{a}\right)(\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(a))}{x-a} \\
&= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{2\frac{(x-a)}{2}}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)(\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(a)) \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)(\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(a)).
\end{aligned}$$

Ahora, a $f$ se le puede expresar como el producto de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}\setminus\{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right)\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)(\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(a)).\end{aligned}$$

Así, dado que $h$ es una función continua,

$$\lim_{x\to a} h(x) = h(a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a).$$

Para calcular $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, definamos la función $j$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} j\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-a}{2},\end{aligned}$$

la cual es continua, por ende,

$$\lim_{x\to a} j(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{2}\right) = 0.$$

Con el cambio de variable $y = j(x)$, dado que la función $y \mapsto \dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}$ no está definida en 0, por el Teorema del Cambio de Variable, se tiene que

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y};$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} g(x) &= \lim_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\right) \\
&= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right) \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}^2(x)-\operatorname{sen}^2(a)}{x-a}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to a} \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) (\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(a)) \\
&= \lim_{x\to a} g(x)h(x) \\
&= \lim_{x\to a} g(x) \lim_{x\to a} h(x) \\
&= (2\operatorname{sen}(a)\cos(a)) \\
&= \operatorname{sen}(2a).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(a)}{x-a}.
$$

*Otro Método Alternativo:* Si definimos la función

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \operatorname{sen}^2(x).
\end{aligned}
$$

Dado que $f$ es la multiplicación de la función trigonométrica seno, es derivable y, por regla de la cadena, se tiene que

$$
f'(x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)
$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular,

$$
f'(a) = \operatorname{sen}(2a).
$$

Por otro lado, por definición de derivada

$$
f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(a)}{x-a},
$$

de donde

$$
\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(a)}{x-a} = \operatorname{sen}(2a). \qquad \square
$$

2. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$
\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) \text{ no existe.}
$$

Suponga que $g$ es acotada; es decir, suponga que existe $M > 0$ tal que

$$
|g(x)| \leq M
$$

para todo $x \in A$. Determine si existe o no

$$
\lim_{x\to a} [f(x)g(x)].
$$

En caso de existir, calcule su valor. **Sugerencia**: *utilice el teorema del Sánduche.*

*Solución.* Como $g$ es acotada, existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in A$. Se tiene entonces que, para todo $x \in A$,

$$
|f(x)g(x)| \leq M|f(x)|,
$$

o, equivalentemente,

$$
-M|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq M|f(x)|.
$$

Dado que la función valor absoluto es continua, se tiene que

$$
\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)| = |0| = 0,
$$

de modo que, por las propiedades algebraicas de los límites, se tiene

$$\lim_{x\to a} -M|f(x)| = \lim_{x\to a} M|f(x)| = 0$$

y, por el teorema de sándwich, se concluye que

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$$

existe y su valor es 0. $\square$

3. Dada la ecuación

$$x^3 + 2x^2 - 2 = 0,$$

   *a*) demuestre que tiene una única solución real;

   *b*) si $x_0$ es la solución de la ecuación, determine dos números reales $a$ y $b$ tales que $b - a = 1$ y $x_0 \in [a, b]$; y

   *c*) mediante una aproximación de Taylor lineal centrada en 1 de una función adecuada, encuentre un valor aproximado de la raíz de la ecuación.

*Solución.* Dado que debemos estudiar el comportamiento de la ecuación

$$x^3 + 2x^2 - 2 = 0,$$

esto nos siguiere definir y estudiar la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 + 2x^2 - 2. \end{aligned}$$

Es claro que toda solución de la ecuación es una raíz de $f$ y viceversa.

*a*) Dado que $f$ es una función polinomial, es derivable infinitas veces. Así, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x + 4),$$

de donde

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x < -\dfrac{4}{3} \quad \vee \quad x > 0, \\ f'(x) < 0 & \text{si } -\dfrac{4}{3} < x < 0; \end{cases}$$

luego, $f$ es estrictamente creciente en $\left]-\infty, -\dfrac{4}{3}\right[$ y en $]0, +\infty[$; y $f$ es estrictamente decreciente en $\left]-\dfrac{4}{3}, 0\right[$. Así, $f$ tiene un máximo relativo en $-\dfrac{4}{3}$ y un mínimo relativo en 0. Como

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 2 = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} - 2 = -\frac{52}{27} < 0 \qquad \text{y} \qquad f(0) = -2 < 0.$$

Con estos todos resultados, se asegura que $f$ no tiene raíces en $]-\infty, 0[$. Además, dado que $f$ es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$ y $f(1) = 1$, se asegura que $f$ tiene una única raíz $z$ y por el teorema del valor medio, pues $f$ es continua, se tiene que $x_0 \in [0, 1]$.

*b*) Si $a = 0$ y $b = 1$, entonces la única solución $x_0$ de la ecuación

$$x^3 + 2x^2 - 2 = 0$$

está en $[a, b]$.

*c*) Al calcular la aproximación lineal de $f$, se tiene que para $x$ cerca de 1,

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 + 7(x - 1) = 7x - 6,$$

en particular, dado que $f(z) = 0$, se tiene que

$$0 \approx 7z - 6,$$

de donde

$$z \approx \frac{6}{7}.$$

Por todo esto, la única solución de la ecuación dada es aproximadamente $\frac{6}{7}$. □

4. Se tiene un cultivo de bacterias en forma de un círculo de 10 milímetros de radio que crece a una tasa de 2 milímetros por minuto. Para realizar pruebas con un antibiótico, se coloca a este en el centro del cultivo de bacterias. En el momento de colocar el antibiótico, este elimina una porción circular de bacterias de radio igual a 4 milímetros y continua eliminando una porción de bacterias en forma de círculo cuyo radio crece a una tasa de 3 milímetros por minuto. La cantidad de bacterias, ¿aumenta o disminuye?

*Solución.* Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- $t$: el tiempo en minutos.
- $r(t)$: el radio, en milímetros, de la porción circular de bacterias eliminadas por el antibiótico en el momento $t$ minutos.
- $R(t)$: el radio, en milímetros, del cultivo en el momento $t$ minutos.
- $A(t)$: el área, en milímetros cuadrados, cubierta por cultivo en el momento $t$ minutos.

Con esto, se tiene que

$$r(0) = 4, \qquad R(0) = 10, \qquad \frac{dr}{dt}(0) = 3 \qquad \text{y} \qquad \frac{dR}{dt}(0) = 2.$$

Tenemos que:

$$A(t) = \pi(R(t))^2 - \pi(r(t))^2,$$

de donde, derivando con respecto a $t$, obtenemos

$$\frac{dA}{dt}(t) = 2\pi R(t)\frac{dR}{dt}(t) - 2\pi r(t)\frac{dr}{dt}(t).$$

Evaluando en $t = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt}(0) &= 2\pi R(0)\frac{dR}{dt}(0) - 2\pi r(0)\frac{dr}{dt}(0)\\ &= 2\pi(10)(2) - 2\pi(4)(3)\\ &= 14\pi > 0\end{aligned}$$

Así, la razón de cambio del área ocupada por el cultivo es mayor que 0; por tanto, la cantidad de bacterias aumenta. □

5. Si se gira un rectángulo alrededor de uno de sus lados, se genera un cilindro circular recto. Si se conoce que el perímetro de un rectángulo es $P$, calcule las dimensiones que éste debería tener (en función de $P$) de manera que el cilindro obtenido sea el de mayor área.

*Solución.* Primero utilicemos las siguientes notaciones (las unidades están dadas en metros o metros cuadrados):

- $h$: la altura del rectángulo.
- $b$: la base del rectángulo.

- $P$: perímetro del rectángulo.
- $A$: área del cilindro.

Con esto se tiene que

$$P = 2(b+h),$$

de donde

$$h = \frac{P}{2} - b.$$

Supongamos que hacemos rotar al rectángulo respecto a uno de los lados que mide $h$. Así, el área del cilindro formada por esta rotación es (el círculo generado tiene como radio $b$ y, por tanto, su perímetro es $2\pi b$):

$$A = 2\pi bh = 2\pi b\left(\frac{P}{2} - b\right).$$

Así, para responder a la pregunta, vamos a "maximizar" la función

$$\begin{aligned} f: \left[0, \frac{P}{2}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2\pi x\left(\frac{P}{2} - x\right), \end{aligned}$$

donde $x$ es la medida de la base del rectángulo. Esta función representa el área del cilindro sin considerar las "tapas".

La derivada de $f$ en todo $x$ en el interior de su dominio es

$$f'(x) = P\pi - 4\pi x;$$

luego el número $\frac{P}{4}$ es un punto crítico de $f$ y, como

$$f''\left(\frac{P}{4}\right) = -4\pi < 0,$$

entonces $f$ alcanza un máximo relativo en $\frac{P}{4}$. Finalmente, dado que

$$f(0) = 0, \qquad f\left(\frac{P}{4}\right) = \frac{\pi P^2}{8} \qquad \text{y} \qquad f\left(\frac{P}{2}\right) = 0,$$

se tiene que $f$ alcanza el máximo absoluto en $\frac{P}{4}$ y ese máximo es

$$f\left(\frac{P}{4}\right) = \frac{\pi}{8}P^2.$$

Como $h = \frac{P}{2} - b$, la base y la altura del rectángulo (para que el cilindro obtenido tenga área máxima, sin considerar las "tapas") son iguales entre sí e iguales a $\frac{P}{4}$. □

1. Considere la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x - x^2. \end{aligned}$$

   *a*) Demuestre, mediante la definición, que $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$.

   *b*) Utilizando el literal anterior, determine un valor de $\delta > 0$ tal que

$$|2x - x^2| < \frac{1}{2}$$

   para todo $x \in \,]2 - \delta, 2 + \delta[$.

*Solución.*

*a*) Sea $\epsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |2x - x^2| < \epsilon.$$

Notemos que para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$|2x - x^2| = |x||x - 2|.$$

Ahora bien, para $\delta_1 = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \delta_1 &\implies |x - 2| < 1 \\ &\iff 1 < x < 3 \\ &\implies |x| < 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 < |x - 2| < \delta_1 &\implies |x||x - 2| < 3|x - 2| \\ &\iff |2x - x^2| < 3|x - 2|. \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que si

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad \delta \leq 1,$$

se tiene que

$$0 < |x - 2| < \delta \implies \quad |2x - x^2| < 3|x - 2| \leq 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

En resumen tomando

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{3}\right\},$$

se tiene que

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |2x - x^2| < \epsilon.$$

*b*) Por el literal anterior, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\delta = \min\left\{1, \frac{1/2}{3}\right\} = \frac{1}{6}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$0 < |x - 2| < \frac{1}{6} \implies |2x - x^2| < \frac{1}{2}$$

lo que es equivalente a

$$x \in \left]2 - \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{6}\right[ \setminus \{2\} \Longrightarrow |2x - x^2| < \frac{1}{2}.$$

En particular,

$$|2x - x^2| < \frac{1}{2}$$

para todo $x \in ]2 - \delta, 2 + \delta[$, con $\delta = \dfrac{1}{6}$. □

2. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon [-2,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x - 2. \end{aligned}$$

   *a*) Dada una partición uniforme de orden $n$ con etiquetas a la derecha, determine la suma de Riemann de la función $f$ con respecto a esta partición y estas etiquetas. *Recuerde* que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

   *b*) Utilizando el literal anterior, determine el valor de

$$\int_{-2}^{4} f(x)\, dx,$$

   tomando el límite cuando el grosor de la partición tiende a 0, de las sumas de Riemann de $f$.

   *c*) Verifique el valor encontrado en el literal anterior utilizando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

*Solución.*

*a*) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, definamos

$$\Delta x = \frac{4+2}{n} = \frac{6}{n} \qquad \text{y} \qquad x_k = -2 + k\Delta x = -2 + \frac{6k}{n},$$

para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Sea la partición uniforme de orden $n$ del intervalo $[-2, 4]$ es

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.$$

Además, las etiquetas a la derecha es

$$C = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S(f, P, C) &= \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \cdots + \Delta x f(x_n) \\ &= \Delta x \left(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right) \\ &= \Delta x \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \\ &= \Delta x \sum_{k=1}^{n} (3x_k - 2) \\ &= \Delta x \sum_{k=1}^{n} \left(-6 + 18\frac{k}{n} - 2\right) \\ &= \Delta x \sum_{k=1}^{n} \left(18\frac{k}{n} - 8\right) \\ &= \Delta x \left(9(n+1) - 8n\right) \end{aligned}$$

$$= \Delta x\,(n+9)\,.$$

Se tiene que

$$S(f,P,C) = \Delta x\,(n+9) = \frac{6(n+9)}{n}.$$

*b*) Por el literal anterior, si $\Delta P = \dfrac{6}{n}$ tiende a 0, entonces $n \to +\infty$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{4} f(x)\,dx &= \lim_{\Delta P \to 0} S(f,P,C) \\
&= \lim_{n\to+\infty} S(f,P,C) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{6(n+9)}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{54}{n}\right) \\
&= 6
\end{aligned}$$

dado que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$

*c*) Como la función $f$ es continua, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo se tiene

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx = F(4) - F(-2),$$

donde $F$ es una primitiva de $f$. En particular para

$$\begin{aligned}
F\colon [-2,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{3x^2}{2} - 2x,
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\int_{-2}^{4} f(x)dx = F(4) - F(-2) = 10 - 4 = 6.$$

Se obtiene el mismo resultado evidentemente. □

3. Sea la función

$$\begin{aligned}
f\colon ]2,+\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \int_{3}^{x} \frac{2t}{1-t^2}dt.
\end{aligned}$$

*a*) Encuentre el valor de $f'(x)$ y $f''(x)$ para todo $x > 2$.

*b*) Determine el valor de $f(3)$, $f'(3)$ y $f''(3)$.

*c*) Determine la aproximación cuadrática de $f$ alrededor de 3.

*Solución.*

*a*) Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, dado que la función

$$t \mapsto \frac{2t}{1-t^2}$$

es continua para todo $t > 2$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

para todo $x > 2$. Luego, dado que los polinomios son derviables y el denominador no se anula, se tiene que

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(1-x^2)+2x(2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

para todo $x > 2$.

*b*) Por definición de $f$,

$$f(3) = \int_3^3 \frac{2t}{1-t^2} dt = 0.$$

Por el literal anterior,

$$f'(3) = \frac{2(3)}{1-9} = -\frac{3}{4}$$

y

$$f''(3) = \frac{2+2(9)}{(1-9)^2} = \frac{5}{16}.$$

*c*) Como $f$ es dos veces derivable, su aproximación cuadrática existe. Además, se tiene que para $x$ cercanos a 3,

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(3)(x-3)^2}{2} \\ &= -\frac{3}{4}(x-3) + \frac{5(x-3)^2}{32} \end{aligned}$$

□

4. Calcular las siguientes integrales

*a*) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}} dx.$

*b*) $\displaystyle\int x^2 \cos(2x)\, dx.$

*Solución.*

*a*) Considerando el cambio de variable $u = 2 + \operatorname{sen}(x)$, se tiene que $du = \cos(x)dx$ y

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)}} dx &= \int \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{u^{1/2}}{1/2} + C \\ &= 2\sqrt{2+\operatorname{sen}(x)} + C \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$.

*b*) Mediante el método de integración con partes con $u = x^2$ y $dv = \cos(2x)dx$, se tiene que $du = 2xdx$ y $v = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$, de donde

$$\int x^2 \cos(2x)\, dx = \frac{x^2 \operatorname{sen}(2x)}{2} - \int x \operatorname{sen}(2x) dx.$$

Nuevamente por el método de integración por partes con $u = x$ y $dv = \text{sen}(2x)dx$, se tiene que $du = dx$ y $v = -\dfrac{\cos(2x)}{2}$, de donde

$$\begin{aligned}\int x\,\text{sen}(2x)dx &= -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx \\ &= -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\text{sen}(2x)}{4} + C\end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$. Por todo esto, se tiene que

$$\int x^2 \cos(2x)\, dx = \frac{x^2\,\text{sen}(2x)}{2} + \frac{x\cos(2x)}{2} - \frac{\text{sen}(2x)}{4} + C$$

con $C \in \mathbb{R}$. $\square$

1. Considere la función

$$\begin{aligned} f : ]0, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_{\pi}^{2x} \frac{\cos(\theta)}{\theta}\, d\theta. \end{aligned}$$

   *a*) Encuentre el valor de $f'(x)$ y $f''(x)$ para todo $x > 0$.
   *b*) Determine el valor de $f(\pi/2)$, $f'(\pi/2)$.
   *c*) Alrededor de $\pi/2$, determine la monotonía de la función.

*Solución.*

*a*) Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, dado que la función

$$\theta \mapsto \frac{\cos(\theta)}{\theta}$$

es continua para todo $\theta > 0$, se tiene que

$$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{2x}(2x)' = \frac{\cos(2x)}{x}$$

para todo $x > 0$. Luego, dado que las funciones polinómicas y trigonométricas son derivables y el denominador no se anula, se tiene que

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\operatorname{sen}(2x)(2)(x) - \cos(2x)(1)}{(2x)^2} \\ &= \frac{-2x\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)}{x^2} \end{aligned}$$

para todo $x > 0$.

*b*) Tenemos que

$$f(\pi/2) = \int_{\pi}^{2(\pi/2)} \frac{\cos(\theta)}{\theta}\, d\theta = \int_{\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{\theta}\, d\theta = 0,$$

además

$$f'(\pi/2) = \frac{\cos(2(\pi/2))}{\pi/2} = \frac{\cos(\pi)}{\pi/2} = -\frac{2}{\pi}.$$

*c*) Dado que $f'(\pi/2) < 0$, se tiene que alrededor de $\pi/2$ la función $f$ es decreciente. □

2. Realizar los siguientes ejercicios:

   *a*) Utilizando un cambio de variable de integrales definidas, calcular

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5(x)\, dx.$$

   *b*) Recordando que

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)}\, du = \ln(\cot(u) + \csc(u)) + c \qquad \text{y} \qquad \int \frac{1}{\cos(u)}\, du = \ln(\tan(u) + \sec(u)) + c$$

   con $c \in \mathbb{R}$, determinar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\, dx$.

*Solución.*

*a*) Notemos que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\cos(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2(x))^2\cos(x)\,dx,$$

con esto, tomemos el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen}(x) \qquad \text{y} \qquad du = \cos(x)\,dx,$$

con lo cual, tenemos

| $x$ | $u$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $\pi/2$ | $1$ |

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \cos^5(x)\,dx &= \int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2(x))^2\cos(x)\,dx\\ &= \int_0^1 (1-u^2)^2\,du\\ &= \int_0^1 (1-2u^2+u^4)\,du\\ &= \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

*b*) Tomemos el cambio de variable

$$x = \operatorname{sen}(u) \qquad \text{y} \qquad dx = \cos(u)\,du,$$

con lo cual, tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(u)}}{\operatorname{sen}(u)}\cos(u)\,du\\ &= \int \frac{\cos^2(u)}{\operatorname{sen}(u)}\,du\\ &= \int \frac{1-\operatorname{sen}^2(u)}{\operatorname{sen}(u)}\,du\\ &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)} - \operatorname{sen}(u)\,du\\ &= \int \frac{1}{\operatorname{sen}(u)}\,du - \int \operatorname{sen}(u)\,du\\ &= \ln\left(\cot(u)+\csc(u)\right) + \cos(u) + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Regresando a la variable original, tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx &= \ln\left(\cot(\operatorname{arc\,sen}(x)) + \csc(\operatorname{arc\,sen}(x))\right) + \cos(\operatorname{arc\,sen}(x)) + c\\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right) + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Otra manera de calcular esta integral, tomemos el cambio de variable

$$x = \cos(u) \qquad \text{y} \qquad dx = -\operatorname{sen}(u)\,du,$$

con lo cual, tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx &= -\int \frac{\sqrt{1-\cos^2(u)}}{\cos(u)}\operatorname{sen}(u)\,du\\ &= -\int \frac{\operatorname{sen}^2(u)}{\cos(u)}\,du\\ &= -\int \frac{1-\cos^2(u)}{\cos(u)}\,du\\ &= -\int \frac{1}{\cos(u)}-\cos(u)\,du\\ &= -\int \frac{1}{\cos(u)}\,du+\int \cos(u)\,du\\ &= -\ln\left(\tan(u)+\sec(u)\right)+\operatorname{sen}(u)+c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Regresando a la variable original, tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx &= -\ln\left(\tan(\arccos(x))+\sec(\arccos(x))\right)+\operatorname{sen}(\arccos(x))+c\\ &= -\ln\left(\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}\right)+\sqrt{1-x^2}+c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$. □

3. Sean las funciones

$$\begin{aligned} f\colon ]-\infty,0] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2e^x \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,+\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2-\frac{x^2}{4}. \end{aligned}$$

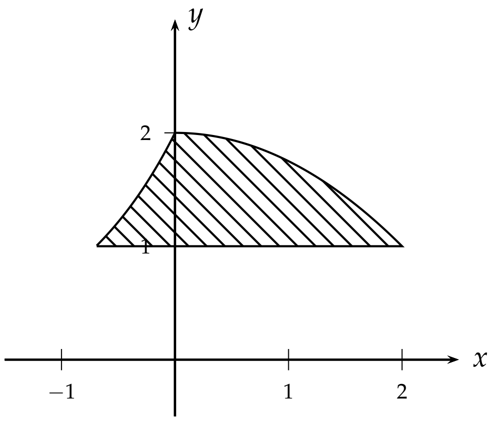
Sea $S$ acotada por las gráficas de $f$, $g$ y la recta de ecuación $y=1$.

*a*) Realice una gráfica donde se identifique a la región $S$.

*b*) Plantee una integral en la variable $x$ que calcule el valor del área de $S$.

*c*) Plantee una integral en la variable $y$ que calcule el valor del área de $S$.

*Solución.*




Como se observa en la figura y por cálculo directo, se tiene que los puntos de intersección son $(-\ln(2),1)$, $(0,2)$ y $(2,1)$. Sea $A$ el área de la región $S$. Por lo tanto, para calcular el área de la región, utilizando rectángulos verticales, es

$$A=\int_{-\ln(2)}^{0}(2e^x-1)\,dx+\int_0^2\left(2-\frac{x^2}{4}\right)-1\,dx=\int_{-\ln(2)}^{0}(2e^x-1)\,dx+\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\,dx.$$

Además, como

$$y = 2e^x \iff x = \ln\left(\frac{y}{2}\right)$$

y, para $x \geq 0$,

$$y = 2 - \frac{x^2}{4} \iff x = 2\sqrt{2-y}.$$

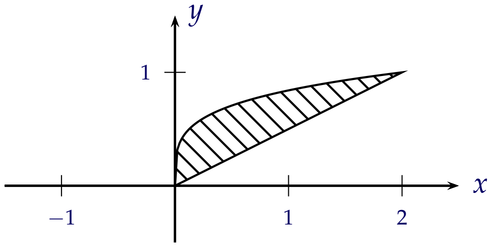
Por esto, se tiene que el área, mediante la aproximación de rectángulos horizontales es

$$A = \int_1^2 \left(2\sqrt{2-y} - \ln\left(\frac{y}{2}\right)\right)\, dy. \qquad \square$$

4. Considere la región delimitada por las curvas de ecuación

$$x - 2y^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad x - 2y = 0,$$

la cual se ilustra a continuación:




Sea $V$ el volumen del sólido generado al rotar esta región en torno al eje de ecuación $x = -1$.

*a*) Plantee una integral en la variable $x$ que calcule el valor de $V$ (método de capas cilíndricas).

*b*) Plantee una integral en la variable $y$ que calcule el valor de $V$ (método de las arandelas).

*c*) Calcule una de las integrales anteriores para determinar el volumen $V$.

*Solución.*

*a*) Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} f\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{\frac{x}{2}} \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} g\colon [0,2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 2\pi(x+1)(f(x) - g(x))\, dx \\ &= 2\pi \int_0^2 (x+1)\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}\right)\, dx. \end{aligned}$$

*b*) Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} \phi\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto 2y^2 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \psi\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto 2y. \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\left((\psi(y)+1)^2 - (\phi(y)+1)^2\right)\, dy \\ &= \pi \int_0^1 \left((2y+1)^2 - (2y^2+1)^2\right)\, dy. \end{aligned}$$

*c*) Calculando la primera integral, tenemos que

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^2 (x+1)\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}\right)\, dx \\
&= 2\pi \int_0^2 \left(\frac{x^{1/2}}{\sqrt{2}} - \frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\, dx \\
&= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2} + \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2\right)\Bigg|_0^2 \\
&= 2\pi\frac{3}{5} = \frac{6\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Para la segunda integral, tenemos que

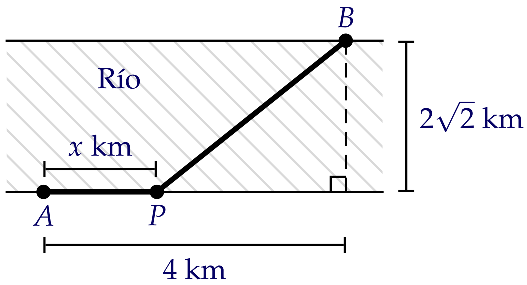
$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 \left((2y+1)^2 - (2y^2+1)^2\right)\, dy \\
&= \pi \int_0^1 \left(4y - 4y^4\right)\, dy \\
&= \pi \left(2y^2 - \frac{4}{5}y^5\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \pi\frac{6}{5} = \frac{6\pi}{5}.
\end{aligned}$$

□

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**
**HOJA DE ENUNCIADOS**
**CÁLCULO EN UNA VARIABLE • EXAMEN FINAL**

Jueves 21 de febrero de 2019 (120 minutos) Departamento de Formación Básica

1. En el siguiente gráfico, se ilustra un río con sus dos orillas:




Suponga que está ubicado en el punto $A$ y desea llegar al punto $B$, realizando parte del trayecto en auto por la orilla y parte del trayecto en bote por el río. Por cada kilómetro recorrido en auto se consume 1 dolar de combustible mientras que por cada kilómetro recorrido en bote se consume 3 dólares.

*a*) Plantee una función que describa el costo de realizar el trayecto completo en función de la distancia del punto $A$ al punto $P$.

*b*) Determine el punto donde debe cambiarse de carro a bote, para que el costo sea mínimo.

*c*) Determine el costo de realizar el trayecto obtenido en el literal b).

*Solución.*

*a*) Si denotamos por

- $x$: la distancia entre el punto $A$ y el punto $P$, en kilómetros.
- $C(x)$: el costo de realizar el trayecto completo en función de $x$, en dólares.

Con esto, la función de costo está dada por

$$\begin{aligned} C : [0,4] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x + 3\sqrt{(4-x)^2+8}. \end{aligned}$$

*b*) Para determinar el punto donde se debe cambiar de carro a bote, optimicemos la función. Tenemos que

$$C'(x) = 1 - \frac{3(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+24}}$$

para $x \in [0,4]$. Determinemos los puntos críticos igualando la derivada a 0, se tiene que

$$\begin{aligned} C'(x) = 0 &\iff 1 + \frac{3(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+24}} = 0 \\ &\iff \sqrt{x^2-8x+24} = 3(4-x) \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

Evaluando la función en sus extremos en el el punto crítico obtenemos

| $x$ | $C(x)$ |
|---|---|
| 0 | $6\sqrt{6} \approx 14{,}7$ |
| 3 | 12 |
| 4 | $4 + 6\sqrt{2} \approx 12{,}5$ |

Como el dominio de la función es un conjunto cerrado y acotado; y la función es continua, se sigue que el mínimo se alcanza en $x = 3$.

*c*) El costo de realizar el trayecto obtenido en el anterior literal es

$$C(3) = 12.$$

Por lo tanto, el costo del trayecto, para $x = 3$, es de 12 dólares. □

2. Sea $S$ la región acotada, limitada por las gráficas de las curvas definidas por

$$y^2 = 4y - x \qquad \text{y} \qquad x - y = 0.$$

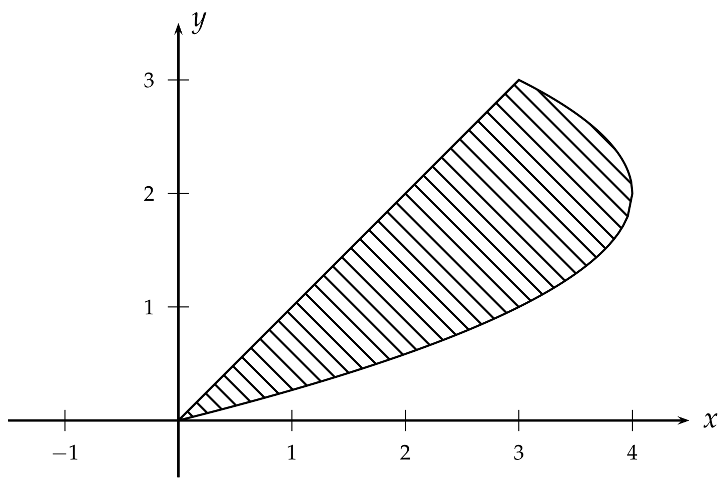
*a*) Realice un gráfico adecuado en el que se muestre claramente la región $S$.

*b*) Calcule el área de $S$.

*c*) Plantee la integral cuyo valor numérico es igual a el volumen generado al rotar la región $S$ al rededor de $x = 4$. Indique claramente el método utilizado.

*d*) Plantee la integral cuyo valor numérico es igual a el volumen generado al rotar la región $S$ al rededor de $y = 4$. Indique claramente el método utilizado.

*Solución.* Dado que la ecuación $y^2 = 4y - x$ tiene por representación a una parábola de vértice en $(4, 2)$ que se abre hacía la izquierda, la región $S$ está representada por el siguiente gráfico:




Por lo tanto, se tiene que el ancho de la región $S$ está dada por

$$a(y) = (4y - y^2) - (y) = 3y - y^2$$

para cada $y \in [0, 3]$. Si $A$ es el área de la región $S$, entonces

$$A = \int_0^3 a(y)dy = \int_0^3 (3y - y^2)dy = \frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3} = 9/2.$$

Por otra parte, **mediante el método de discos**, se tiene que el volumen formado al hacer rotar la región $S$ al rededor del eje $x = 4$ es

$$\pi \int_0^3 (4 - y)^2 - (4 - (4y - y^2))^2 \, dy = \pi \int_0^3 ((4 - y)^2 - (4 - 4y + y^2)^2) \, dy.$$

Finalmente, **mediante el método de capas cilíndricas**, se tiene que el volumen formado al hacer rotar la región $S$ al rededor del eje $y = 4$ es

$$2\pi \int_0^3 ((4 - y)((4y - y^2) - (y)) \, dy = 2\pi \int_0^3 (4 - y)(3y - y^2) \, dy.$$ □

3. Considere que las funciones derivables

$$v\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad m\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{y} \qquad E\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

modelan la velocidad (en metros por segundo), la masa (en kilogramos) y la energía cinética (en julios) de un cuerpo, respectivamente, en función del tiempo (en segundos). Suponga que

$$m(t) = \int_0^t \exp(x^2)\,dx \qquad \text{y} \qquad E(t) = \frac{1}{2}m(t)(v(t))^2$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

*a*) Utilizando el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, determine $m'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

*b*) Determine $m'(1)$, ¿la masa del cuerpo aumenta o disminuye en el tiempo $t = 1$?

*c*) Utilizando derivación implícita, determine $v'(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, en función de $E$, $m$ y $v$.

*d*) En el tiempo $t = 1$, se sabe que la velocidad del cuerpo es de 1 metro por segundo, además, la masa es de aproximadamente 1,5 kilogramos y su energía cinética disminuye a razón de 1 julio por segundo, determine si la velocidad crece o decrece (recuerde que $e \approx 2{,}7$).

*Solución.*

*a*) Dado que la función $x \mapsto \exp(x^2)$ es continua, por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo se tiene que

$$m'(t) = \exp(t^2)$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

*b*) Evaluando $m'$ en 1 tenemos que

$$m'(1) = \exp(1^2) = \exp(1) = e.$$

Dado que $m'(1) > 0$, la masa del cuerpo aumenta.

*c*) Derivando implícitamente, se tiene que

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left(m'(t)(v(t))^2 + 2m(t)v(t)v'(t)\right)$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$, de donde

$$v'(t) = \frac{2E'(t) - m'(t)(v(t))^2}{2m(t)v(t)}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

*d*) Por el enunciado, sabemos que

$$v(1) = 1, \qquad m(1) = 1{,}5 \qquad \text{y} \qquad E'(1) = -1,$$

por lo tanto, tenemos que

$$v'(1) = \frac{2E'(1) - m'(1)(v(1))^2}{2m(1)v(1)} \approx \frac{2(1) - (e)(1)^2}{2(1{,}5)(1)} = \frac{-2-e}{3} \approx \frac{-4{,}7}{3}.$$

Como $v'(1) < 0$, se tiene que la velocidad decrece. □

4. Considere la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{3/2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x-1}{2x-3}. \end{aligned}$$

*a*) Calcule el valor de $\lim_{x \to 2} f(x)$.

*b*) Demuestre, mediante la definición, el resultado del literal anterior.

c) Utilizando el literal b), determine un valor de $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{x-2}{2x-3}\right| < 1/5$$

para todo $x \in ]2-\delta, 2+\delta[$.

*Solución.*

a) Dado que las funciones polinomiales son continuas, $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3) = 1 \neq 0$, por el límite del cociente, se tiene que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x-2)} = 1.$$

b) Ahora, probemos, mediante definición, que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 1.$$

Sea $\epsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ tal que para todo $x \neq 3/2$,

$$0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow |f(x)-1| < \epsilon.$$

Notemos que para cada $x \neq 3/2$, se verifica que

$$\begin{aligned}
|f(x)-1| &= \left|\frac{x-1}{2x-3} - 1\right| \\
&= \left|\frac{2-x}{2x-3}\right| \\
&= \frac{|x-2|}{|2x-3|}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que no podemos alejarnos mucho de 2, puesto que $3/2 \notin \operatorname{dom}(f)$, debemos tomar $\delta_1 < 2 - 3/2 = 1/2$. Para $\delta_1 = 1/4$, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 < |x-2| < \delta_1 &\Longrightarrow |x-2| < 1/4 \\
&\Longleftrightarrow 7/4 < x < 9/4 \\
&\Longleftrightarrow 7/2 - 3 < 2x - 3 < 9/2 - 3 \\
&\Longleftrightarrow 1/2 < 2x - 3 < 3/2 \\
&\Longrightarrow 1/2 < |2x-3| < 3/2 \\
&\Longleftrightarrow 2/3 < \frac{1}{|2x-3|} < 2 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{|2x-3|} < 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
0 < |x-2| < \delta_1 &\Longrightarrow \frac{|x-2|}{|2x-3|} < 2|x-2| \\
&\Longleftrightarrow |f(x)-1| < 2|x-2|.
\end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que si

$$\delta \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \delta \leq 1/4,$$

se tiene que

$$0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow \quad |f(x)-1| < 2|x-2| \leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

En resumen tomando

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{\epsilon}{2}\right\},$$

se tiene que

$$0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow |f(x)-1| < \epsilon.$$

c) Por el literal anterior, para $\epsilon = \dfrac{1}{5}$, se tiene que

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{4}, \frac{1/5}{2}\right\} = \frac{1}{10}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$0 < |x-2| < \frac{1}{4} \Longrightarrow |f(x)-1| < \frac{1}{2}$$

lo que es equivalente a

$$x \in \left]2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right[ \smallsetminus \{2\} \Longrightarrow \left|\frac{x-2}{2x-3}\right| < \frac{1}{2}.$$

En particular,

$$\left|\frac{x-2}{2x-3}\right| < \frac{1}{2}$$

para todo $x \in ]2-\delta, 2+\delta[$, con $\delta = \dfrac{1}{4}$. □

5. Para $a, b \in \mathbb{R}$, se define la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{ax^2}{x-1} & \text{si } x < -1, \\ 1 & \text{si } x = -1, \\ b\sqrt{x^2+2} - 2ae^{x+1} & \text{si } x > -1. \end{cases} \end{aligned}$$

a) Determine los límites laterales de $f$ en $-1$.
b) ¿Para qué valores de $a$ y $b$ se tiene que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe?, determine el valor del límite en función de $b$.
c) ¿Para qué valores de $a$ y $b$ se tiene que la función es continua en $-1$?
d) Si $a = 0$ y $b = 2$, ¿se tiene que $f$ es derivable en $-1$?

*Solución.*

a) Vamos a determinar

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

Dado que $f(x) = \dfrac{ax^2}{x-3}$ para todo $x < -1$, se tiene que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{ax^2}{x-1} = \frac{a(-1)^2}{(-1)-1} = -\frac{a}{2},$$

pues la función en la que se calcula el límite es continua en $-1$. Por otro lado, dado que $f(x) = b\sqrt{x^2+2} - 2ae^{x+1}$ para todo $x > -1$, se tiene que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}\left(b\sqrt{x^2+2} - 2ae^{x+1}\right) = b\sqrt{(-1)^2+2} - 2ae^{(-1)+1} = \sqrt{3}b - 2a,$$

pues la función en la que se calcula el límite es continua en $-1$.

*b*) Para que el límite exista es suficiente que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x),$$

por lo tanto, se necesita que

$$-\frac{a}{2} = \sqrt{3}b - 2a,$$

es decir $3a = 2\sqrt{3}b$, de donde, el límite existe para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $3a = 2\sqrt{3}b$. Con esto, el valor del límite es

$$\lim_{x\to -1} f(x) = -\frac{a}{2} = -\frac{b}{\sqrt{3}}.$$

*c*) Para que sea continua en $-1$, es suficiente que el límite exista en $-1$ y que su valor sea igual a $f(-1)$, por lo tanto, necesitamos que

$$3a = 2\sqrt{3}b$$

y

$$1 = f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x) = -\frac{b}{\sqrt{3}},$$

de donde, $b = -\sqrt{3}$ y $a = -2$.

*d*) Para $a = 0$ y $b = 2$, se tiene que $f$ no es continua en $-1$, por lo tanto, no es puede ser derivable. $\square$