Clase 2018/10/05

jueves, 4 de octubre de 2018 16:57

1. FUNCIONES

DEFINICIÓN 1: Función

Dados A y B dos conjuntos, f es una **función de A en B** *si:*

- $f \subseteq A \times B$;
- *para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$; y*
- *si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$, entonces $y = z$.*

Si f es una función de A en B, escribirá $f\colon A \to B$. Y, en lugar de $(x, y) \in f$, escribiremos $f(x) = y$, ya que dado x, y es único.

Ej $A = \{a, b, c\}$

$B = \{0, 1, 2, 3\}$

$f = \{(a, 0), (b, 2), (c, 2)\}$

$f\colon A \to B$

$f(a) = 0 \quad f(b) = 2 \quad f(c) = 2$

Ej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

No $f(x) = x^2$ ✗

x^2 ✗

✗ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ✗

DEFINICIÓN 2: Dominio

Dada $f: A \to B$ el conjunto A se llama ***dominio*** *de f y se le representa por* $\mathrm{dom}(f)$.

DEFINICIÓN 3: Imagen o recorrido

Dada una función $f: A \to B$, la ***imagen*** *o el* ***recorrido*** *de f es el conjunto*

$$\{f(x) : x \in A\},$$

que se lo representa por

$$\mathrm{img}(f) \quad o \quad \mathrm{rec}(f).$$

Ej $f\ [0,3] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 1-2x$

¿cómo encontrar la imagen?

$$img(f) = \{ f(x) \ \ x \in [0,3] \}$$

Tomemos $y \in img(f)$

$$y = f(x) = 1-2x$$

$x \in [0,3]$

Tenemos

$$0 \le x \le 3 \iff -6 \le -2x \le 0$$

$$\iff -5 \le 1-2x \le 1$$

$$\iff -5 \le y \le 1$$

Entonces $y \in [-5,1]$, como todos los pasos son equivalentes

$$img(f) = [-5,1]$$

DEFINICIÓN 4: Restricción de una función

*Dada una función $f: A \to B$ y un conjunto $C \subseteq A$, la **restricción de** f **a** C, denotada por $f|_C$, es la función*

$$\begin{aligned} f|_C: C &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\qquad$ $f|_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \ x > 0\}$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

DEFINICIÓN 5: Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Una función $f: A \to B$ es:

- ***inyectiva** si para todo $u, v \in A$ tales que $f(u) = f(v)$, se tiene que $u = v$;*
- ***sobreyectiva** si para todo $v \in B$, existe $u \in A$ tal que $f(u) = v$;*
- ***biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.*

PROPOSICIÓN 1 (Sobreyectiva). Una función $f: A \to B$ es sobreyectiva si y solo si $\text{img}(f) = B$.

Ej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - 3x$

¿es inyectiva?

Tomemos $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = f(b)$

$f(a) = f(b) \iff 1 - 3a = 1 - 3b$

$\iff -3a = -3b$

$\iff a = b$

Ej: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$

¿es inyectiva?

Tomemos $u, v \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = f(v)$

Tomemos $u, v \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = f(v)$

$f(u) = f(v) \iff u^2 + 1 = v^2 + 1$

$\iff u^2 = v^2$

$\iff |u| = |v|$

Tomemos $u = 1$, $v = -1$, tenemos

$f(u) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(v) = f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

Entonces $f(u) = f(v)$

pero $u \neq v$

DEFINICIÓN 6: Composición de funciones

Dadas las funciones $f: A \to B$ *y* $g: B \to C$, *la función*

$$g \circ f: A \longrightarrow C$$
$$x \longmapsto g(f(x))$$

se denomina ***composición de*** g ***y*** f.

Ej $f: [-1, 0] \to [-2, 0]$

$x \mapsto 2x$

$g: [-2, 0] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$f \circ g$ ✗ $g \circ f$ ✓

$g \circ f: [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto g(f(x)) = g(2x)$

$= (2x)^2$

$= (2x)^2$

$= 4x^2$

DEFINICIÓN 7: Función invertible y función inversa

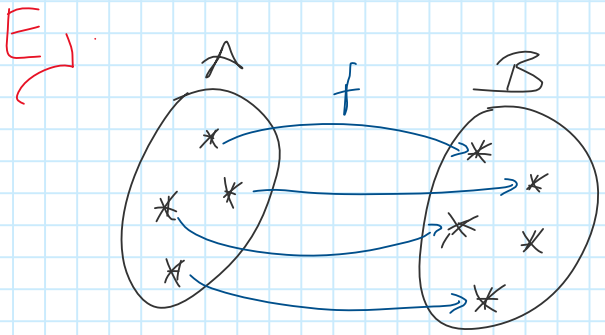
*Una función $f: A \to B$ es **invertible** si existe una única función $g: B \to A$ tal que para todo $u \in A$ y $v \in B$, se tiene que*

$$v = f(u) \equiv u = g(v)$$

*A esta función se la llama **función inversa de** f y se la denota por f^{-1}. Por tanto, $f^{-1}: B \to A$ es tal que*

$$v = f(u) \equiv u = f^{-1}(v)$$

para todo $u \in B$ y todo $v \in A$.



PROPOSICIÓN 2. Dada una función $f: A \to B$ invertible, se tiene que

$$f(f^{-1}(v)) = v \qquad \text{y} \qquad f^{-1}(f(u)) = u$$

para todo $u \in A$ y todo $v \in B$.

PROPOSICIÓN 3 (Inversa). Una función $f: A \to B$ es invertible si y solo si f es biyectiva.

DEFINICIÓN 8: Función creciente, decreciente y monótona

Dada la función $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y el conjunto $I \subseteq A$, f es:

- ***creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \leq f(v)$;*
- ***estrictamente creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$,*

DEFINICIÓN 8: Función creciente, decreciente y monótona

Dada la función $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y el conjunto $I \subseteq A$, f es:

- ***creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \leq f(v)$;*
- ***estrictamente creciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) < f(v)$;*
- ***decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u \leq v$, se tiene que $f(u) \geq f(v)$;*
- ***estrictamente decreciente en** I si para todo $u, v \in I$ tales que $u < v$, se tiene que $f(u) > f(v)$; y*
- ***monótona en** I si es creciente o decreciente en I.*

$f \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x$

$g \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto -2$

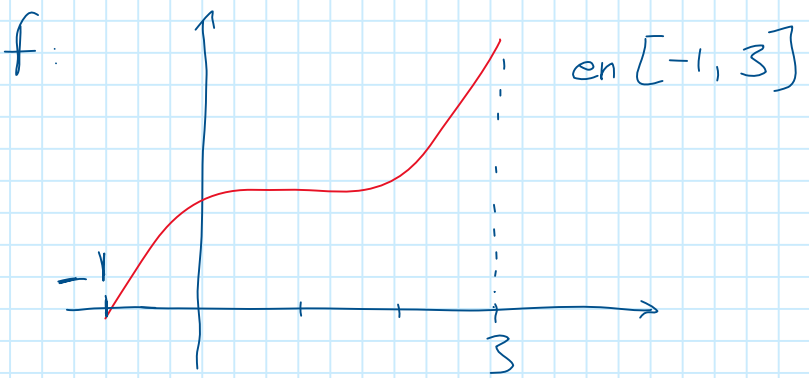
$u \leq v \qquad f(u) = -2 \qquad f(u) \leq f(v)$

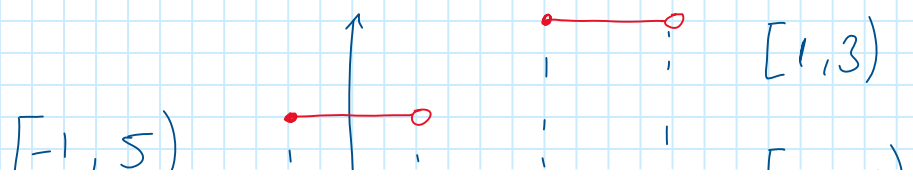
$f(v) = -2$

$f \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

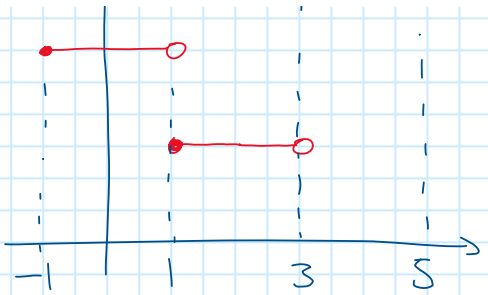
$x \longmapsto x^2$

en $[0,1]$





$[-1, 5)$



$[1, 5)$

$[-1, 3)$

DEFINICIÓN 9: Conjunto simétrico

*Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es **simétrico** si para todo $x \in A$, se tiene que $-x \in A$.*

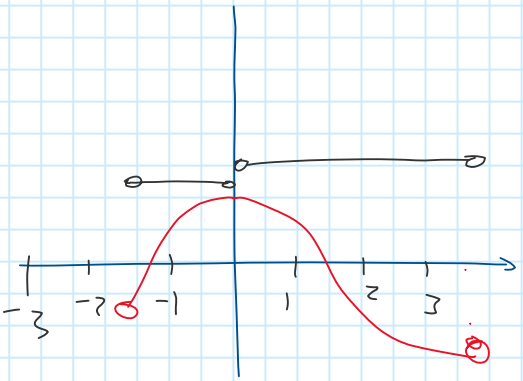
DEFINICIÓN 10: Función par e impar

Una función $f : A \to \mathbb{R}$, con A un conjunto simétrico, es:

- ***par** si para todo $x \in A$, se tiene que $f(x) = f(-x)$;*
- ***impar** si para todo $x \in A$, se tiene que ~~$f(x) = -f(x)$~~.*

$f(-x) = -f(x)$

Par



$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{La función } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = x^2 \\ \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3$$

DEFINICIÓN 11: Función lineal

Dado $a \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

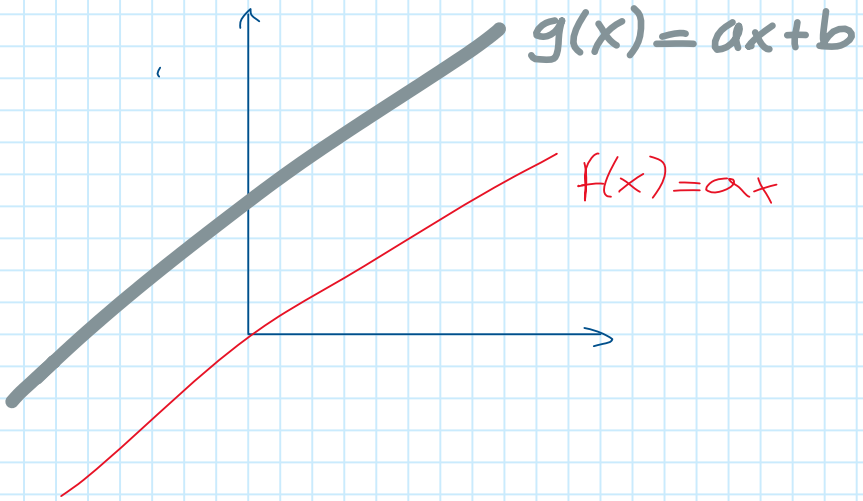
se llama ***lineal***.

DEFINICIÓN 12: Función afín

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

se llama ***afín***.



DEFINICIÓN 13: Función cuadrática

Dados $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

se llama ***cuadrática***.

DEFINICIÓN 14: Función polinómica

Dados $n \in \mathbb{N}^*$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_n \neq 0$, la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

se llama ***polinómica***.

DEFINICIÓN 15: Función racional

Dadas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funciones polinómicas, se define $D = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$. La función

$$\begin{aligned} r\colon D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

se llama ***racional****.*

DEFINICIÓN 16: Función radical

Dado $n \in \mathbb{N}^*$, la función

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{R}^+ \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt[n]{x}, \end{aligned}$$

donde

$$\left(\sqrt[n]{u}\right)^n = u$$

para todo $u \geq 0$, se llama ***radical****.*

DEFINICIÓN 17: Función algebraica

Una función es ***algebraica*** *si es la composición de restricciones de funciones lineales, afines, polinómicas, racionales o radicales.*

$$f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

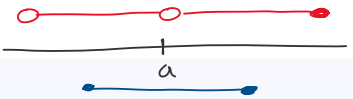
$$x \mapsto \frac{\frac{x-1}{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Clase 2018/10/09

martes, 9 de octubre de 2018 12:18

1. LÍMITES

En este curso se considera a $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo, $a \in I$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.



DEFINICIÓN 1: Notación de límite

Dados

1. *a y L dos números reales;*
2. *I un intervalo abierto que contiene al número a; y*
3. *$f: A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.*

La notación

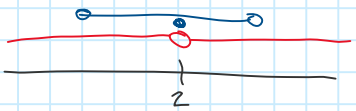
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se lee L es el límite de f cuando x tiende a a.

Ej

$$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$$



La idea intuitiva de límite es la siguiente: dada $f: A \to \mathbb{R}$ y una sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si la imagen de esos elementos se acercan a L.

Ej:

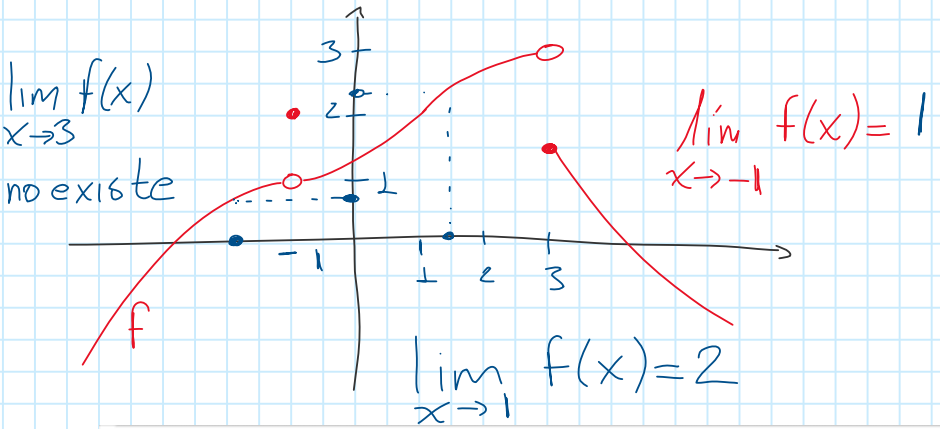
$$f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$$

x	1	1.5	1.8	1.9	1.99
$f(x)$	3	3.5	3.8	3.9	3.99

x	3	2.5	2.2	2.1	2.01
$f(x)$	5	4.5	4.2	4.1	4.01

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

https://www.geogebra.org/m/cduvf8cv



La definición formal de límite de una función en un punto se dará en capítulos posteriores.

TEOREMA 1: Unicidad del límite

Dada la función $f: A \to \mathbb{R}$ *se tiene que si* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *entonces el número* L *es el* único *número que satisface esta igualdad.*

La existencia del límite de una función en un punto no requiere que ese punto esté en el dominio de la función. El siguiente teorema enfatiza este hecho.

TEOREMA 2

Dada la función $f: A \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *si* $g: A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ *es tal que*

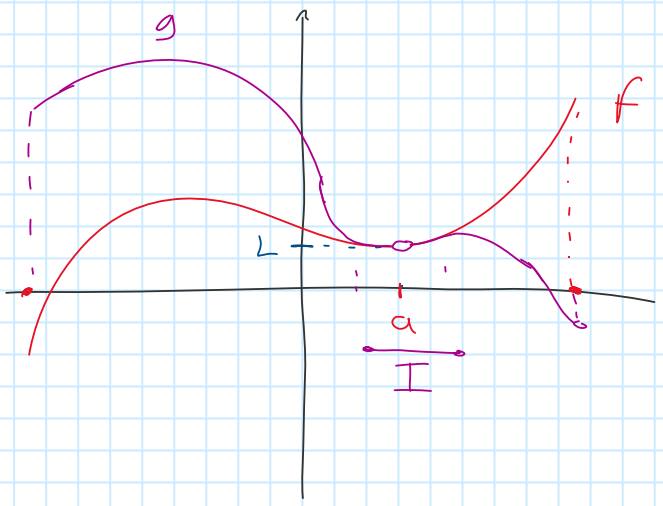
$$g(x) = f(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, *entonces existe el límite de* g *en* a *y*

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

a

$x \to a$



Ej: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Tenemos que

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

$f(x)$ $g(x)$

$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ Entonces

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} x+2$$

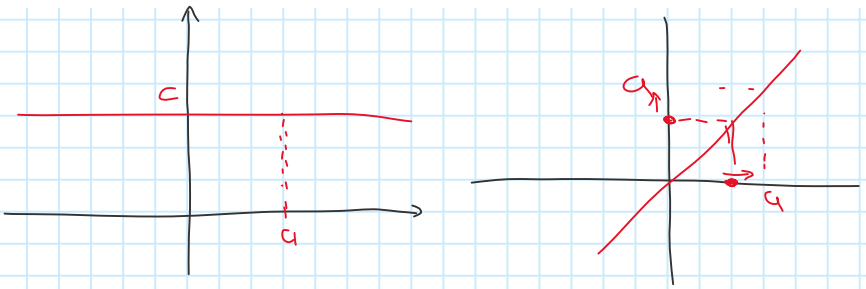
TEOREMA 3

Se tiene que

$$\lim_{x \to a} x = a$$

y si $c \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\lim_{x \to a} c = c.$$



TEOREMA 4: Propiedades algebraicas de los límites

Dadas las funciones $f: A \to \mathbb{R}$ *y* $g: A \to \mathbb{R}$. *Si existen* $\lim_{x \to a} f(x)$ *y* $\lim_{x \to a} g(x)$, *entonces:*

1. *existe el límite de* $f + g$ *y*

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x);$$

2. *existe el límite de* $f \cdot g$ *y*

TEOREMA 4: Propiedades algebraicas de los límites

Dadas las funciones $f: A \to \mathbb{R}$ *y* $g: A \to \mathbb{R}$. *Si existen* $\lim_{x\to a} f(x)$ *y* $\lim_{x\to a} g(x)$, *entonces:*

1. *existe el límite de* $f+g$ *y*

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x);$$

2. *existe el límite de* $f\cdot g$ *y*

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x);$$

3. *si* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, *existe el límite de* $\frac{1}{g}$ *y*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Ej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+2$, ¿existe $\lim_{x\to 2} x+2$?

Tenemos que

$$\lim_{x\to 2} x = 2, \quad \lim_{x\to 2} 2 = 2$$

Entonces

$$\lim_{x\to 2} x+2 = \lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2$$
$$= 2+2 = 4$$

Ej: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 7x$, ¿existe $\lim_{x\to -3} f(x)$?

Tenemos que

$$\lim_{x\to -3} 7 = 7, \quad \lim_{x\to -3} x = -3$$

Entonces

$$\lim_{x\to -3} 7x = \left(\lim_{x\to -3} 7\right)\left(\lim_{x\to -3} x\right) = 7(-3) = -21$$

Ej: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ (= $x \cdot x$). ¿existe $\lim_{x\to 3} f(x)$?

Tenemos que $\lim_{x\to 3} x = 3$

Entonces
$$\lim_{x\to 3} x^2 = \lim_{x\to 3} x \cdot x = \left(\lim_{x\to 3} x\right)\left(\lim_{x\to 3} x\right) = 3 \cdot 3 = 9$$

Ej: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$. ¿existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Analicemos $\lim_{x\to 0} x^2 + 1$, tenemos que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Entonces
$$\lim_{x\to 0} x^2 + 1 = \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} 1 = 0 + 1 = 1$$

Como $\lim_{x\to 0} x^2 + 1 = 1 \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} x^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

COROLARIO 5. Dadas las funciones $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: A \to \mathbb{R}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, entonces:

1. existe el límite de αf y
$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x);$$
2. existe el límite de $f - g$ y
$$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x);$$
3. existe el límite de $\alpha f + \beta g$ y
$$\lim_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x);$$

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x);$$

4. existe el límite de $\frac{f}{g}$ siempre que $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ y

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Ej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2-x}{x^2+1}$$

Calcule $\lim_{x\to 2} f(x)$

Analicemos

$$\lim_{x\to 2} x^2-x \qquad \lim_{x\to 2} x^2+1$$

Ahora

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2} x = 2$$

Entonces

$$\lim_{x\to 2} x^2-x = 4-2 = 2$$

Ahora

$$\lim_{x\to 2} x^2+1 = 4+1 = 5 \neq 0$$

Entonces

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 2} x^2-x}{\lim_{x\to 2} x^2+1} = \frac{2}{5},$$

Ej: Dado $n \in \mathbb{N}^*$, se define

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n$$

dado $a \in \mathbb{R}$, calcular $\lim_{x\to a} x^n$.

dado $a \in \mathbb{R}$, calcular $\lim_{x \to a} x^n$.

El límite es a^n. $\Big\}$ $a = 2$

$$\lim_{x \to 2} x^n = 2^n \quad \} P(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$

i) Para $n = 1$ vamos a demostrar $\lim_{x \to 2} x = 2$
y esto es verdad por el teorema

ii) Supongamos que

$$\lim_{x \to 2} x^n = 2^n$$

vamos a demostrar que $\lim_{x \to 2} x^{n+1} = 2^{n+1}$

$\lim_{x \to 2} x^{n+1} = \lim_{x \to 2} x^n \cdot x$

Calculemos

$\lim_{x \to 2} x^n = 2^n$

$\lim_{x \to 2} x = 2$

Entonces

$\lim_{x \to 2} x^{n+1} = \lim_{x \to 2} x^n \cdot x$

$= 2^n 2 = 2^{n+1}$

$\lim_{x \to 5} x^5 = 5^5$ | $\lim_{x \to a} x^n = a^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 0$.

$\lim_{x \to 0} x^{10} = 0^{10} = 0$

$\lim_{x \to 2} x^{-2} = (2)^{-2} = 1/4$

$\lim_{x \to 0} x^2 + (x + 1)$

PROPOSICIÓN 6 (Generalización de las propiedades algebraicas). Da-

PROPOSICIÓN 6 (Generalización de las propiedades algebraicas). Dados $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, f_2, \ldots, f_n : A \to \mathbb{R}$ tales que existe el límite $\lim_{x\to a} f_i(x)$ para todo $i = 1, \ldots, n$, se tiene que:

1. $\lim_{x\to a} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x\to a} f_i(x)$;
2. $\lim_{x\to a} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x\to a} f_i(x)$.

$\prod_{i=1}^{3} f_i = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$

Ej. Calcular $\lim_{x\to 3} x^3 - 7x^2 + 2x - 3$

Calculemos

$\lim_{x\to 3} x^3 = 3^3$; $\lim_{x\to 3} -7x^2 = -7 \lim_{x\to 3} x^2 = -7(3)^2$

$\lim_{x\to 3} 2x = 2 \lim_{x\to 3} x = 2(3)$

$\lim_{x\to 3} -3 = -3$

Entonces

$\lim_{x\to 3} x^3 - 7x^2 + 2x - 3 = (3)^3 - 7(3)^2 + 2(3) - 3$

PROPOSICIÓN 7 (Límite de una función polinomial y de una función racional). Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son dos funciones polinomiales, entonces:

1. $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ y
2. $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$ siempre que $Q(a) \neq 0$.

Ej $\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x - 1}{x^2 + x - 2}$

Tenemos que, para $x = 0$

Tenemos que, para $x=0$

$$(0)^2+(0)-2=-2\neq 0$$

Entonces; como es una función racional

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+2x^3-3x-1}{x^2+x-2}=\frac{(0)^4+2(0)^3-3(0)-1}{(0)^2+0-2}$$

$$=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$$

Ej. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

Tomemos la func definida por $Q(x)=x-1$

entonces $Q(1)=0$.

No puedo aplicar el límite ...

Notemos que

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1$$

para $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Calculemos $\lim_{x\to 1} x+1=2$.

Entones

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

Ej. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$

$\}$

Notemos que

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}$$

para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Entonces como $\lim_{x\to 1} x = 1 \neq 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{3}{1} = 3$$

Entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = 3$$

Clase 2018/10/16

martes, 16 de octubre de 2018 11:26

https://goo.gl/JtCUiy

TEOREMA 1: Límite de una función radical

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $f: A \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

- *Si $L < 0$ y n es par, no existe $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$.*
- *Si n es impar o si n es par y $L \geq 0$, existe $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)}$ y*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

Ej. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

calcular $\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \sqrt{x}$

Calculamos $\lim_{x \to 4} x = 4 > 0$,

Entonces $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

Ej. $\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 7x - 2}$

Calculemos $\lim_{x \to 3} x^2 + 7x - 2 = (3)^2 + 7(3) - 2$

$= 28 > 0$

Entonces $\lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 - 7x - 2} = \sqrt{28}$

Ej. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

Notemos que

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$= \frac{(x^2+1)-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Basta determinar $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

Primero $\lim_{x\to 0} x^2+1 = 1 \geq 0$

Tenemos que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+1}+1 = 2$

Y $\lim_{x\to 0} x = 0$

Entonces $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{0}{2} = 0$

1. Monotonía del Límite

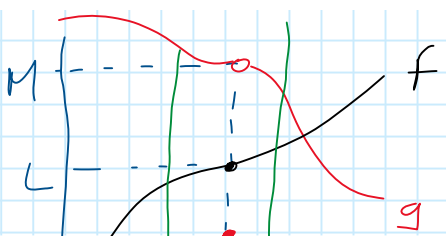
Teorema 2: Monotonía

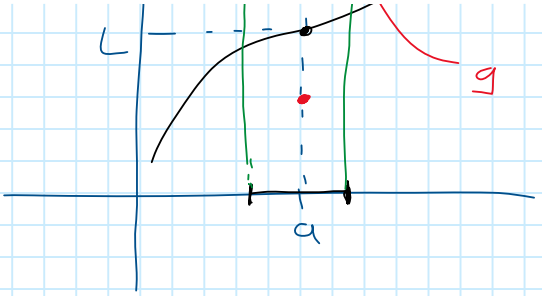
Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: A \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Si

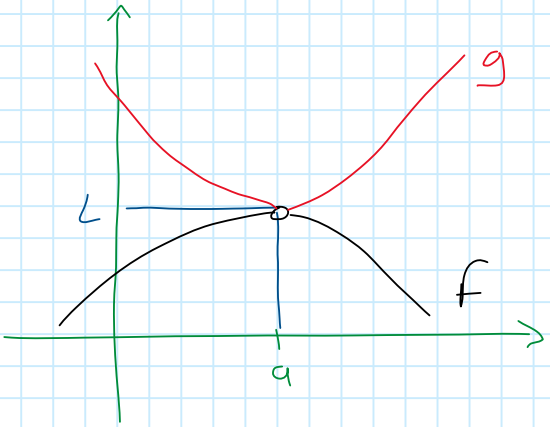
$$f(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces

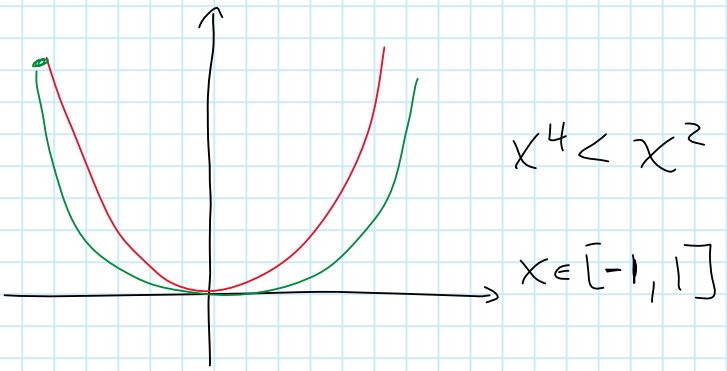
$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$







$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \lim_{x\to 0} x^4 = 0$$



TEOREMA 3: Teorema del sándwich

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon A \to \mathbb{R}$ *y* $h\colon A \to \mathbb{R}$ *tales que* $\lim_{x\to a} g(x)$ *y* $\lim_{x\to a} h(x)$ *existen. Si*

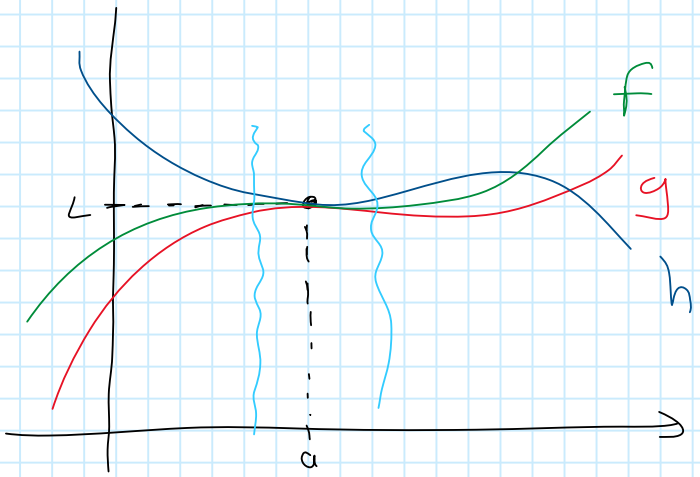
$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$$

y

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, *entonces* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe y*

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x).$$



Ej $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que,

$$|g(x)| \leq 1$$

calcular $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 g(x)$

Tenemos

$$-1 \leq g(x) \leq 1$$

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 g(x) \leq (x-1)^2$$

Como $\lim_{x \to 1} -(x-1)^2 = 0$ y $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$

Entonces

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 g(x) = 0$$

Ej. Supongu que la funcion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumple que $1 - \frac{x^3}{2} \leq f(x) \leq 2 + \frac{x}{4}$, para todo $x \in]-1, 1[$, ¿existe $\lim_{x \to 0} f(x)$?

2. LÍMITES LATERALES

DEFINICIÓN 1: Notación de límite laterales

Dados

1. *a y L dos números reales;*
2. *I un intervalo abierto que contiene al número a; y*
3. *$f: A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.*

La notación

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se lee L es el límite de f cuando x tiende a a por la derecha. *La notación*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se lee L es el límite de f cuando x tiende a a por la izquierda.

La idea intuitiva de límite lateral es la siguiente: si $f: A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A, mayores que a, que se acerquen a a, se tiene que la sucesión de las imágenes de esos elementos se acercan a L. Por otro lado, se dice que

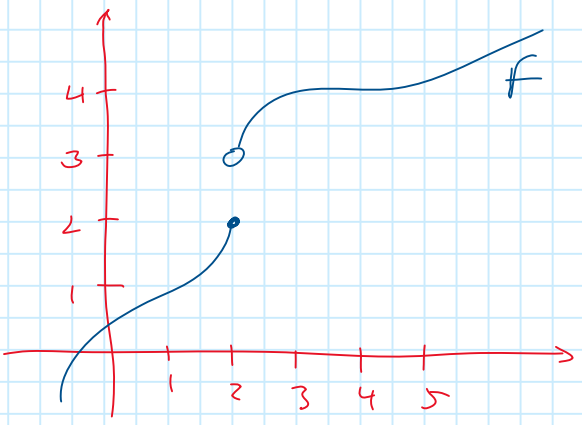
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

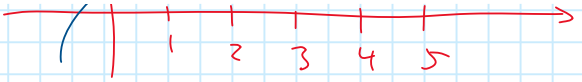
si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A, menores que a, que se acerquen a a, se tiene que la sucesión de las imágenes de esos elementos se acercan a L.

La definición formal de límites laterales de una función en un punto se dará en capítulos posteriores.

dexiste $\lim_{x \to 2} f(x)$?

dexiste $\lim f(x)$?





$\lim_{x\to 2^+} f(x)$? sí y es igual a 3

TEOREMA 4: Unicidad del límite lateral

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$ se tiene que

1. *si $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$, entonces el número L es el único número que satisface esta igualdad;*
2. *si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, entonces el número L es el único número que satisface esta igualdad;*

TEOREMA 5: Límite de funciones localmente iguales

Dada una función $f: A \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

- *Si $g: A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que*

$$g(x) = f(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$ con $x > a$, entonces existe el límite de g en a por la derecha y

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

- *Si $g: A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ es tal que*

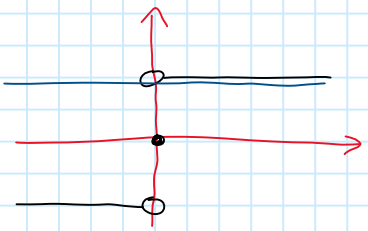
$$g(x) = f(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$ con $x < a$, entonces existe el límite de g en a por la izquierda y

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = L.$$

Ej sgn $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x>0, \\ 0 & x=0, \\ -1 & x<0, \end{cases}$$



Calcular $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$

Como $\operatorname{sgn}(x) = 1$, $x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Como $\operatorname{sgn}(x) = -1, \quad x < 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 - 1 & x > 1 \\ 2x & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

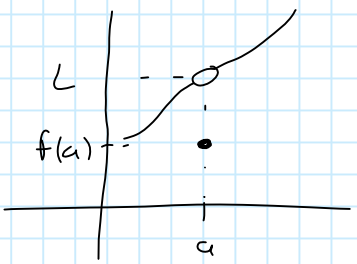
Como $f(x) = 2x, \quad x \leq 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$$

PROPOSICIÓN 6. Los límites laterales cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites.

TEOREMA 7

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función, se tiene que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y es igual a L si y solo si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existen y son iguales a L.



$f: A \to \mathbb{R}$

$a \in A$

$\lim_{x\to a} f(x)$ existe

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

DEFINICIÓN 2: Continuidad

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in A$, se dice que f es continua en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Se dice que f es continua en A si f es continua en cada punto de A.

DEFINICIÓN 3: Continuidad lateral

Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in A$, se dice que f es continua en a por derecha si

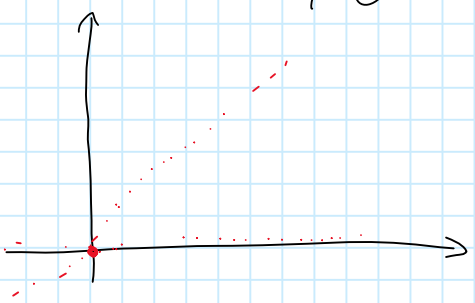
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y se dice que f es continua en a por izquierda si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Ej. La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 2x-2 & x \leq 0 \end{cases}$$

¿es continua en 0?

Calculemos $\lim_{x \to 0} f(x)$, para esto, consideremos los límites laterales:

* Como $f(x) = 2x$, $x > 0$

$$\lim f(x) = \lim 2x = 0$$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} 2x = 0$

* Como $f(x) = 2x - 2, \quad x \leq 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 2x - 2 = -2$

Dado que los límites son diferentes,

$\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe y por lo tanto

no es continua.

Como $f(0) = -2 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$, la función

TEOREMA 8: Continuidad de funciones básicas

Se tiene que la función

$$x \mapsto x$$

para $x \in \mathbb{R}$ es continua y si $c \in \mathbb{R}$, entonces la función

$$x \mapsto c$$

para $x \in \mathbb{R}$ es continua.

TEOREMA 9: Propiedades algebraicas de la continuidad

Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: A \to \mathbb{R}$ funciones y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si existen f y g son continuas en a, entonces

1. *$\alpha f + \beta g$ es continua en a*
2. *$f \cdot g$ es continua en a; y*
3. *si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es continua en a.*

TEOREMA 10: Continuidad de funciones polinomiales y racionales

Sean $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones polinomiales. Se tiene que:

1. *P es continua y*
2. *$\frac{P}{Q}$ es continua en su dominio.*

TEOREMA 11: Continuidad de una función radical

Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se tiene que la función

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

para $x \in \mathbb{R}^+$ es continua.

TEOREMA 12: Continuidad de la composición

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(f) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es continua en a.

PROPOSICIÓN 13 (Límite de una composición). Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(f) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. Si existe el límite $\lim_{x\to a} g(x) = b$ y f es continua en b, entonces existe $\lim_{x\to a} f(g(x))$ y

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b).$$

Calcular $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+1}$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\lim_{x\to 0} x^2+x+1}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

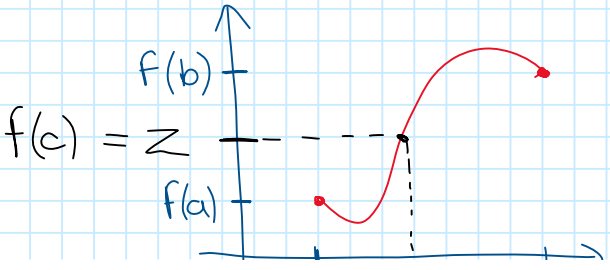
TEOREMA 14: Continuidad de una función algebraica

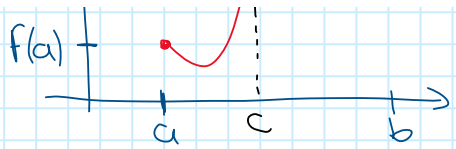
Toda función algebraica es continua en su dominio.

TEOREMA 15: Valor Intermedio

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con $b > a$. Si f es continua en $[a,b]$, entonces para todo $z \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = z.$$




f(a)
a
c
b

Clase 2018/10/19

viernes, 19 de octubre de 2018 15:38

TEOREMA 15: Valor Intermedio

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ con $b > a$. Si f es continua en $[a,b]$, entonces para todo $z \in \mathbb{R}$ entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = z.$$

Ej Determine si la ecuacion

$$x^3 - x^2 + x + 1 = 0$$

tiene alguna solucion

Definamos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1.$$

Esta función es continua.

$$f(1) = 2$$

$$f(-1) = -2$$

Notemos $f|_{[-1,1]}: [-1,1] \to \mathbb{R}$

Dado 0, que está entre $f(-1) = -2$ y $f(1) = 2$

existe $c \in [-1,1]$ tal que

$$f(c) = 0$$

$$c^3 - c^2 + c + 1 = 0$$

4. Cambio de variable

Teorema 16: Cambio de variable para límites

Sean $f: A \to \mathbb{R}$ *y* $g: B \to \mathbb{R}$ *funciones, con* $\operatorname{img}(f) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. *Si:*

1. *existe* $b = \lim_{x \to a} g(x)$; *y*
2. *se satisfacen una de las tres condiciones siguientes:*
   a) *la función* f *es continua en* b;
   b) *la función* f *no está definida en* b, *es decir,* $b \notin A$
   c) *existe* $\lim_{y \to b} f(y)$ *y existe un intervalo* $(a-r, a+r)$ *tal que*

$$g(x) \neq b$$

para todo $x \in (a-r, a+r) - \{a\}$.

Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = \lim_{y \to b} f(y).$$

Ej. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$

¿cuánto vale $\lim_{x \to 1} f(x-1)$?

Tomamos $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x-1$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1)$

Tenemos que $\lim_{x \to 1} g(x) = 0$ (b) ✓

$y = x-1$ $\quad \lim_{x \to 1} y = 0$

$\lim_{x \to 1} f(x-1) = \lim_{y \to 0} f(y) = 3$ ✓

¿$g(x) \neq 0$? ¿$x - 1 \neq 0$?

Ej. supongamos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$,

¿cuánto vale $\lim_{x \to 1} f(x^2+1)$?

$y = x^2 + 1$

$x \to 1$

Definimos $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+1$

entonces $f(x^2+1) = (f \circ g)(x)$

Tenemos que $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} x^2+1 = 2$

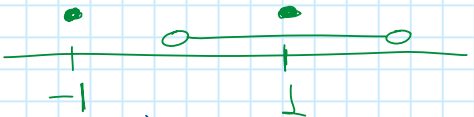
$y = x^2+1$

$\lim_{x\to 1} f(x^2+1) = \lim_{y\to 2} f(y) = 0$

Ademas

$$g(x) = 2 \iff x^2+1 = 2$$
$$\iff x^2-1 = 0 \iff x = 1 \text{ v } x = -1$$

Entonces, como



$g(x) \neq 2$ para $x \in (0, 2) \setminus \{1\}$

tenemos

$$\lim_{x\to 1} f(x^2+1) = \lim_{y\to 2} f(y) = 0.$$

Para calcular el límite de una composición como la siguiente

$$\lim_{x\to a} f(g(x)),$$

se puede usar el *cambio de variable*

$$y = g(x)$$

siempre que se cumplan las condiciones de teorema anterior, de esta forma, se tendría

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y)$$

Esto se denomina *método del cambio de variable*.

DEFINICIÓN 4

Existen dos funciones

$$\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y \qquad \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

llamadas funciones seno y coseno que cumplen

- $\cos(0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ *y* $\cos(\pi) = -1$;
- *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$\cos(y - x) = \cos(y)\cos(x) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(x);$$

- *para todo* $x \in]0, \pi/2[$ *se tiene que*

$$0 < \cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

DEFINICIÓN 5

Definamos $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ *y* $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. *La función*

$$\begin{aligned} \tan\colon D_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}, \end{aligned}$$

se denomina función tangente. Además

$$\begin{aligned} \sec\colon D_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\cos(x)}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \csc\colon D_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cot\colon D_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \end{aligned}$$

se denominan funciones secante, cosecante y cotangente.

A las funciones seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente se la llama funciones trigonométrica.

Ej. Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Como $\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1$

y $\cos(x) < \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$

Por teo. sánduche

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

PROPOSICIÓN 17. Las funciones trigonométricas son continuas en su dominio.

PROPOSICIÓN 18. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Calcular $\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2}$

Tomemos $y = x-2$, tenemos que

$$\lim_{x\to 2} y = \lim_{x\to 2} x-2 = 0$$

Como $y \longmapsto \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}$, para $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ no está definida en $y=0$, puedo usar el cambio de variable.

Por cambio de variable

$$\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = 1$$

Calcular $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

Consideremos

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} = \frac{(x+1)}{(x+1)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{(x-1)}$$

Para $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ $= (x+1)\,\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}$

6. Límites al infinito

Definición 6: Notación de límite al infinito

Dados

1. *L un número real;*
2. *I un intervalo no acotado superiormente ; y*
3. *$f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A$.*

La notación

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

se lee L es el límite de f cuando x tiende a más infinito. Por otro lado, si I es un intervalo no acotado inferiormente, la notación

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

se lee L es el límite de f cuando x tiende a menos infinito.

La idea intuitiva de límite infinito es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que crezcan indefinidamente sin estar acotados, se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L. Por otro lado, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

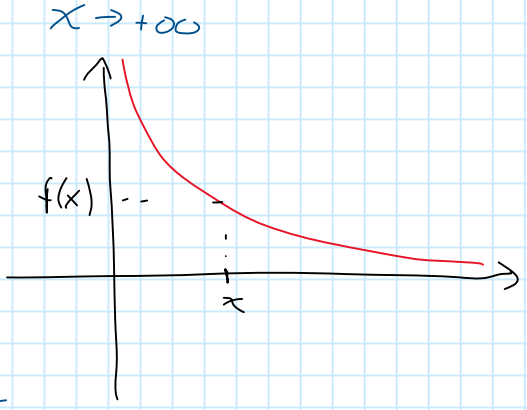
si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que decrezcan indefinidamente sin estar acotados, se tiene que la imagen de esos elementos se acercan a L.

$f \quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

x	$f(x)$
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
10000	0.0001



PROPOSICIÓN 19. Los límites al infinito cumplen las mismas propiedades algebraicas que los límites.

PROPOSICIÓN 20. Se tiene que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}$

No temos que

$$\frac{x}{x+1} = \frac{\frac{1}{x}(x)}{\frac{1}{x}(x+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

para $x \neq 0$ y $x \neq -1$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 1 + 0 = 1 \neq 0$$

Entonces $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

De donde

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$y = \frac{x}{x+1}$$

Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}$

Tenemos que

Tenemos que

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{x^2}(x)}{\frac{1}{x^2}(x^2+1)} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Clase 2018/10/23

martes, 23 de octubre de 2018 15:33

7. Límites infinitos

Definición 7: Notación de límite infinito

Dados

1. *a un número real;*
2. *I un intervalo abierto que contiene al número a; y*
3. *$f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.*

La notación

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

se lee el límite de f cuando x tiende a a es más infinito. *La notación*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

se lee el límite de f cuando x tiende a a es menos infinito.

La idea intuitiva de límite infinito es la siguiente: sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se tiene que la imagen de esos elementos crecen indefinidamente sin estar acotada. Por otro lado, sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, se dice que

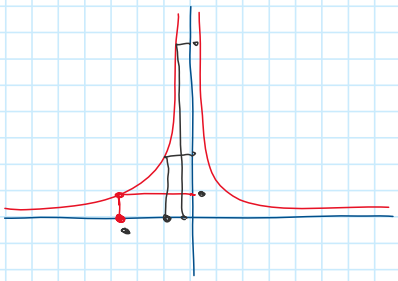
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

si y solo si dada cualquier sucesión de elementos de A que se acerquen a a, se tiene que la imagen de esos elementos decrecen indefinidamente sin estar acotada.

Ej $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

x	$f(x)$
1	1
0.1	100
0.01	10000
-0.01	10000
-0.1	100
-1	1

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Que el límite de una función sea más infinito o menos infinito es una forma de no existencia del límite de la función.

PROPOSICIÓN 21. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0,$$

se tiene que si

1. $f(x) > 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
2. $f(x) < 0$ para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Ej: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$

Como $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, y $x^2 > 0$, $x \in \mathbb{R}^*$

Entonces $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Ej: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

Analicemos $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$

Tenemos que $\lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0} x = 0$

Como $x > 0$, entonces $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

PROPOSICIÓN 22 (Propiedades de límites infinitos). Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se tiene que

1. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces

   $$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty;$$

2. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \mp\infty$, entonces

   $$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty;$$

3. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, entonces

   $$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0;$$

4. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\beta > 0$, entonces: $\lim_{x\to a} \beta f(x) = \pm\infty$;
5. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\beta < 0$, entonces: $\lim_{x\to a} \beta f(x) = \mp\infty$;
6. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x)$ o g está acotada inferiormente en un intervalo alrededor de a, entonces

   $$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \pm\infty;$$

7. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ o g está acotada inferior-

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \pm\infty;$$

7. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ o g está acotada inferiormente por un número positivo en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \pm\infty;$$

8. si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y existe $\lim_{x\to a} g(x) < 0$ o g está acotada superiormente por un número negativo en un intervalo alrededor de a, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \mp\infty.$$

PROPOSICIÓN 23. Se tiene que

$$\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty.$$

$\lim_{x\to-\infty} x^2$

Tenemos que $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^2 = \lim_{x\to-\infty} x\,x = +\infty$

Ej $\lim_{x\to-\infty} x^2 + x = \lim_{x\to-\infty} x(x+1)$

Analicemos

$\lim_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

TEOREMA 24

Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: A \to \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

si

$$f(x) \le g(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, entonces

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty.$$

TEOREMA 25

Sean $f: A \to \mathbb{R}$ *y* $g: A \to \mathbb{R}$ *tales que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

si

$$g(x) \leq f(x)$$

para todo $x \in I \setminus \{a\}$, *entonces*

$$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty.$$

Ej $\lim_{x \to 1} \frac{2x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} \cdot 2x$

Tenemos que

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = (1-1)^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 1} 2x = 2 > 0$$

Entonces, como $(x-1)^2 > 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} 2x = +\infty$$

Si $\underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L}_{\text{existe}}$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$,

entonces $\lim_{x \to a} f(x) = 0$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 3$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

entonces $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

Clase 2018/10/23

martes, 23 de octubre de 2018 15:34

1. Concepto de derivada

En esta sección, tomaremos $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo abierto.

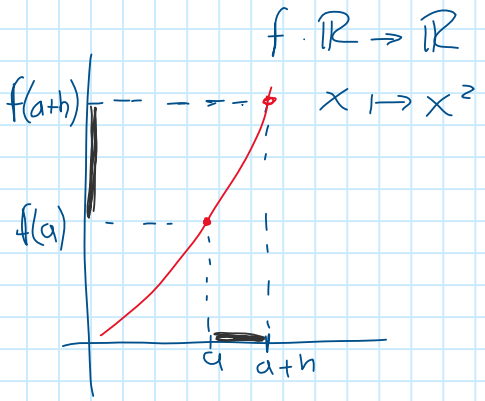
Definición 1: Razón de cambio promedio

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función, $a \in I$ y $h \in \mathbb{R}$ tal que $a+h \in I$, se define la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a+h$ por

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Este número también es conocido como varición media *de f en el intervalo que une a y $a+h$.*

https://www.geogebra.org/classic/uvjtevnx



$a = \frac{1}{2}$

$f(a) = \frac{1}{4}$

$h = 0\,2$

$a+h = \frac{1\,2}{2\,2}$

$f(a+h) = 1\,44$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{0\,44}{0\,2} = 2\,2$$

Definición 2: Derivada de una función en un punto

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. La derivada de la función f en a, *denotada por $f'(a)$, es el número*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

siempre que este límite exista. En este caso, se dice que f es derivable en a.

También se dice que el número $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de f en a.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$a = 1$, para $h \in \mathbb{R}$ $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} y = f(x)$

$$\Delta y = f(a+h)-f(a) = (1+h)^2 - 1^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$

$$= \frac{2h+h^2}{h} = 2+h, \quad h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

¿existe la variacion instantanea?

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} 2+h = 2$$

DEFINICIÓN 3: Función derivada

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función, se define

$$A = \{x \in I : f \text{ es derivable en } x\}.$$

La función

$$Df: A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

se denomina derivada de f. *Se dice que f es* derivable en A *y su derivada es la función Df.*

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Tenemos que f es derivable en $\mathbb{R}$

$Df \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f'(x) = 2x$

Para la funcion sen

* Razón de cambio promedio entre a y a+h

$$\frac{\text{sen}(a+h)-\text{sen}(a)}{h} = \text{sen}(a)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\text{sen}(h)}{h}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}(a)}{h} = \operatorname{sen}(a)\cdot\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}$$

* Razón de cambio instantánea en a

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(a)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(a)\frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = \cos(a)$$

* Función Derivada

Como sen es derivable en $\mathbb{R}$

$$D\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos(x)$$

$$D\operatorname{sen}(x) = \cos(x) =$$

$$\left(\operatorname{sen}(x)\right)' = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}(x)\right) = \cos(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2)' = 2x \\ \dfrac{d}{dx}(x^2) = 2x \end{array} \right.$$

$$x = a + h$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

PROPOSICIÓN 1. Sean $f: I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. Se tiene que f es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

además,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

TEOREMA 2

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es derivable en $a \in I$, entonces f es continua en a.

PROPOSICIÓN 3. Sea $c \in \mathbb{R}$, se definen las funciones

$$h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{y} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c. \end{array}$$

Se tiene que

$$h'(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 4. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) = (\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, y

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = (\tan(x))' = \sec^2(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

PROPOSICIÓN 5 (Propiedades algebraicas I)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$. Se tiene que:

1. $f + g$ es derivable en a y
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$
2. fg es derivable en a y
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$
3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ es derivable en a y
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

PROPOSICIÓN 6 (Propiedades algebraicas II)**.** Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

1. λf es derivable en a y
$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$
2. $(f - g)$ es derivable en a y
$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$
3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en a y
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

PROPOSICIÓN 7. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se tiene que
$$\frac{d}{dx}(x^n) = (x^n)' = nx^{n-1}$$
para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. REGLA DE LA CADENA

En esta sección, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ representarán intervalos abiertos.

TEOREMA 8: Regla de la cadena

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(f) \subseteq J$. Si

1. *g es derivable en $a \in I$; y*
2. *f es derivable en $g(a) \in J$,*

entonces $f \circ g$ es derivable en a. Además:
$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Clase 2018/10/26

viernes, 26 de octubre de 2018 15:26

PROPOSICIÓN 1. Sean $f: I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. Se tiene que f es derivable en a si y solo si existe

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

$\begin{cases} x = a+h \end{cases}$

además,

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f(x)-f(a) = (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Tomemos límites

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = \lim_{x\to a} (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si f es derivable en a,

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a) = (a-a)f'(a) = 0$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

TEOREMA 2

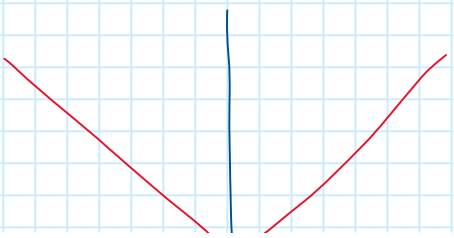
Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es derivable en $a \in I$, entonces f es continua en a.

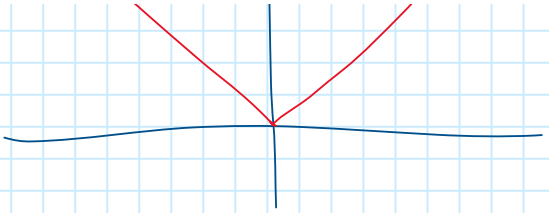
Ej $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Analicemos

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h>0 \\ -1 & h<0 \end{cases}$$





PROPOSICIÓN 3. Sea $c \in \mathbb{R}$, se definen las funciones

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x \quad \text{y} \quad g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto c.$$

Se tiene que

$$h'(x) = 1 \quad \text{y} \quad g'(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$, tenemos que

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

De donde $g'(x) = 0$.

Para $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^*$, tenemos que

$$\frac{h(x+t)-h(x)}{t} = \frac{x+t-x}{t} = \frac{t}{t} = 1$$

Entonces $\lim_{t\to 0} \frac{h(x+t)-h(x)}{t} = 1$

De donde, $h'(x) = 1$.

$(x)' = 1$ $\qquad$ $(c)' = 0$

$\frac{d}{dx}(x) = 1$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(c) = 0$

$(x^2)' = 2x$ $\quad$ $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

PROPOSICIÓN 4. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) = (\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = (\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, y

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = (\tan(x))' = \sec^2(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

PROPOSICIÓN 5 (Propiedades algebraicas I). Sean $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$. Se tiene que:

1. $f + g$ es derivable en a y
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$
2. fg es derivable en a y
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$
3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ es derivable en a y
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Ej

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x) + x) =$$

$$= \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(x)) + \frac{d}{dx}(x)$$

$$= \cos(x) + 1$$

$$(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))$$

$$= \big(f(x+h)-f(x)\big)+\big(g(x+h)-g(x)\big)$$

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)$$

$$\neq \big(f(x+h)-f(x)\big)\big(g(x+h)-g(x)\big)$$

$$\frac{d}{dx}\big(x\,\mathrm{sen}(x)\big) =$$

$$= \frac{d}{dx}(x)\cdot \mathrm{sen}(x) + x\,\frac{d}{dx}\big(\mathrm{sen}(x)\big)$$

$$= 1\,\mathrm{sen}(x) + x\cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2} = -\frac{2x}{x^4}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

para $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^2 x)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^2)\,x + x^2\,\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 2x\,x + x^2\,1 = 3x^2$$

PROPOSICIÓN 6 (Propiedades algebraicas II). Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones reales derivables en $a \in I$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se tiene que:

1. λf es derivable en a y

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

2. $(f-g)$ es derivable en a y

$$(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

3. si $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

1) $\frac{d}{dx}(\lambda f(x)) = \frac{d}{dx}(\lambda) f(x) + \lambda \frac{d}{dx}(f(x))$

$= \lambda \frac{d}{dx}(f(x))$

3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)'$

$= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'$

$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\right)$

$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

$x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ $\left\{ \frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) \right.$

$= -\frac{\frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}}$

$= -n x^{-n-1}$

PROPOSICIÓN 7. Sea $n \in \mathbb{N}^*$. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(x^n) = (x^n)' = nx^{n-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2$

Tomemos $P(n)$: $\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$

i) Demostremos $P(1)$,

stremos que $\frac{d}{dx}(x^1) = 1 x^{1-1}$

Tenemos que

$$\frac{d}{dx}(x^1) = \frac{d}{dx}(x) = 1.$$

y $\quad 1 x^{1-1} = 1 x^0 = 1$

entonces $\frac{d}{dx}(x^1) = 1 x^{1-1}$

ii) Suponemos $P(n)$, y dem $P(n+1)$

es decir, suponemos que

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$$

vamos adem. que $\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = (n+1) x^n$

Calculemos

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \frac{d}{dx}(x^n x)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^n) x + x^n \frac{d}{dx}(x)$$

$$= n x^{n-1} x + x^n 1 = n x^n + x^n$$

$$= (n+1) x^n.$$

$x \mapsto 2\operatorname{sen}(x)$

$x \longmapsto 2x$ $\qquad$ $x \longmapsto \operatorname{sen}(x)$

2. Regla de la cadena

En esta sección, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ representarán intervalos abiertos.

Teorema 8: Regla de la cadena

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: J \to \mathbb{R}$ funciones, con $\operatorname{img}(f) \subseteq J$. Si

1. *g es derivable en $a \in I$; y*
2. *f es derivable en $g(a) \in J$,*

entonces $f \circ g$ es derivable en a. Además:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

$x \xrightarrow{h} \operatorname{sen}(x^2)$

Definamos

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\qquad$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sen}(x)$

Tenemos que

$h(x) = g(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$

Como g es deriv en $f(x)$ y f es deriv. en x

entonces

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$$

Tenemos que $\qquad g'(z) = \cos(z)$

$f'(z) = 2z$

Entonces

$$h'(x) = \cos(f(x))\, 2x = \cos(x^2)\, 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x^3)\right) = 3x^2(-\operatorname{sen}(x^3))$$

$$= -\operatorname{sen}(x^3)\cdot 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left((\cos(x))^3\right) = 3(\cos(x))^2(-\operatorname{sen}(x))$$

$$\frac{d}{dx}\left((\operatorname{sen}(x^3))^2\right) =$$

$$= 2(\operatorname{sen}(x^3))\cos(x^3)\cdot 3x^2$$

TEOREMA 9: Derivada de la función inversa

Sean $f: I \to J$ una función inversible y $f^{-1}: J \to I$ su inversa. Se tiene que para todo $x \in J$, si f es derivable en $f^{-1}(x)$ y $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, entonces

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Der

$$f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x) = 1$$

$$h \quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x} \qquad \Big\{ \qquad g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^2$$

$$g^{-1} = h$$

$$h'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{g'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}^*$$

Definamos $\quad g \quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto x^n$$

$$x \mapsto x^n$$

tenemos que $g^{-1} = h$. Ahora

$$h'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}.$$

Notemos

$$g^{-1}(u) = h(u) = u^{1/n}$$

$$g'(w) = n w^{n-1}$$

Entonces

$$h'(x) = \frac{1}{g'(x^{1/n})} = \frac{1}{n (x^{1/n})^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \frac{1}{x^{1-1/n}}$$

$$= \frac{1}{n} x^{1/n - 1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n} x^{1/n - 1}$$

PROPOSICIÓN 10 (Trigonométricas inversas). Las funciones

$$\operatorname{sen}|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \qquad \cos|_{[0,\pi]}\colon [0,\pi] \to [-1,1]$$

y

$$\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

son invertibles. Sus inversas son representadas por arc sen, arc cos y arc tan, respectivamente, y denominadas **arcoseno**, **arcocoseno** y **arcotangente**, respectivamente. Por tanto

$$\operatorname{arc\,sen}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \qquad \operatorname{arc\,cos}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

y

$$\operatorname{arc\,tan}\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Además, por la definición de funciones inversas, estas satisfacen las siguientes equivalencias:

1. Para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y todo $y \in [-1,1]$,

$$y = \operatorname{arc\,sen}(x) \;\equiv\; x = \operatorname{sen} y.$$

2. Para todo $x \in [0,\pi]$ y todo $y \in [-1,1]$,

$$y = \operatorname{arc\,cos}(x) \;\equiv\; x = \cos y.$$

3. Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$$y = \operatorname{arc\,tan}(x) \;\equiv\; x = \tan y.$$

PROPOSICIÓN 11. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = (\operatorname{arc\,sen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cos}(x)) = (\operatorname{arc\,cos}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para todo $x \in]-1,1[$, y

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tan}(x)) = (\operatorname{arc\,tan}(x))' = \frac{1}{x^2+1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Derivada de la función implícita

Definición 4

Si $f: I \to \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ *y* $F: I \times J \to \mathbb{R}$ *funciones tal que para todo* $x \in I$ *se tiene que*

$$F(x, f(x)) = 0,$$

se dice que la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

donde $y = f(x)$ y $x \in I$, define la función f implícitamente. *Se dice también que la ecuación* define implícitamente y como función de x.

Teorema 12: Derivada de la función implícita

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ *y* $F: I \times J \to \mathbb{R}$ *funciones. Supongamos que* f *está definida de manera implícita con respecto a* F *y definamos*

$$\begin{aligned} g: I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x, f(x)). \end{aligned}$$

Se tiene que si g *es derivable en* $x \in I$, *entonces*

$$g'(x) = 0.$$

Clase 2018/10/30

martes, 30 de octubre de 2018 13:41

PROPOSICIÓN 10 (Trigonométricas inversas). Las funciones

$$\operatorname{sen}|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \qquad \cos|_{[0,\pi]}\colon [0,\pi] \to [-1,1]$$

y

$$\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\colon \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

son invertibles. Sus inversas son representadas por arc sen, arc cos y arc tan, respectivamente, y denominadas **arcoseno**, **arcocoseno** y **arcotangente**, respectivamente. Por tanto

$$\operatorname{arc\,sen}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \qquad \operatorname{arc\,cos}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

y

$$\operatorname{arc\,tan}\colon \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$

Además, por la definición de funciones inversas, estas satisfacen las siguientes equivalencias:

1. Para todo $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ y todo $y \in [-1,1]$,

$$y = \operatorname{arc\,sen}(x) \equiv x = \operatorname{sen} y.$$

2. Para todo $x \in [0,\pi]$ y todo $y \in [-1,1]$,

$$y = \operatorname{arc\,cos}(x) \equiv x = \cos y.$$

3. Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,

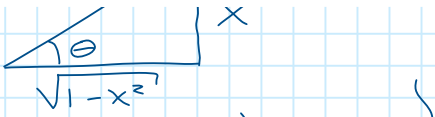
$$y = \operatorname{arc\,tan}(x) \equiv x = \tan y.$$

PROPOSICIÓN 11. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = (\operatorname{arc\,sen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen}(x)) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen}(x))} \qquad \boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$\operatorname{sen}(\theta) = x$

$\theta = \operatorname{arc\,sen}(x)$

$\cos(\theta) = \sqrt{1-x^2}$

y

$$\frac{d}{dx}(\arccos(x)) = (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

para todo $x \in]-1,1[$, y

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = (\arctan(x))' = \frac{1}{x^2+1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Derivada de la función implícita

Definición 4

Si $f: I \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{img}(f) \subseteq J$ y $F: I \times J \to \mathbb{R}$ funciones tal que para todo $x \in I$ se tiene que

$$F(x, f(x)) = 0,$$

se dice que la ecuación

$$F(x, y) = 0,$$

donde $y = f(x)$ y $x \in I$, define la función f implícitamente. *Se dice también que la ecuación* define implícitamente y como función de x.

$f\,[0,1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{1-x}$

Si llamamos $y = f(x)$

$y = \sqrt{1-x}$

$y^2 = 1-x \quad \begin{cases} y^2 + x - 1 = 0 \\ (f(x))^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$

$$\{ (f(x))^2 + x - 1 = 0$$

$$F \quad [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto y^2 + x - 1$$

$$F(x, f(x)) = 0$$

TEOREMA 12: Derivada de la función implícita

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ tal que $\text{img}(f) \subseteq J$ y $F: I \times J \to \mathbb{R}$ funciones. Supongamos que f está definida de manera implícita con respecto a F y definamos

$$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x, f(x)).$$

Se tiene que si g es derivable en $x \in I$, entonces

$$g'(x) = 0.$$

$$g(x) = (f(x))^2 + x - 1$$

Derivamos

$$g'(x) = 2f(x)\cdot f'(x) + 1$$

Entonces $g'(x) = 0$

$$2f(x)f'(x) + 1 = 0$$

Despejamos $$f'(x) = -\frac{1}{2f(x)}$$

Ej La ec. $x^2 + y^2 = 1$, define y de manera implícita en función de x Hallar su derivada.

Tenemos $y = f(x)$, entonces

Tenemos $y = f(x)$, entonces

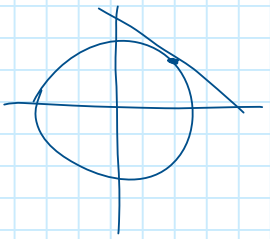
$$x^2 + (f(x))^2 = 1$$

Derivamos

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

¿Cuánto vale $f'(1/\sqrt{2})$?



$$f'(1/\sqrt{2}) = -\frac{1/\sqrt{2}}{f(1/\sqrt{2})}$$

$$= -\frac{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = -1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2x + 2y\,y' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{2y}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x$$

$$(f')' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2$$

1. Derivada de orden superior

Definición 1: Segunda derivada

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en I, si f' es derivable en $a \in I$, entonces se dice que f es dos veces derivable en a y la derivada de f' en a se la denota por $f''(a)$.

$$(f')'(a) = f''(a)$$

Definición 2: Función segunda derivada

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función, se define

$$A = \{x \in I : f \text{ es dos veces derivable en } x\}.$$

La función

$$\begin{aligned} D^2 f: A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f''(x) \end{aligned}$$

se denomina segunda derivada de f. *Se dice que f es* dos veces derivable en A *y su derivada es la función $D^2 f$.*

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$D^2 f(a) = f''(a) = f^{(2)}(a) = \frac{d^2 f}{dx^2}(a),$$

y a la función $D^2 f$ también se la llama f'' o $f^{(2)}$. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = (f(x))'' = \frac{d^2}{dx^2} f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{d^2 y}{dx^2}$$

en lugar de $f''(x)$.

$$\left(\cos(x)\right)'' = \left(-\operatorname{sen}(x)\right)' = -\cos(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\operatorname{sen}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\cos(x)\right) = -\operatorname{sen}(x)$$

DEFINICIÓN 3

Sean $n \in \mathbb{N}$, $f: I \to \mathbb{R}$ una función y $a \in I$. Se define la n-ésima derivada de f en a, denotado por $f^{(n)}(a)$, de la siguiente manera:

- *para $n = 0$, $f^{(0)}(a) = f(a)$;*
- *suponemos que f es n veces derivable en I y su derivada es $f^{(n)}$, se dice que f es $n+1$ veces derivable si $f^{(n)}$ es derivable en a y se denota $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a)$.*

$$f^{(n)}(a) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$f \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{sen}(x)$$

$$f^{(0)}(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$$
$$f^{(1)}(x) = \cos(x) \qquad f^{(5)}(x) = \cos(x)$$
$$f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen}(x) \qquad f^{(6)}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos(x) \qquad f^{(7)}(x) = -\cos(x)$$

Otras notaciones para la derivada que se encuentran en la literatura son

$$D^n f(a) = f^{(n)}(a) = \frac{d^n f}{dx^n}(a),$$

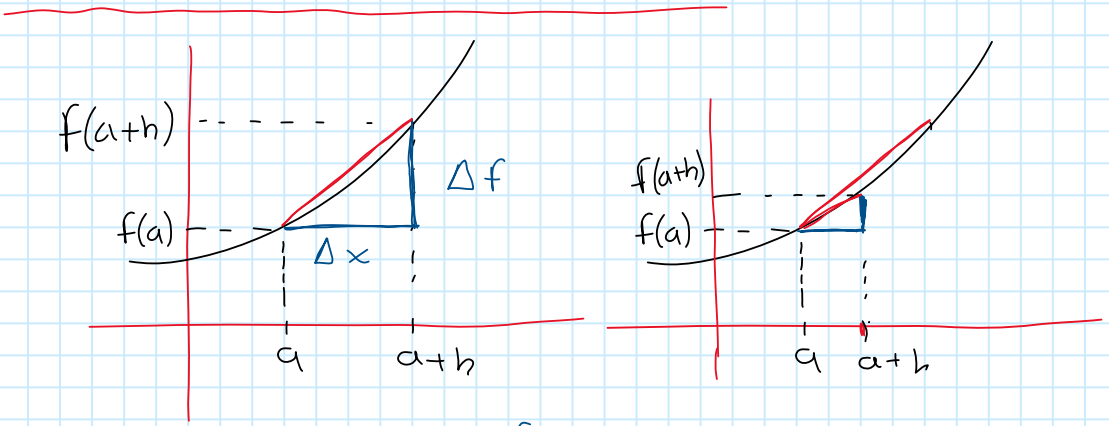
y a la función $D^n f$ también se la llama $f^{(2)}$. Además, se tiene la siguiente notación:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(f(x)) = \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

Y si para cada x en el dominio de f, nombramos y al número $f(x)$, se escribe

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

en lugar de $f^{(n)}(x)$.



$$f(a+h) = f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta x = f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x} h$$

2. Fórmula de Taylor

Teorema 1: Fórmula de Taylor de primer orden

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in I$, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que cumple $|h| < r$, se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + hE(a,h),$$

donde $\lim_{h\to 0} E(a,h) \to 0$.

Proposición 2 (Aproximación lineal). Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in I$, entonces la función $F: I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

$x = a+h$

para $x \in I$, es una buena aproximación lineal de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x\to a} \frac{F(x) - f(x)}{x-a} = 0.$$

2^2 $\qquad$ $(2.034)^2$

$$f \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad \Bigg\} \quad f' : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{array}$$

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(2\,034) \approx F(2\,034) = f(2) + f'(2)(2\,034 - 2)$

$= 4 + 4(0\,034)$

$= 4 + 0\,136 = 4\,136$

TEOREMA 3: Fórmula de Taylor de segundo orden

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $a \in I$, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que cumple $|h| < r$, se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + h^2 E(a,h),$$

donde $\lim\limits_{h \to 0} E(a,h) \to 0$.

PROPOSICIÓN 4 (Aproximación cuadrática)**.** Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en $a \in I$, entonces la función $F\colon I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2,$$

para $x \in I$, es una buena aproximación cuadrática de la función f cerca de a, es decir,

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x) - f(x)}{(x-a)^2} = 0.$$

TEOREMA 5: Fórmula de Taylor de orden n

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $f: I \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I$, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que cumple $|h| < r$, se tiene que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n E(a,h),$$

donde $\lim_{h\to 0} E(a,h) \to 0$.

$f \quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to \sqrt{x} = x^{1/2}$

* Hallar aprox lineales y cuadrática de f cerca de g

Calculemos

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

La aproximación lineal de f cerca de g es

$$F_1(x) = f(g) + f'(g)(x-g) = 3 + \frac{1}{6}(x-g)$$

La aprox cuadrática de f cerca de g es

$$F_2(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-g) + \frac{f''(g)}{2}(x-g)^2 = 3 + \frac{1}{6}(x-g) - \frac{1}{216}(x-g)^2$$

Calcular a), aprox, $\sqrt{10} = 3\,162277$.

Tenemos que

Tenemos que

$$f(10) \approx F_1(10) = 3 + \frac{1}{6}(10-9) = 3 + \frac{1}{6}$$

$$= 3\,166$$

$$f(10) \approx F_2(10) = 3 + \frac{1}{6}(10-9) - \frac{1}{216}(10-9)^2$$

$$= 3\,1620$$

3. Regla de l'Hôpital

Teorema 6: Regla de l'Hôpital

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: I \to \mathbb{R}$ dos función derivables en I. Supongamos que para $a \in I$ se tiene que $f(a) = g(a) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$, se tiene que si

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)E}{g(a) + g'(a)(x-a) + (x-a)E}$$

$$f(\overset{x}{a+h}) = f(a) + f'(a)\overset{x-a}{h} + \overset{x-a}{h}E(a, \overset{x-a}{h})$$

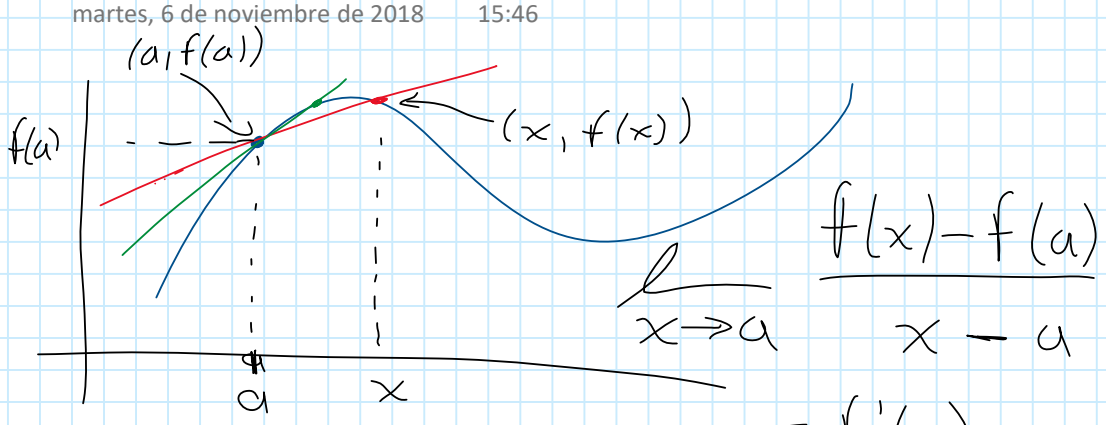
$$= \lim_{x \to a} \frac{f'(a) + E}{g'(a) + E} = \lim_{x \to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

Clase 2018/11/06

martes, 6 de noviembre de 2018 15:46



$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

1. Interpretación geométrica de la derivada

Definición 1: Recta tangente

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función derivable en $c \in I$. La recta de ecuación

$$y = f(c) + f'(c)(x-c),$$

cuya pendiente es el número $f'(c)$, se llama **recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(c, f(c))$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$

$x = 1$

$f(x) = 1$

Calculemos

$f'(x) = 2x$

para $x \in \mathbb{R}$. La pend. es $f'(1) = 2$

2. Teorema del valor medio para funciones derivables

En esta sección, asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

Definición 2: Punto interior

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $c \in A$, se dice que c es un punto interior de A si existe un $r > 0$ tal que

$$]c - r, c + r[\subseteq A.$$

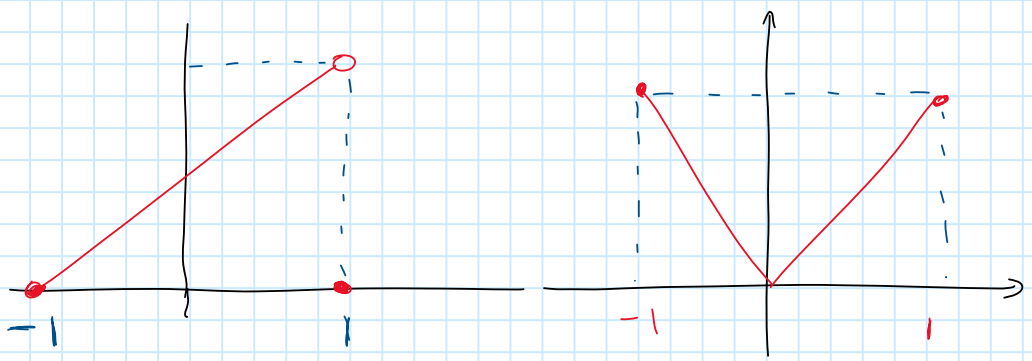
Al conjunto de los punto interiores de A se lo denota por $\text{int}(A)$ y se llema el interior de A.

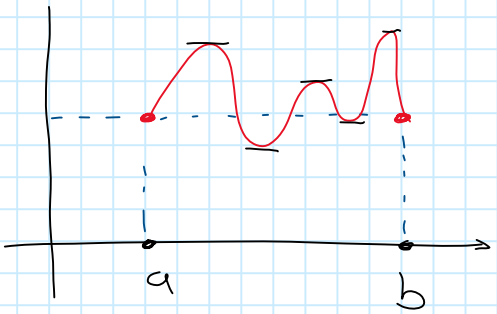
De aquí, se tiene que

$$\text{int}(I) = \text{int}([a, b[) = \text{int}(]a, b]) = \text{int}(]a, b[) =]a, b[.$$

Teorema 1: ~~Valor~~ de Rolle

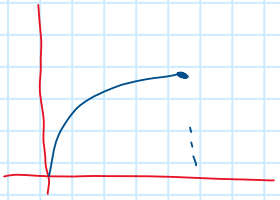
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\text{int}(I)$. Se tiene que si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in \text{int}(I)$ tal que $f'(c) = 0$.





$f\ [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$



$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \; ; \; x \neq 0$$

Ej $x^3 + 3x + 1 = 0$

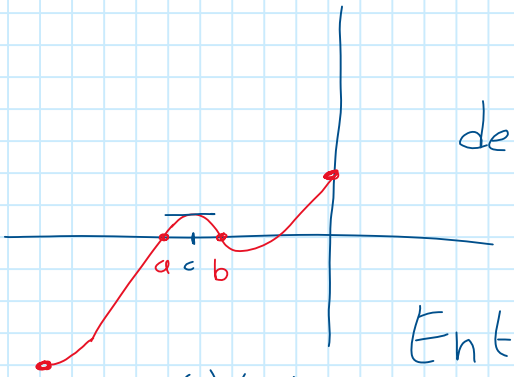
entre -1 y 0, ¿tiene solución?

Definamos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3 + 3x + 1$

$f(-1) = -3$, $f(0) = 1$

Por el teorema del valor intermedio, existe $c \in [-1, 0]$ tal que $f(c) = 0$



Si la ec tiene más de una sol

$f(a) = f(b) = 0$

Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

TEOREMA 2: Valor de medio para funciones derivables

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\text{int}(I)$. Se tiene que existe $c \in \text{int}(I)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dem: Definamos $g: I \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Tenemos

Tenemos

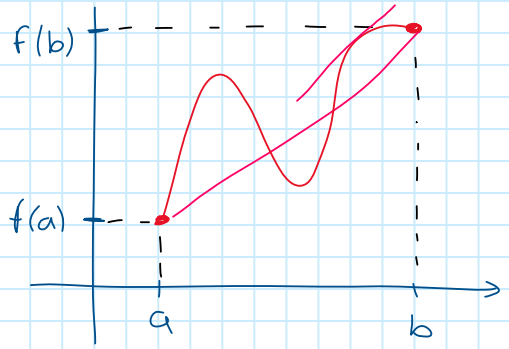
$$g(a) = 0 = g(b)$$

Derivamos

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

El teo Rolle dice que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



TEOREMA 3: Valor de medio de Cauchy

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: I \to \mathbb{R}$ funciones es continua en I y derivable en $\text{int}(I)$. Se tiene que existe $c \in \text{int}(I)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c),$$

en caso de que $g(b) \neq g(a)$, se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

$(2)^3 = 8$ $\qquad$ $(?)^3 = 8$

PROPOSICIÓN 4. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\text{int}(I)$. Si

$$f'(x) = 0$$

para todo $x \in \text{int}(I)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = c$$

para todo $x \in I$, es decir, f es una función constante en I.

PROPOSICIÓN 4. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\text{int}(I)$. Si

$$f'(x) = 0$$

para todo $x \in \text{int}(I)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = c$$

para todo $x \in I$, es decir, f es una función constante en I.

Sup. que f no es constante, existen $x_1, x_2 \in I$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$

Entonces

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c) = 0$$

con c entre x_1, x_2 ...

PROPOSICIÓN 5. Sean $f: I \to \mathbb{R}$ y $g: I \to \mathbb{R}$ funciones continuas en I

y derivables en $\text{int}(I)$. Si

$$f'(x) = g'(x) \qquad \{(f(x) - g(x))' = 0$$

para todo $x \in \text{int}(I)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + c \qquad \{ f(x) - g(x) = c$$

para todo $x \in I$.

Ej) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Tenemos, $x \geq 0$, $x \in [0, +\infty[$

$$f(x) = -1$$

derivamos

$$f'(x) = 0, \quad x \in]0, +\infty[$$

derivamos

$$f'(x) = 0 \quad , \quad x \in]0, +\infty[$$

Por otro lado, $x < 0$, $x \in]-\infty, 0[$

$$f(x) = 1$$

derivamos

$$f'(x) = 0 \quad , \quad x \in]-\infty, 0[$$

Entonces

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 0$$

3. Extremos

En esta sección, asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

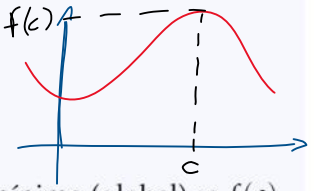
Definición 3: Extremos globales

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo global en c y que su máximo (global) es $f(c)$ si

$$f(x) \leq f(c)$$

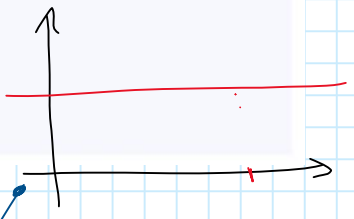
para todo $x \in I$;

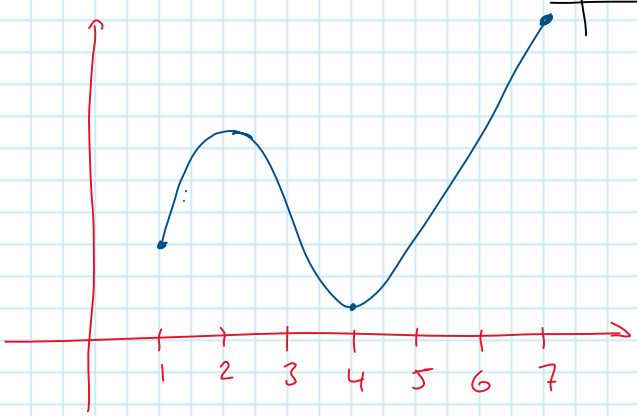


- f alcanza un mínimo global en c y que su mínimo (global) es $f(c)$ si

$$f(x) \geq f(c)$$

para todo $x \in I$.





TEOREMA 6

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que f alcanza su mínimo global y su máximo global en I.

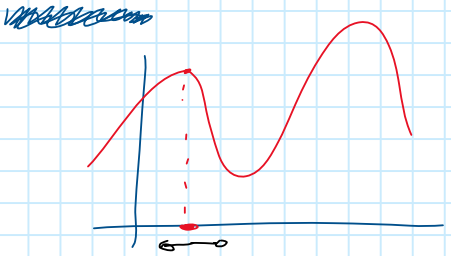
Si denotamos por m a su mínimo y por M a su máximo, se tiene que existe $x_m \in I$ y $x_M \in I$ tales que

$$m = f(x_m) \qquad \text{y} \qquad M = f(x_M)$$

y para todo $x \in I$, se verifica que

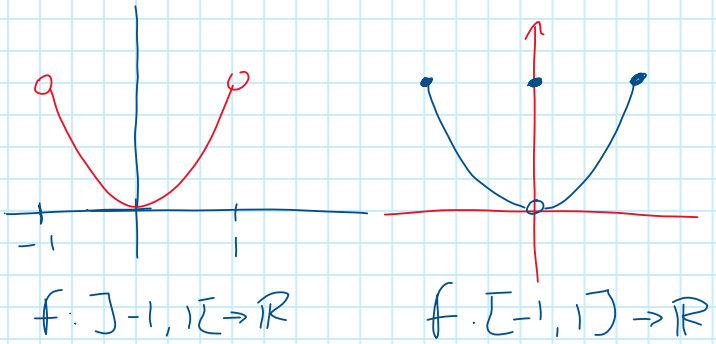
$$m \leq f(x) \leq M.$$

En otras palabras, se tiene que $\text{img}(f) = [m, M]$.



Clase 2018/11/09

viernes, 9 de noviembre de 2018 15:40



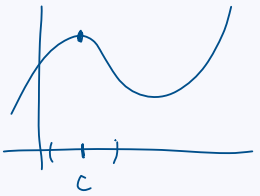
DEFINICIÓN 4: Extremos locales

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que

- f alcanza un máximo local en c y es igual a , y su máximo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que

  $$f(x) \leq f(c)$$

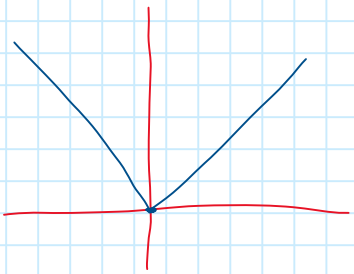
  para todo $x \in [c-r, c+r] \cap I$;



- f alcanza un mínimo local en c, y su mínimo local es $f(c)$, si existe $r > 0$ tal que

  $$f(x) \geq f(c)$$

  para todo $x \in [c-r, c+r] \cap I$.



DEFINICIÓN 5: Puntos críticos

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Decimos que c es un punto crítico de f si

- f no es derivable en c, o
- f es derivable en c y $f'(c) = 0$.

TEOREMA 7

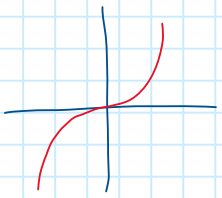
Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua y $c \in \text{int}(I)$. Si f alcanza un extremo local en c, entonces c es un punto crítico de f.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3$

Derivamos $f'(x) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

Tomemos $f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0$



Sean $a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto ax^2 + bx + c$

Derivamos $f'(x) = 2ax + b$

Tomemos $f'(x) = 0 \iff 2ax + b = 0$

$\iff x = \frac{-b}{2a}$

PROPOSICIÓN 8. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función continua en I, se tiene que f alcanza sus extremos globales en puntos críticos del interior de I o en los extremos de I.

$f: [-1, 4] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 3x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 9x^2 - 2x$

Los puntos críticos son: $0, \ 4/9$

x	$f(x)$
0	0
$4/9$	$\approx -0{,}13$
-1	-5
4	160

4. Monotonía

En esta sección, asumiremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $I \subseteq A$.

Teorema 9: Monotonía

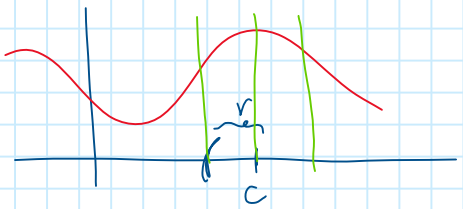
Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en $\operatorname{int}(I)$. Se tiene que

- si $f'(x) > 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente creciente en I;
- si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es creciente en I;
- si $f'(x) < 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es estrictamente decreciente en I; y
- si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in \operatorname{int}(I)$, entonces f es decreciente en I.

Proposición 10. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y $c \in \operatorname{int}(I)$. Se tiene que

$f'(x) \geq 0,\ x \in]c-r, c[$

- si existe $r > 0$ tal que f es creciente en $]c-r, c[$ y decreciente en $]c, c+r[$, entonces f alcanza un máximo local en c;
- si existe $r > 0$ tal que f es decreciente en $]c-r, c[$ y creciente en $]c, c+r[$, entonces f alcanza un mínimo local en c.



Teorema 11: Criterio de la primera derivada para extremos

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y $c \in \operatorname{int}(I)$ un punto crítico de f. Suponga que existe $R > 0$ tal que f es derivable en $(]c-R, c+R[\setminus \{c\}) \cap I$. Se tiene que

- si existe $r > 0$ tal que $f'(x) \geq 0$ para $x \in]c-r, c[$ y $f'(x) \leq 0$ para $x \in]c, c+r[$, entonces f alcanza un máximo local en c;
- si existe $r > 0$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $x \in]c-r, c[$ y $f'(x) \geq 0$ para $x \in]c, c+r[$, entonces f alcanza un mínimo local en c.

Este teorema se lo puede parafrasear como sigue:

- si cerca del punto c, f' cambia de negativa a positiva en c, recorriendo de izquierda a derecha, entonces f alcanza un ~~máximo~~ mínimo local en c;
- si cerca del punto c, f' cambia de positiva a negativa en c, recorriendo de izquierda a derecha, entonces f alcanza un ~~mínimo~~ maximo local en c.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2+4x-2$$

Determinemos los puntos criticos para ello, derivemos:

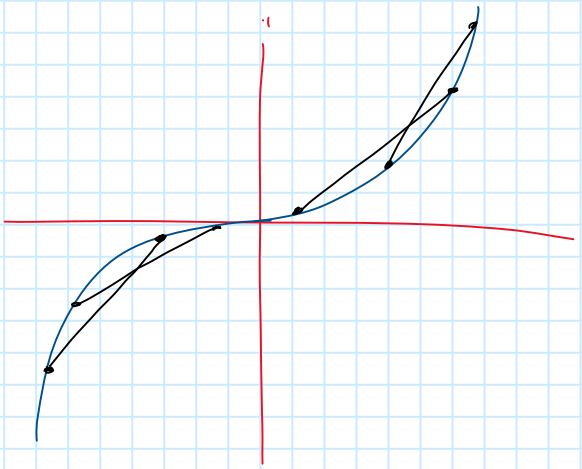
$$f'(x)=2x+4, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ademos

$$f'(x)=0 \iff 2x+4=0 \iff x=-2$$

Ahora, analicemos los "signos" de la derivada cerca de -2.

		-2	
$2x+4$	$-$	0	$+$
	$-$		$+$



5. Convexidad

En esta sección, asumiremos que $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $A \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $I \subseteq A$.

Definición 6: Convexidad y concavidad

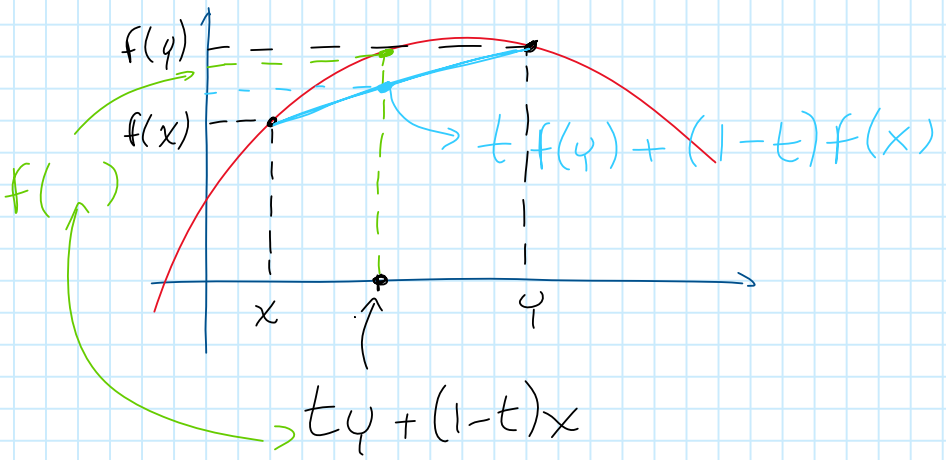
Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es

- convexa en I si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x);$$

- cóncava en I si para todo $x, y \in I$ y todo $t \in [0,1]$ se tiene que

$$f(ty + (1-t)x) \geq tf(y) + (1-t)f(x).$$



Se puede parafrasear el teorema anterior se la siguiente manera: se dice que f es

- convexa en I si para todo $x, y \in I$ la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda sobre el gráfico de f.
- cóncava en I si para todo $x, y \in I$ la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ queda bajo el gráfico de f.

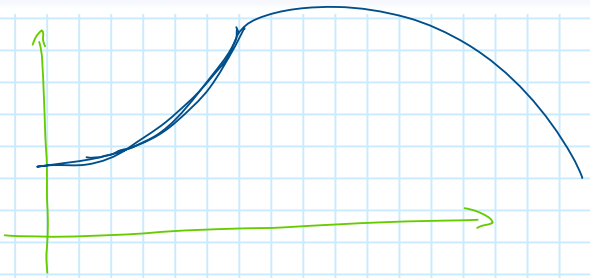
En la literatura, se puede encontrar que se nombra "cóncava hacia arriba" en lugar de "convexa" y "cóncava hacia abajo" en lugar de "concava".

Teorema 12: Criterio de la primera derivada para la convexidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en I, con I un intervalo abierto. Se tiene que

- si f' es creciente en I, entonces f es convexa en I; y
- si f' es decreciente en I, entonces f es cóncava en I.

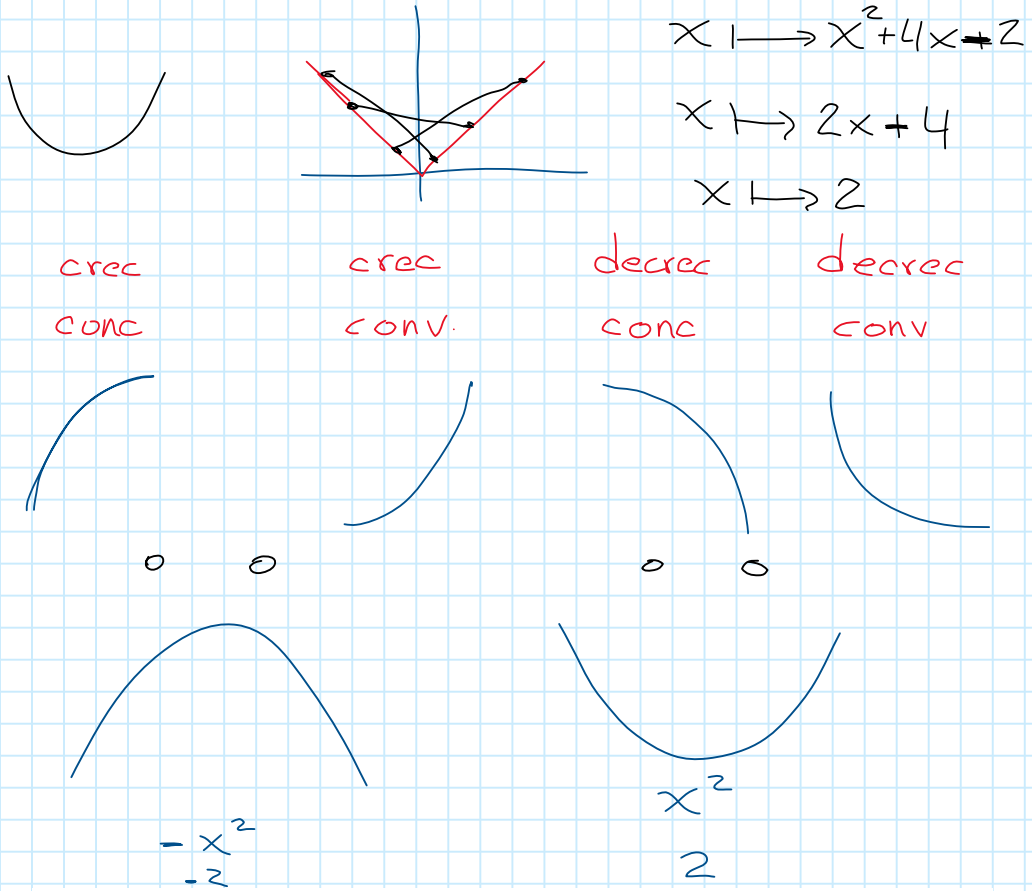
- si f' es decreciente en I, entonces f es cóncava en I.



TEOREMA 13: Criterio de la segunda derivada para la convexidad

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua en I y dos veces derivable en I, con I un intervalo abierto. Se tiene que

- f es convexa en I si y solo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$; y
- f es cóncava en I si y solo si $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.



DEFINICIÓN 7: Puntos de inflexión

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in \text{int}(I)$. Si existe $r > 0$ tal que

- f es convexa en $[c-r, c]$ y
- f es cóncava en $[c, c+r]$,

o viceversa, se dice que f tiene un punto de inflexión en c y al punto $(c, f(c))$ se lo llama punto de inflexión.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

		0	
$6x$	$-$	0	$+$
	$-$		$+$
	$\cap$		$\cup$

PROPOSICIÓN 14. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función y $c \in I$. Si tiene que f tiene un punto de inflexión en c, entonces

- f no es dos veces derivable en c, o
- f es dos veces derivable en c y $f''(c) = 0$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^4$

$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$

$g'(x) =$

TEOREMA 15: Criterio de la segunda derivada para extremos

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I tal que f'' es continua en I. Se tiene que si

- si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f alcanza un ~~máximo~~ mínimo local en c;
- si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f alcanza un ~~mínimo~~ maximo local en c.

$f(c+h) = f(c) + \frac{f''(c)}{2} h^2 +$

$f(c+h) \geq f(c)$

Ej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$.

Derivamos $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Buscamos puntos críticos

$$f'(x)=0 \iff -\operatorname{sen}(x)=0$$

$$\iff x=0+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Derivo nuevamente

$$f''(x)=-\cos(x)$$

evaluamos en los puntos críticos.

$$f''(k\pi)=-\cos(k\pi)=\begin{cases}-1 & k \text{ es par}\\ 1 & k \text{ es impar}\end{cases}$$

Clase 2018/11/13

martes, 13 de noviembre de 2018 15:50

$$V: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

Derivemos

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$$

para $x \in \mathbb{R}$. Hallamos los puntos críticos

$$V'(x) = 0 \iff 12x^2 - 96x + 144 = 0$$
$$\iff x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$\iff (x = 2 \quad \vee \quad x = 6)$$

Los puntos críticos son 2 y 6

Volvemos a derivar

$$V''(x) = 24x - 96$$

para $x \in \mathbb{R}$. Evaluamos

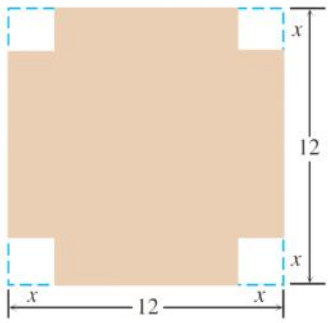
$$V''(2) = -48 < 0, \quad V''(6) = 48 > 0$$

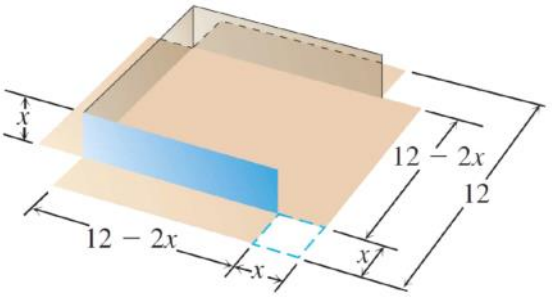
Entonces, V alcanza un máximo local en en 2 y alcanza un mínimo local en 6.

1. Optimización

Resolver un problema de optimización significará determinar los valores extremos de una función y los puntos donde los alcanza.
Si la función representa una determinada situación, el proceso de obtención de esa función a partir de la situación se conoce con el nombre de *modelización* o *modelamiento*. En este proceso, es importante enfatizar en la definición de la función (dominio, recorrido y regla de asignación).

EJERCICIO 1. Una caja sin tapa se construye cortando pequeños cuadrados congruentes de las esquinas de una cartulina de 12 cm por 12 cm y doblando los lados hacia arriba. ¿De qué tamaño se deben cortar los cuadros de las esquinas para que la caja tenga la máxima capacidad o volumen posible?





Tomaremos

* x. long del corte, en cm.
* $V(x)$ volumen de la caja, en cm^3, cuando se realiza el corte de x cm.

Con esto

$$V : [0,6] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x(12-2x)(12-2x)$$

Entonces la función alcanza sus extremos en 0, 2, o 6 Evaluamos

$$V(0) = 0$$
$$V(2) = 128$$
$$V(6) = 0$$

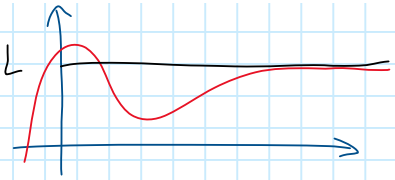
2. GRAFICACIÓN DE CURVAS

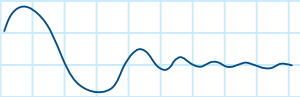
DEFINICIÓN 1: Asíntotas horizontales

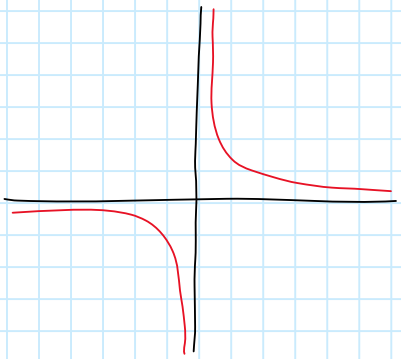
Dada una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que la gráfica de f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = L$ si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L.$$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L.$



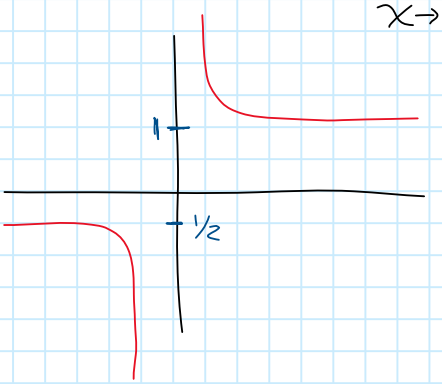




$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$y = 0$ es una asíntota

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$



DEFINICIÓN 2: Asíntotas verticales

Dada una función $f: I \to \mathbb{R}$, se dice que la gráfica de f tiene una asíntota ~~horizontal~~ verticales de ecuación $x = a$ si f no es continua en a y

$$\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Ej $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{(x+1)^2}{1+x^2}$

Asíntotas horizontales

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{1+x^2} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)}{1+x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

La función tiene una asíntota de ec

$$y = 1.$$

Ej. $g: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2+4}{2x}$$

Asintotas horizontales

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{2x} = +\infty$$

$$= -\infty$$

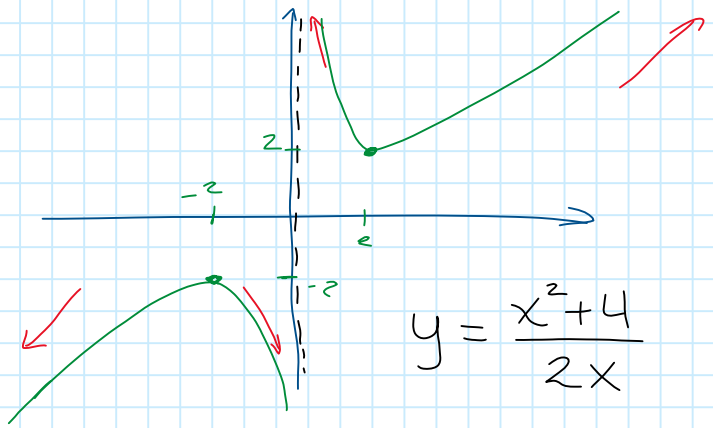
Asintotas verticales:

la func puede ser discontinua en $x=0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2+4}{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$$

Ent. tiene asíntota de ec $x=0$



$$y = \frac{x^2+4}{2x}$$

Tenemos

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2} \qquad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)' = \frac{(x^2+4)'2x - (x^2+4)(2x)'}{\quad}$$

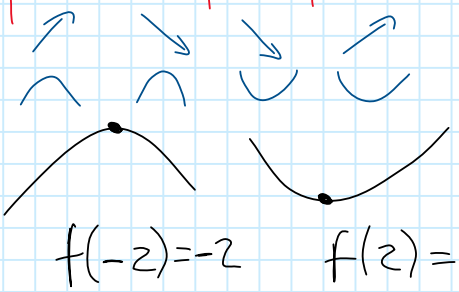
$$\left(\frac{x^2+4}{2x}\right)' = \frac{(x^2+4)'2x-(x^2+4)(2x)'}{4x^2}$$

$$= \frac{(2x)2x-(x^2+4)2}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2-2x^2-8}{4x^2}$$

$$= \frac{2x^2-8}{4x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$$

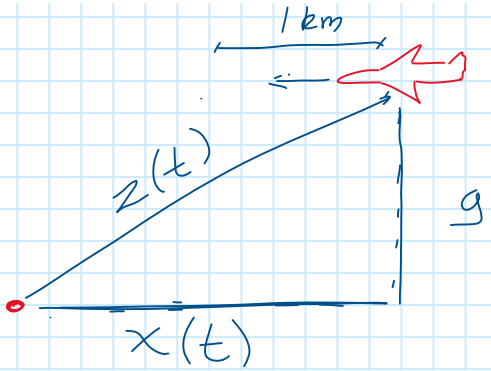
	-2		0		2
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$



$f(-2)=-2 \qquad f(2)=2$

3. Razón de cambio relacionadas

Ejercicio 2. Un radar que está a 12 kilómetros de una base militar detecta que un avión sobrevuela la base a 9 000 metros de altura y que se dirige hacia el radar, manteniendo su altitud y velocidad. Si la rapidez con que decrece la distancia entre el avión y el radar es de 500 kilómetros por hora, ¿a qué velocidad vuela el avión?

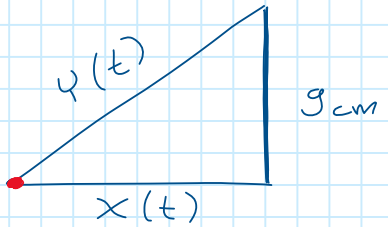


$$(x(t))^2 + 9^2 = (z(t))^2$$

$$2x(t)x'(t) = 2z(t)z'(t)$$

Clase 2018/11/16

miércoles, 14 de noviembre de 2018 8:58



El cambio de $x(t)$ respecto al tiempo $x'(t)$

$y'(t) = ?$

$$(x(t))^2 + 9^2 = (y(t))^2$$

Derivo respecto a t

$$2(x(t)) \cdot x'(t) = 2(y(t))y'(t)$$

Despejo

$$y'(t) = \frac{x(t)\,x'(t)}{y(t)}$$

Supongamos $t=0$, $x(0)=5$; $x'(0)=1$

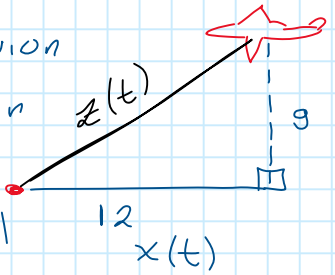
$$y'(0) = \frac{5 \cdot 1}{\sqrt{9^2+5^2}} \approx 0{,}48$$

3. Razón de cambio relacionadas

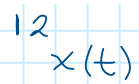
Ejercicio 2. Un radar que está a 12 kilómetros de una base militar detecta que un avión sobrevuela la base a 9 000 metros de altura y que se dirige hacia el radar, manteniendo su altitud y velocidad. Si la rapidez con que decrece la distancia entre el avión y el radar es de 500 kilómetros por hora, ¿a qué velocidad vuela el avión?

Definamos

* t: tiempo en horas
* $z(t)$: distancia entre el avion y el radar en km, en el tiempo t
* $x(t)$: distancia horizontal entre el avión y el radar



* $x(t)$ distancia horizontal entre el avión y el radar en km, en el tiempo t.



Datos:

$$x(0)=12 \qquad z'(0)=-500$$

Buscamos $x'(0)$

Planteamos

$$(z(t))^2=(x(t))^2+9^2$$

Derivamos respecto a t.

$$2(z(t))z'(t)=2(x(t))\cdot x'(t)$$

$$x'(t)=\frac{z(t)z'(t)}{x(t)}$$

Evaluamos en $t=0$.

$$x'(0)=\frac{z(0)z'(0)}{x(0)}$$

$$=\frac{15\,(-500)}{12}$$

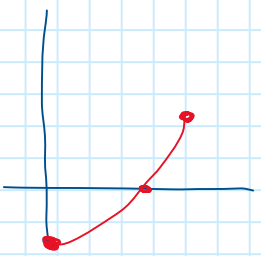
$$=-625$$

Consideremos la ecuación $x^2-2=0$

Tomemos la función $f\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2-2$

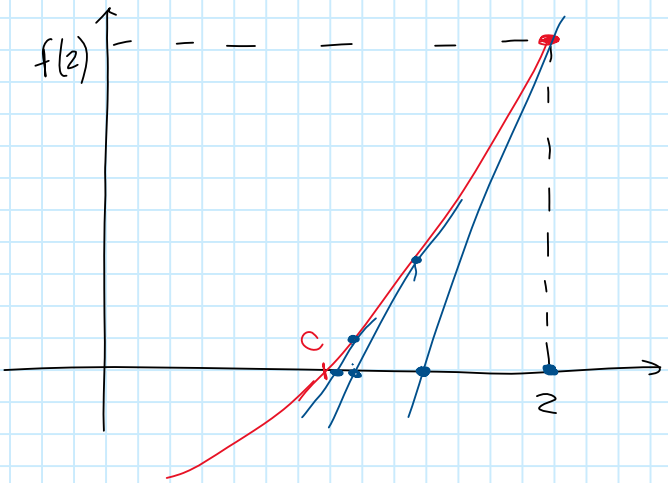
Tenemos que $f(0)=-2$

$f(2)=2$



Por Teo. Val Intermedio, existe $c\in(0,2)$ tal que $f(c)=0$

Existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$



4. Ceros de funciones

En esta sección asumiremos que $I = [a, b]$, con $a < b$.

Definición 3: Método de Newton

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y dos veces derivable tal que

$$f(a)f(b) < 0$$

y existen constantes positivas m y M para las cuales

$$|f'(x)| \geq m \quad \text{y} \quad |f''(x)| < M$$

para todo $x \in I$.

Dado que f es continua, existe $c \in I$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Además, existe un intervalo abierto $J \subseteq I$ que contiene a c tal que para cualquier $x_0 \in J$, la sucesión (x_n) definida recursivamente por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

para $n \in \mathbb{N}$, toma valores cercanos a c a medida que n toma valores "suficientemente grandes".

$f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x$

$f'(x) = 2x$

$x_0 = 2$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{4} = 1.5$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.5 - \frac{0.25}{3} = 1.41$

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \ldots = 1.4142$

2; 1,5; 1,417; 1,4142,

$\cos(x) = x$

$\cos(x) - x = 0$

Definamos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \cos(x) - x$

Notemos $f(0) = 1$

$f(\pi) = -1 - \pi$

Tenemos

$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) - 1$

$x_0 = 0$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1$

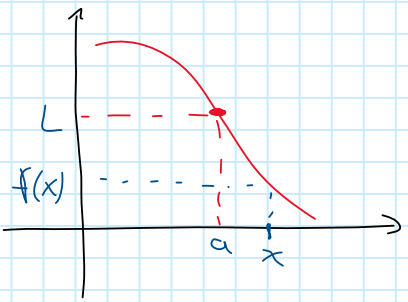
Clase 2018/11/20

martes, 20 de noviembre de 2018 15:56

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



1. Definición formal del límite

En este curso se considera a $L \in \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ como un intervalo, $a \in I$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Definición 1: Límite

Sean

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo abierto que contiene al número a; y
3. $f: A \to \mathbb{R}$ una función tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En otras palabras, la igualdad

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es equivalente lógicamente a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Demostrar que $\lim_{x \to 3} 8x - 15 = 9$

Esto significa, demostrar que

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

Para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}$, se cumple

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow |8x-15-9|<\varepsilon.$$

Sea $\varepsilon>0$, debemos hallar $\delta>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}$, se cumple que

$$0<|x-3|<\delta \Rightarrow |8x-15-9|<\varepsilon.$$

Para $x\in\mathbb{R}$

$$|8x-15-9|=|8x-24|=8|x-3|$$

Para que $|8x-15-9|<\varepsilon$, necesito

$$8|x-3|<\varepsilon, \text{ necesito}$$

$$|x-3|<\varepsilon/8$$

Si tomamos $\delta=\varepsilon/8$, tenemos que, para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple

$$|x-3|<\delta \Rightarrow |8x-15-9|<\varepsilon$$

Demostrar que $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2}=-5$

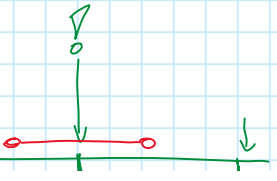
Sea $\varepsilon>0$, debo hallar $\delta>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$ se cumple

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2}-(-5)\right|<\varepsilon$$

Para $x\in\mathbb{R}-\{1,2\}$

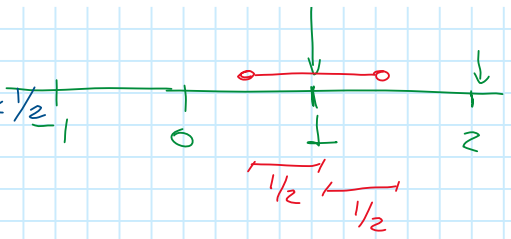
$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2}-(-5)\right|=\boxed{\frac{7}{|x-2|}}|x-1|$$

Si tomamos



Si tomamos

$$|x-1|<1/2 \iff -1/2<x-1<1/2$$



$$\iff 1/2<x<3/2$$

$$\iff -3/2<x-2<-1/2<0$$

$$\iff -2/3>\frac{1}{x-2}>-2$$

$$\iff -14/3>\frac{7}{x-2}>-14$$

$$\implies \frac{14}{3}<\frac{7}{|x-2|}<14$$

Entonces, si $|x-1|<1/2$

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2}-(-5)\right|<14\,|x-1|$$

Por lo tanto, si necesito que

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2}-(-5)\right|<\varepsilon$$

Basta con tener $14|x-1|<\varepsilon$

es decir necesito que

$$|x-1|<\varepsilon/14 \quad \text{y} \quad |x-1|<1/2$$

Si tomamos $\delta=\min\{\varepsilon/14,\ 1/2\}$, tengo que, para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ se cumple

$$|x-1|<\delta \implies$$

$$\implies \left|\frac{2x^2+x-3}{x^2-3x+2}-(-5)\right|<\varepsilon$$

Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim_{x\to a} g(x)=M$

entonces $\lim_{x\to a} f(x)+g(x)=L+M$

Sabemos que

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(x\in A)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$$

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(x\in A)(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-M|<\varepsilon)$$

Sea $\varepsilon>0$, debo hallar $\delta>0$ tal que para todo $x\in A$ se cumple

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)|<\varepsilon.$$

Para $x\in A$ $\quad \{|a+b|\leq |a|+|b|$

$$|f(x)+g(x)-(L+M)|=|(f(x)-L)+(g(x)-M)|$$
$$\leq |f(x)-L|+|g(x)-M|.$$

Para f, para $\varepsilon/2$, existe $\delta_1>0$ tal que para todo $x\in A$ $\left(0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Para g, para $\varepsilon/2$, existe $\delta_2>0$ tal que para todo $x\in A$ $\left(0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Con esto, si tomamos $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ se tiene que, para todo $x\in A$,

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+M)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

PROPOSICIÓN 1. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función tal que $a \in A$, se tiene que f es continua en a si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

DEFINICIÓN 2: Límite laterales

Dados

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo que contiene al número a; y
3. $f: A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Se dice que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se dice que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 3: Límite al infinito

Dados

1. L un número real;
2. I un intervalo no acotado superiormente; y
3. $f: A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A$.

Se dice que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se dice que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se dice que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 4: Límite infinito

Dados

1. a un número real;
2. I un intervalo que contiene al número a; y
3. $f: A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > R.$$

Se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -R.$$

Clase 2018/11/23

viernes, 23 de noviembre de 2018 16:00

DEFINICIÓN 2: Límite laterales

Dados

1. a y L dos números reales;
2. I un intervalo que contiene al número a; y
3. $f: A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Se dice que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se dice que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 3: Límite al infinito

Dados

1. L un número real;
2. I un intervalo no acotado superiormente; y
3. $f: A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A$.

Se dice que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se dice que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 4: Límite infinito

Dados

1. a un número real;
2. I un intervalo que contiene al número a; y
3. $f: A \to \mathbb{R}$ una función real tal que $I \subseteq A \cup \{a\}$.

Se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > R.$$

Se dice que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si para todo $R > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ se cumple que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -R.$$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

función variable variable función

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

$(\forall R > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -R)$

función variable variable función

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$(\forall R > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in A)(x < -M \Rightarrow f(x) > R)$

función variable variable función

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$(\forall R>0)(\exists M>0)(\forall x\in A)(x>M \Rightarrow f(x)<R)$$

función variable variable función

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$(\forall M>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in A)(0<x-a<\delta \Rightarrow f(x)>M)$$

función variable variable función

$$|x-a|<\delta$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty \qquad a<x$$

$$0<x-a<\delta$$

Demuestre que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$

$$\{(\forall \varepsilon>0)(\exists M>0)(x\in\mathbb{R}^*)(x>M \Rightarrow |\tfrac{1}{x}-0|<\varepsilon)$$

Sea $\varepsilon>0$, debo hallar $M>0$ tal que para todo $x\in\mathbb{R}^*$ se cumpla

$$x>\underbrace{M}_{\equiv} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

Tenemos que, para $x\in\mathbb{R}^*$

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|=\frac{1}{|x|}$$

Para que

$$\frac{1}{|x|}<\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon}<|x|$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon}<x \ \vee \ x<-\frac{1}{\varepsilon}$$

Con esto, tomando $M=\frac{1}{\varepsilon}$ tenemos que

$$x>M \Rightarrow x>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$x > M \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Demuestre que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\left\{ (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^*)(0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M) \right.$$

Sea $M > 0$, debo hallar $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^*$ se cumpla

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x^2} > M}$$

Notemos

$$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M}$$

$$\iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Tomemos $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}^*$

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow |x|^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x|^2} > M \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

Demostrar que $\lim_{x \to -\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$

$$\left\{ (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^*)(x < -M \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 0 \right| < \varepsilon) \right.$$

Sea $\varepsilon > 0$, debo hallar $M > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}^*$ se cumpla que

$$x < -M \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Notemos que

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 0 \right| = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|x|} < \frac{1}{|x|}$$

Tenemos

Tenemos

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\iff x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}$$

Tomando $M = \frac{1}{\varepsilon}$, tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}^*$

$$x < -M \Rightarrow x < -\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

Demostrar que $\lim_{x \to 2} \frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} = +\infty$

$$\left\{ (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{3}{5}, 2\right\}\right)\left(0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \right.\right.$$

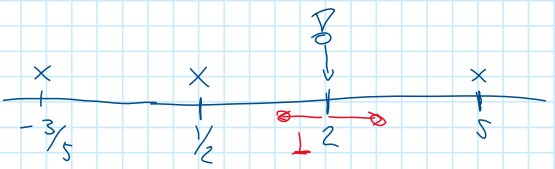
$$\left.\left. \Rightarrow \frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} > M \right)\right)$$

Sea $M > 0$, debo hallar $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{5}, 2\}$ se cumpla que

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} > M$$

Notemos que

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|-5x^2+7x+6|} = \frac{(5-x)(2x-1)}{|x-2||5x+3|} = \frac{(5-x)(2x-1)}{|5x+3|} \cdot \frac{1}{|x-2|}$$



Tomemos $|x-2| < 1$

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1$$

$$\Rightarrow 1 < x < 3$$

. . .

$$2 < 5-x < 4 \; ; \; 1 < 2x-1 < 5 \; ; \; \frac{1}{18} < \frac{1}{|5x+3|}$$

$2 < 5-x < 4$; $1 < 2x-1 < 5$; $\frac{1}{18} < \frac{1}{|5x+3|}$

Entonces

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|5x+3|} > \frac{2 \cdot 1}{18} = \frac{1}{9}$$

Si $|x-2| < 1$

$$\frac{(5-x)(2x-1)}{|5x+3|} \frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{9} \frac{1}{|x-2|}$$

Tenemos

$$\frac{1}{9} \frac{1}{|x-2|} > M \iff |x-2| < \frac{1}{9M}$$

Tomando $\delta = \min\left\{1, \frac{1}{9M}\right\}$ ...

Clase 2018/11/27

lunes, 26 de noviembre de 2018 21:43

$1+2+3+4+5+6+7+8$

$\sum_{k=1}^{8} k = 1+2+3+4+5+6+7+8$

$\sum_{k=1}^{80} k$

1. Notación sigma

Definición 1

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. La **suma desde k igual a 0 hasta n de** a_k, notado por

$$\sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \sum$$

se define de manera recursiva de la siguiente forma:

- $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$; y
- $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}$.

Además, dado $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 < n$, se define

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k.$$

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{4+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1}$$

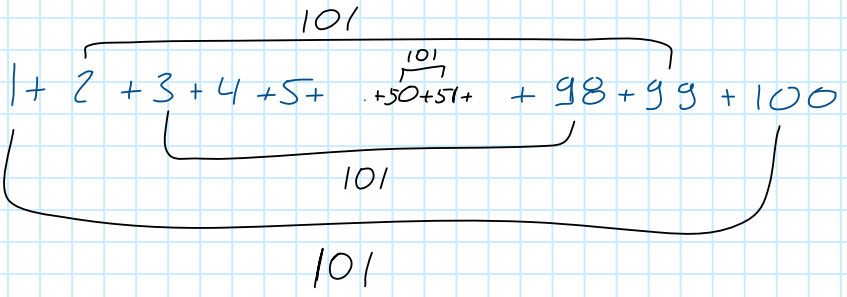
$$= \frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1}$$

TEOREMA 1

Sean $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Se tiene que

- $\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$;
- $\sum_{k=0}^{n} ca_k = c\sum_{k=0}^{n} a_k$;
- $\sum_{k=0}^{n} c = (n+1)c$.

$\sum_{k=0}^{2} c = c + c + c = 3c$

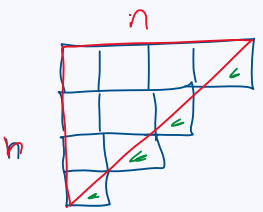


$101 \cdot 50 = 5050$

$\sum_{k=1}^{100} k = \frac{100}{2} \cdot (100+1)$

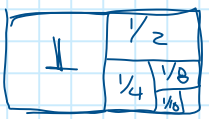
PROPOSICIÓN 2. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{R}^+$.

- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$;
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
- $\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.



$\frac{n \cdot n}{2} + \frac{1}{2}n$

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$



$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

2. Suma de Riemann

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Definición 2

Dado un intervalo $[a, b]$, una **partición del intervalo** $[a, b]$ **de orden** n es un conjunto

$$P = \{x_k \in \mathbb{R} : k = 0, \ldots, n\},$$

tal que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

- A los conjuntos

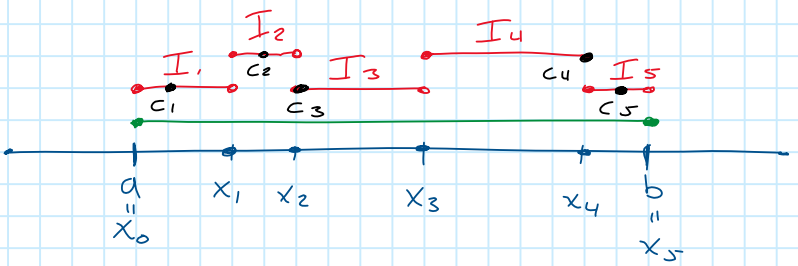
$$I_k = [x_{k-1}, x_k],$$

con $k = 1, \ldots, n$, se los llama **subintervalos de la partición**.

- A las cantidades

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

con $k = 1, \ldots, n$, se las llama la **longitud** del subintervalo I_k.



- A un conjunto

$$C = \{c_k \in I_k : k = 1, \ldots, n\}$$

se lo llama un **conjunto de etiquetas** para P.

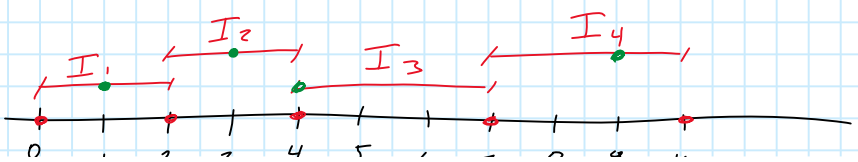
- A un par (P, C) se lo llama una **partición etiquetada** de $[a, b]$.

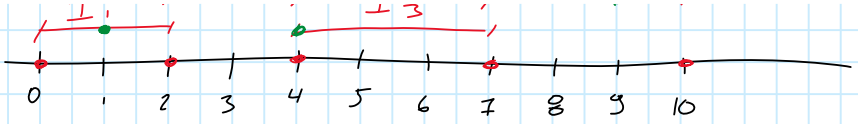
- A la cantidad

$$|P| = \max_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k$$

se la llama **grosor** de la partición.

[0,10]



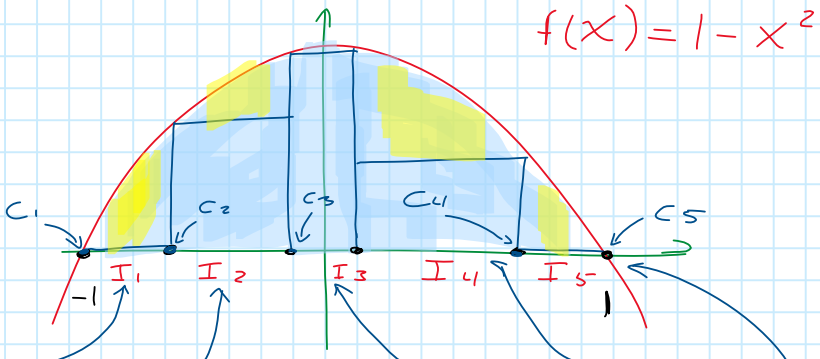


$P = \{0, 2, 4, 7, 10\}$

$|P| = 3$

$C = \{1, 3, 4, 9\}$

$C = \{0, 3, 6, 10\}$



$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + f(c_4)\Delta x_4 + f(c_5)\Delta x_5 = \sum_{k=1}^{5} f(c_k)\Delta x_k$$

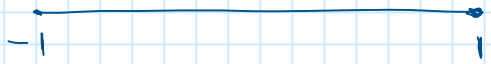
DEFINICIÓN 3

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ un función y (P,C) una partición etiquetada de $[a,b]$ de orden n, entonces

$$S(f,P,C) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

es la **suma de Riemann de f respecto a la partición etiquetada** (P,C).

$f(x) = 1 - x^2$



$P = \{-1, -0.5, 0.02, 1\}$

$C_1 = \{-0.8, -0.5, 0.1, 0.4\}$

$C_2 = \{-1, -0.5, 0.02\}$

Clase 2018/12/10

lunes, 10 de diciembre de 2018 23:18

$|P| < \delta \Rightarrow |S(f,P,C) - I| < \varepsilon$

DEFINICIÓN 4

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ un función e $I \in \mathbb{R}$, se dice que el número I es **la integral de f sobre** $[a,b]$, denotado por

$$I = \int_a^b f(x)\,dx, = \lim_{|P|\to 0} S(f,P,C)$$

si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición P que cumple con $|P| < \delta$ y todo conjunto de etiquetas C de P, se tiene que

$$|S(f,P,C) - I| \leq \epsilon.$$

De existir el número I, se dice que f **es integrable según Riemann**.

PROPOSICIÓN 3. Sea $c \in \mathbb{R}$. La función

$$\begin{aligned} f\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

es integrable y

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Tomemos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición y

$C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ unas etiquetas

$$S(f,P,C) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

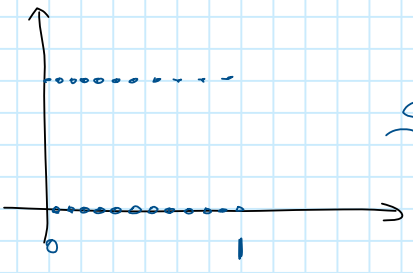
$$= \sum_{k=1}^{n} c\,(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

$$= c\,(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1})$$

$= c(x_n - x_0) = c(b-a)$

$f\ [0,1] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

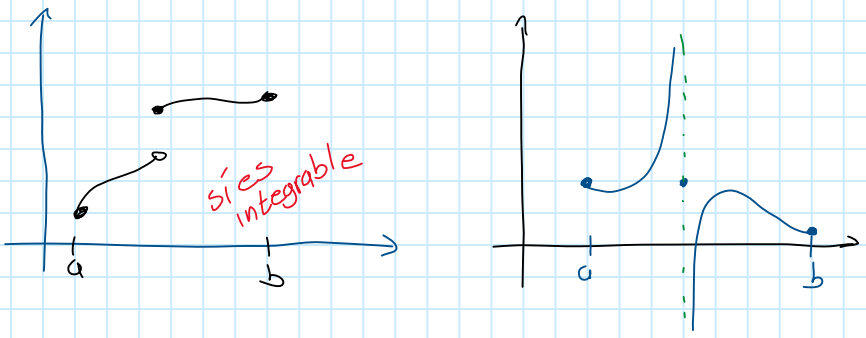


$S(f,P,C) = 1$ ($C \subset \mathbb{Q}$)

$S(f,P,C^*) = 0$

PROPOSICIÓN 4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f es integrable.

PROPOSICIÓN 5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es acotada y discontinua en un número finito de puntos, entonces f es integrable.



PROPOSICIÓN 6. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $f+g$ es integrable y

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

- λf es integrable y

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$

- si $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

COROLARIO 7. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable tal que para todo $x \in [a,b]$, se tiene que

$$f(x) \geq 0,$$

entonces

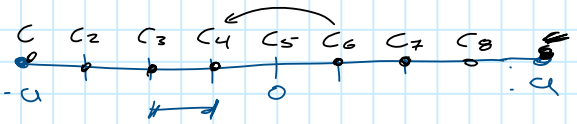
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b 0\,dx = 0(b-a) = 0$$

$f\ [-a,a] \to \mathbb{R}$ una función impar (integrable)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} S(f,P,c)$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

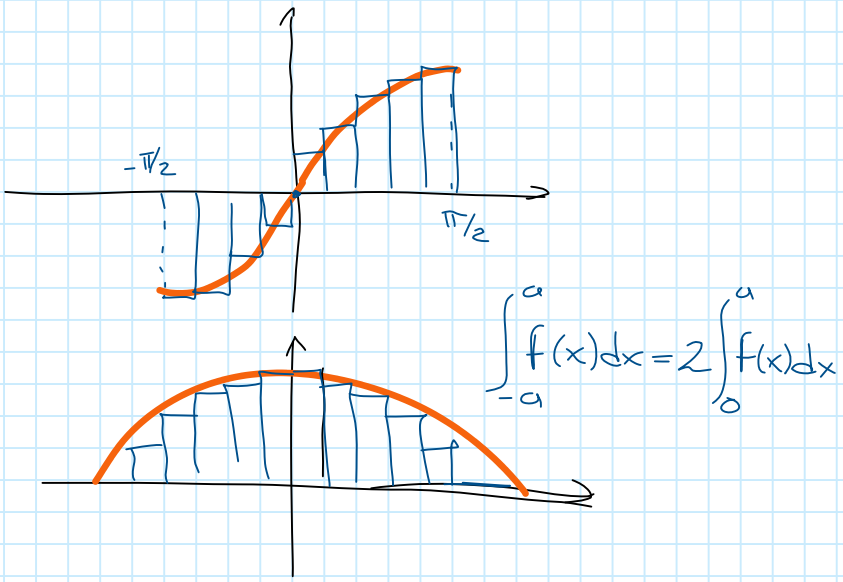


$c_4 = -c_6$

$\frac{a-(-a)}{n} = \frac{2a}{n}$

$f(c_4) = f(-c_6) = -f(c_6)$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\frac{2a}{n} = 0$$



$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

A partir de este punto, consideramos $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $[a,b] \subseteq A$.

DEFINICIÓN 5

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es integrable en $[a,b]$ si $f|_{[a,b]}$ es integrable y se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f|_{[a,b]}(x)\,dx$$

$$\int_0^3 2\,dx = 2(3-0) = 6$$

$$\int_3^0 2\,dx = -\int_0^3 2\,dx = -6$$

$$\int_0^0 2\,dx = 0$$

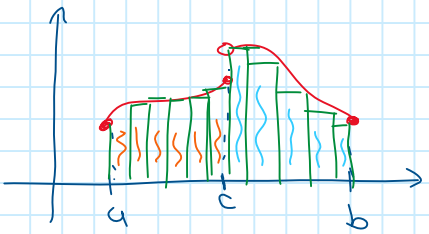
DEFINICIÓN 6

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$. Se define

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

PROPOSICIÓN 8. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$ y $c \in [a,b]$. Se tiene que f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, además

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



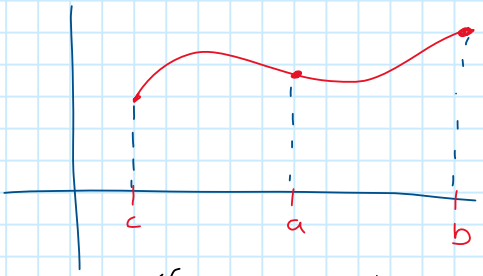
Tenemos $f\colon [-3,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 2 & -3 \le x \le 0 \\ -4 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = \int_{-3}^{0} f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{0} 2\,dx + \int_0^2 -4\,dx = 2(0-(-3)) + (-4)(2-0)$$

$= \cancel{5}\ 6 - 8 = -2$



¿ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$?

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \quad \checkmark$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

PROPOSICIÓN 9. Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a,b]$, $[a,c]$ y $[c,b]$. Se tiene que

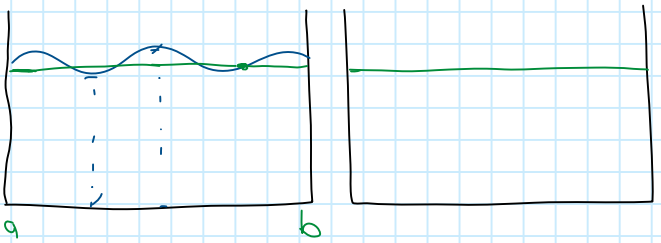
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

TEOREMA 10: Teorema del valor medio para funciones integrables

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Se tiene que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$



DEFINICIÓN 7

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se define **el área bajo la gráfica de f entre las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$** por el número

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por tanto, $A \geq 0$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

Definimos

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Ej: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 2$.

Definamo

$$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 2\,dt$$
$$= 2(x-0) = 2x$$

TEOREMA 11: Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Definamos la función

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Se tiene que F es continua en $[a,b]$ y es diferenciable en $]a,b[$. Además, se verifica que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in]a,b[$.

Tomemos $F\ ]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{t}\,dt$$

Derivamos

$$F'(x) = \left(\int_0^x \frac{1}{t}\,dt\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{\bar{x}} 3\bar{t}^2\,dt\right) = 3x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{2x} \operatorname{sen}(t)\,dt\right) = \operatorname{sen}(2x)\cdot 2$$

$$\frac{d}{dx}\left(F(2x)\right) = F'(2x)\cdot 2 = \operatorname{sen}(2x)\cdot 2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{2x} \cos(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_x^0 \cos(t)\,dt + \int_0^{2x} \cos(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\int_0^x \cos(t)\,dt + \int_0^{2x} \cos(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\int_0^x \cos(t)\,dt + \int_0^{2x} \cos(t)\,dt\right)$$

$$= -\cos(x) + \cos(2x)\cdot 2 .$$

Clase 2018/12/14

viernes, 14 de diciembre de 2018 16:07

$$f \quad \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Definimos

$$F \quad \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

$$F(x) = \ln(x)$$

1. Función Logaritmo y Exponencial

Definición 1: Función logaritmo

A la función

$$\ln: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

se la conoce como función **logaritmo natural**.

$$\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

Si $x > 1$, $1 < t < x$

entonces $\frac{1}{t} > 0$

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt > 0$$

PROPOSICIÓN 1. Se tiene que

- $\ln(x) > 0$ para todo $x > 1$;
- $\ln(x) < 0$ para todo $0 < x < 1$;
- $\ln(1) = 0$;

$0<x<1$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0$

PROPOSICIÓN 2. Se tiene que

- ln es una función continua;
- ln es una función derivable;
- $\frac{d}{dx}(\ln(x)) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$;
- ln es estrictamente creciente

$\frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right) = \frac{1}{x}$

$\ln(x)$

PROPOSICIÓN 3. Se tiene que

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ para todo x y todo y en $\mathbb{R}^+$;
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ para todo x y todo y en $\mathbb{R}^+$; y
- $\ln(x^r) = r\ln(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y todo $r \in \mathbb{Q}$.

Fijamos $y \in \mathbb{R}^+$

$\left(\ln(xy)\right)' = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto

$$\ln(xy) = \ln(x) + c$$

Evaluemos en $x = 1$

$$\ln(y) = \ln(1) + c \quad (\ln(1) = 0)$$

Derivemos

$$(\ln(x^r))' = \frac{1}{x^r} \cdot (r\,x^{r-1}) = r \cdot \frac{1}{x}$$

$$(r\ln(x))' = r\,\frac{1}{x}$$

Como ambas funciones son iguales

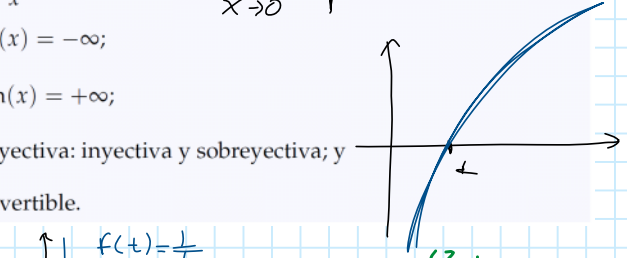
$$\ln(x^r) = r\ln(x) + c$$

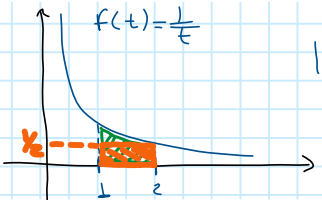
entonces, con $x = 1$, $c = 0$

$$\ln(x^r) = r\ln(x)$$

PROPOSICIÓN 4. Se tiene que

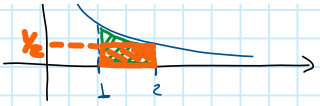
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$ → $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty;$
- $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty;$
- ln es biyectiva: inyectiva y sobreyectiva; y
- ln es invertible.





$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt > \frac{1}{2}$$

$$\ln(2) > \frac{1}{2}$$



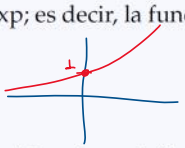
$\ln(2) > \frac{1}{2}$

$\ln(2^n) = n\ln(2) > \frac{n}{2}$

DEFINICIÓN 2

A la función inversa de ln se le representa por exp; es decir, la función

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \ln^{-1}(x) \end{aligned}$$



se la conoce como función **exponencial natural**. Además, se define

$$e = \exp(1).$$

PROPOSICIÓN 5. Se tiene que, para todo $x \in \mathbb{R}^+$

$$\exp(\ln(x)) = x$$

y para todo $y \in \mathbb{R}$

$$\ln(\exp(y)) = y.$$

PROPOSICIÓN 6. Se tiene que

- exp es una función continua;
- exp es una función derivable;
- $\frac{d}{dx}(\exp(x)) = (\exp(x))' = \exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- exp es estrictamente creciente.

$$\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \frac{d}{dx}\left(\ln^{-1}(x)\right)$$

$$= \frac{1}{\ln'\left(\ln^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\ln^{-1}(x)}} = \exp(x)$$

PROPOSICIÓN 7. Se tiene que

- $\exp(0) = 1$ $\quad \ln(1) = 0$
- $\exp(a+x) = \exp(a)\exp(x)$, para todo $a, x \in \mathbb{R}$;
- $\exp(a-x) = \frac{\exp(a)}{\exp(x)}$, para todo $a, x \in \mathbb{R}$;
- $\exp(rx) = (\exp(x))^r$, para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y $r \in \mathbb{Q}$.

$$\ln(\exp(a)\exp(x)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(x))$$

$$= a + x$$

$\exp(a)\exp(x) = \exp(a+x)$

PROPOSICIÓN 8. Se tiene que

$$x^r = \exp(r\ln(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y $r \in \mathbb{Q}$.

$\ln(x^r) = r\ln(x)$

DEFINICIÓN 3: Exponencial generalizada

Se define

$$x^a = \exp(a\ln(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$ y $a \in \mathbb{R}$.

$$2^\pi = \exp(\pi\ln(2)) = \ln^{-1}\left(\pi\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt\right)$$

$$(x^\pi)' = \left(\exp(\pi\ln(x))\right)'$$

$$= \exp(\pi\ln(x))\cdot(\pi\ln(x))'$$

$$= \exp(\pi\ln(x))\cdot\pi\,\frac{1}{x}$$

$$= x^\pi\cdot\pi\frac{1}{x} = \pi x^{\pi-1}$$

Con esto, se tiene que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \exp(x).$$

$e^x = \exp(x\ln(e))$

$\ln(e) = 1$

$\ln(\exp(1))$

Además,

$$\frac{d}{dx}(e^x) = (e^x)' = e^x.$$

Feo :($\hookrightarrow x e^{x-1}$ ¡Nunca en la vida!

$$\left(e^{x^2}\right)' = \left(\exp(x^2)\right)' = \exp(x^2)\cdot 2x$$

$$= 2xe^{x^2}$$

$(2^x)' = \varphi'$

Tomemos $\varphi = 2^x$

$\ln(\varphi) = \ln(2^x) = x\ln(2)$

Derivamos

$\frac{1}{\varphi}\cdot\varphi' = \ln(2)$

$\varphi' = \varphi\ln(2) = 2^x\ln(2)$

$$y' = y\ln(2) = 2^x \ln(2)$$

entonces $(2^x)' = 2^x \ln(2)$

Calcular $(x^x)'$

Tomemos $y = x^x$, quiero calcular y'

tomemos los logaritmo

$$\ln(y) = x\ln(x)$$

derivamos

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}$$

$$y' = (\ln(x)+1)\cdot x^x$$

$$\left((x-3)^7(x+1)^2\right)'$$

Tomemos $y = (x-3)^7(x+1)^2$, calculando el logaritmo

$$\ln(y) = 7\ln(x-3) + 2\ln(x+1)$$

Derivamos

$$\frac{1}{y}y' = 7\frac{1}{x-3} + 2\frac{1}{x+1}$$

entonces $y' = \left(\frac{7}{x-3} + \frac{2}{x+1}\right)(x-3)^7(x+1)^2$

PROPOSICIÓN 9. Se tiene que

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$$

tomemos

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = L$$

Entonces

$$\ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= 1$$

entonces $L = \exp(1) = e$

PROPOSICIÓN 10. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq -1$. Se tiene que

PROPOSICIÓN 10. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq -1$. Se tiene que

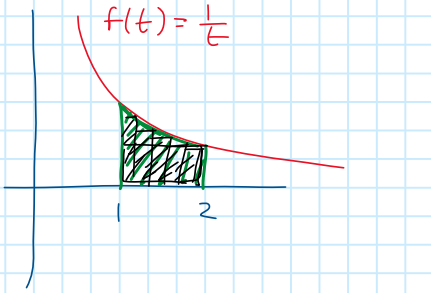
$$\frac{d}{dx}(x^a) = (x^a)' = ax^{a-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

PROPOSICIÓN 11. Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Se tiene que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = (a^x)' = a^x \ln(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$.



$\ln(2) = ?$

Clase 2018/12/18

martes, 18 de diciembre de 2018 15:49

1. Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Además, tomaremos $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo.

Teorema 1: Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $]a,b[$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in]a,b[$. Se tiene que

$$\int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

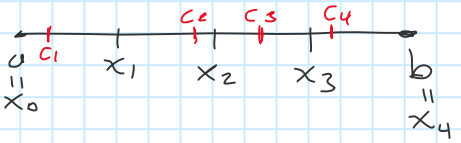
$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\qquad$ $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$

Notemos que $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

entonces.

$$\int_0^1 2x\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 1^2 - 0^2 = 1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} S(f;P,C)$$



$$S(f,P,C) = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + f(c_3)(x_3 - x_2) + f(c_4)(x_4 - x_3)$$

$$= F'(c_1)(x_1 - x_0) + F'(c_2)(x_2 - x_1) + F'(c_3)(x_2 - x_2) + F'(c_4)(x_4 - x_3)$$

$$+ F'(c_3)(x_2 - x_2) + F'(c_4)(x_4 - x_3)$$

$$\frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} = F'(c_1)$$

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} = F'(c_2)$$

$$= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2)$$

$$+ F(x_4) - F(x_3) = F(x_4) - F(x_0)$$

$$= F(b) - F(a)$$

Para $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x),$$

para todo $x \in]a,b[$.

Para $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $]a,b[$, se tiene que

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

para todo $x \in]a,b[$.

DEFINICIÓN 1: Primitiva

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función, se llama **primitiva** de f a cualquier función $F\colon I \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x \in I$.

$x \longmapsto 2x$

$x \longmapsto x^2$ Si es primitiva

$x \longmapsto x^2 + 3$ Si es primitiva

$x \longmapsto x^3$ No es primitiva

$x \longmapsto x^3$
No es primitiva

Con esto, se tiene que dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, entonces

$F'(x)=f(x)$ $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Una notación habitual para el lado derecho de la igualdad es la siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

(El punto que aparece al final de la línea es el "punto final" de la oración; no es parte de la representación de $F(b) - F(a)$.

TEOREMA 2

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, entonces f tiene una primitiva.

¿cuál es la primitiva de $x \mapsto e^{x^2}$?

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

$$F'(x) = e^{x^2}$$

PROPOSICIÓN 3. Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $F\colon I \to \mathbb{R}$ una primitiva de f, para todo $c \in \mathbb{R}$, la función

$$\begin{aligned} G\colon\ I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) + c \end{aligned}$$

también es una primitiva de f.

PROPOSICIÓN 4. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ dos primitivas de f. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + c$$

para todo $x \in I$.

$x \longmapsto 2x$

Una primitiva es

$$x \longmapsto x^2 + C$$

con $C \in \mathbb{R}$ una constante son todas las primitivas que tiene.

DEFINICIÓN 2: Antiderivada o Integral Indefinida

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ una función. Un representante arbitrario del conjunto de todas las primitivas de la función f es denotado por

$$\int f(x)\,dx,$$

para $x \in I$. A esta función se le denomina **antiderivada** de f o **integral indefinida** de f.

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Entonces

$$\int_0^2 2x\,dx = x^2\Big|_0^2 = (2)^2 - (0)^2 = 4$$

$$= (x^2+1)\Big|_0^2 = (4+1) - (0+1) = 4$$

Consideremos la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x, \end{aligned}$$

tenemos que la función

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2, \end{aligned}$$

es una primitiva de f, por lo tanto

$$\int f(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + c$$

para $x \in \mathbb{R}$, con $c \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 5. Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$ con $n \neq -1$. se tiene que

- $\int 1\,dx = x + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x) + c$, para $x \in \mathbb{R}$;
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$, para $x \in \mathbb{R}^*$;
- $\int e^x\,dx = e^x + c$, para $x \in \mathbb{R}$;

con $c \in \mathbb{R}$.

Una tabla mucho más extensa puede ser encontrada en el apéndice del libro de Thomas.

PROPOSICIÓN 6. Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones con primitivas y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $f + g$ tiene primitiva y

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

para $x \in I$;

- λf tiene primitiva y

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx,$$

para $x \in I$.

$$\int x^3 - 2\cos(x)\,dx$$

$$= \int x^3\,dx - 2\int \cos(x)\,dx$$

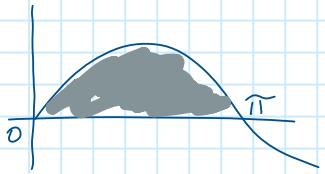
$$= \frac{1}{3+1}x^{3+1} - 2\operatorname{sen}(x) + C$$

$$\int 2x^5 - 7x^2 - 3\operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{6}x^6 - \frac{7}{3}x^3 + 3\cos(x) + C$$

Podemos comprobar

$$\left(\frac{2}{6}x^6 - \frac{7}{3}x^3 + 3\cos(x)\right)' = 2x^5 - 7x^2 - 3\operatorname{sen}(x)$$



$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\cos(\pi) - (-\cos(0))$$

$$= -(-1) + 1 = 2$$

$$\int_{-1}^{2} 2x^3\,dx = \frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{2}$$

$$= \frac{2}{4}(2)^4 - \frac{2}{4}(-1)^4 =$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\underbrace{3x}_{u})\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)\Big|_0^{\pi}$$

2. Técnicas de integración

Teorema 7: Cambio de variable

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función con primitiva y $g\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Se tiene que

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du,$$

para $x \in I$, donde se toma $u = g(x)$.

$$\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\int \left(F(g(x))\right)' dx = \int F'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

entonces $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))$

$$= \int f(u)\, du$$

$$\int \cos(3x)\, dx$$

Tomemos $u = 3x$

$du = 3dx$, $dx = \frac{1}{3} du$

Con esto

$$\int \cos(3x)\, dx = \int \cos(u) \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int \cos(u)\, du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen}(u)\right) = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + c$$

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$$

Tomemos $u = x^2$

$du = 2x\, dx$ $\quad x dx = \frac{1}{2} du$

Entonces

$$\int x \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \int \operatorname{sen}(u) \frac{1}{2} du = -\frac{1}{2} \cos(u) + c$$

$$= -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$$

$$\int e^{x^2} dx$$

Tomemos $u = x^2$

$du = 2x\, dx$ | No sirve.

Clase 2018/12/21

viernes, 21 de diciembre de 2018 12:50

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx$$

Tomando $u = \cos(x)$

$du = -\operatorname{sen}(x)\,dx$

entonces $\operatorname{sen}(x)\,dx = -du$

Con esto $\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\,dx$

$$= -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos(x)| + C$$

$$I = \int \sec(x)\,dx = \int \frac{\sec(x)\left(\sec(x)+\tan(x)\right)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,dx$$

Tomemos $u = \sec(x)+\tan(x)$

$du = \left(\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)\right)dx$

$$I = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

$$= \ln\left|\sec(x)+\tan(x)\right| + C$$

Se puede revisar ejemplos de la aplicación de este teorema en el libro de Thomas, pág. 291.

TEOREMA 8: Integración por partes

Sean $f: I \to \mathbb{R}$, $g: I \to \mathbb{R}$ funciones derivables. Se tiene que

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

para $x \in I$.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int \left((f(x)g(x))' - f'(x)g(x)\right)dx$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

$$\int \underset{f(x)}{u}\,\underset{g'(x)dx}{dv} = \underset{f(x)g(x)}{uv} - \int \underset{g(x)}{v}\,\underset{f'(x)dx}{du}$$

$$\int x\,\mathrm{sen}(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx$$
$$= -x\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + C$$

Tomamos $u = x \Rightarrow du = 1\,dx$

$v = -\cos(x) \Rightarrow dv = \mathrm{sen}(x)\,dx$

$$\int x^2\cos(x)\,dx = x^2\,\mathrm{sen}(x) - 2\int x\,\mathrm{sen}(x)\,dx$$
$$= x^2\,\mathrm{sen}(x) - 2\left(-x\cos(x) + \mathrm{sen}(x)\right) + C$$

Tomando

$u = x^2 \quad du = 2x$

$v = \mathrm{sen}(x) \quad dv = \cos(x)\,dx$

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int 1\,dx$$

$u = \ln(x) \quad du = \frac{1}{x}dx$

$v = x \quad dv = 1\,dx$

$= x\ln(x) - x + C$

Se puede revisar ejemplos de la aplicación de este teorema en el libro de Thomas, pág. 450.

2.1 Integrales de productos de potencias de senos y cosenos

Para integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)\,dx$$

con $n, m \in \mathbb{N}$, se tienen tres casos.

- Si m es impar, se tiene $m = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}^*$, notamos que

  $$\operatorname{sen}^m(x) = \operatorname{sen}^{2k+1}(x) = (\operatorname{sen}^2(x))^k \operatorname{sen} x = (1-\cos^2(x))^k \operatorname{sen}(x)$$

  y utilizamos el cambio de variable $u = \cos(x)$.

- Si m es par y n es impar, se tiene $n = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}^*$, notamos que

  $$\cos^n(x) = \cos^{2k+1}(x) = (\cos^2(x))^k \cos(x) = (1-\operatorname{sen}^2(x))^k \cos(x)$$

  y utilizamos el cambio de variable $u = \operatorname{sen}(x)$.

- Si m y n son pares, notamos que

  $$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

  y utilizamos uno de los casos anteriores.

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^2(x)\,dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)\,dx$$

$$= \int \left(1 - \cos^2(x)\right) \operatorname{sen}(x) \cos^2(x)\, dx$$

Tenemos

$u = \cos(x)$

$du = -\operatorname{sen}(x)\, dx$

$$= -\int (1 - u^2)\, u^2\, du$$

Para ejemplos detallados, revisar Thomas, pág. 458.

2.2 Sustitución trigonométrica

Para integrales que involucran términos de la forma

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \qquad \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{o} \qquad \sqrt{x^2 - a^2},$$

con $a \in \mathbb{R}$, se toma el cambio de variable

$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \text{o} \qquad \theta = \arccos\left(\frac{x}{a}\right),$$

respectivamente, de donde

$$x = a\tan(\theta) \qquad x = a\operatorname{sen}(\theta) \qquad \text{o} \qquad x = a\cos(\theta),$$

respectivamente y

$$a^2 + x^2 = a^2\sec^2(\theta), \qquad a^2 - x^2 = a^2\cos^2(\theta) \qquad \text{o} \qquad x^2 - a^2 = a^2\tan^2(\theta).$$

Para ejemplos detallados, revisar Thomas, pág. 464.

2.3 Funciones racionales

Tenemos que,

- para $a \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int \frac{1}{x+a}\, dx = \ln|x+a| + c,$$

para $x \neq -a$ y con $c \in \mathbb{R}$;

- para $b, c \in \mathbb{R}$, con $b^2 - 4c < 0$, se tiene que

$$\int \frac{x}{x^2+bx+c}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2bx+c\right) - \frac{b}{\sqrt{4c-b^2}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right) + C$$

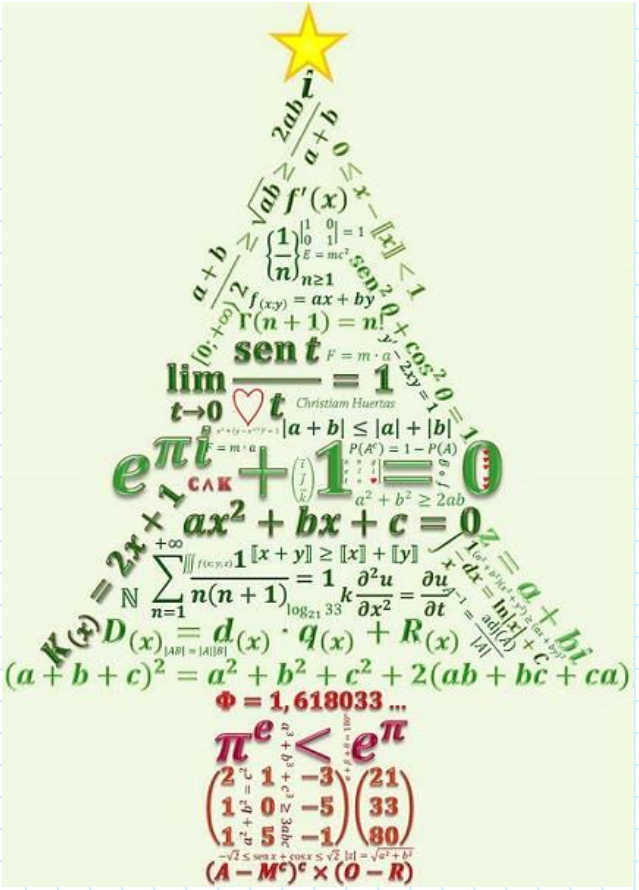
para $x \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$;

- para $b, c \in \mathbb{R}$, con $b^2 - 4c < 0$, se tiene que

$$\int \frac{1}{x^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{4c - b^2}} \arctan\left(\frac{2x + b}{\sqrt{4c - b^2}}\right) + C$$

para $x \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$.

Con esto, y recordando que toda función racional puede ser escrita como combinación lineal de un polinomio y de las funciones antes enlistadas (a este método se lo llama fracciones parciales), se tiene la integral indefinida de cualquier función racional.


Christiam Huertas
$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$
$e^{\pi i} + 1 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$
$\Phi = 1{,}618033\ldots$
$\pi^e < e^\pi$
$(A - M^c)^c \times (O - R)$

Clase 2019/01/15

martes, 15 de enero de 2019 16:10

EJERCICIO 1. Use el cambio de variable $u = x^2 + a^2$ para calcular

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx.$$

Tenemos $u = x^2+a^2$

$du = (2x+0)dx$

$\frac{1}{2}du = x\,dx$

Con esto

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + c.$$

EJERCICIO 2. Calcule mediante un cambio de variable $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$.

Tomemos

$x = a\tan(\theta)$, $dx = a\sec^2(\theta)\,d\theta$

$\operatorname{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta) = 1$

Tenemos

$$\int \frac{a\sec^2(\theta)}{a^2\tan^2(\theta)+a^2}\,d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2(\theta)}{\tan^2(\theta)+1}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Tomando $x = 2\operatorname{sen}(\theta)$

$dx = 2\cos(\theta)d\theta$

Con lo cual:

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2(\theta)}}\,2\cos(\theta)\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta)}}\cos(\theta)\,d\theta = \int \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)}\,d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta + C = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

EJERCICIO 3. Use el cambio de variable $u = \sec(x)$ para calcular

$$\int \sec^5(x)\tan^3(x)\,dx.$$

$$= \int \sec^4(x)\tan^2(x)\sec(x)\tan(x)\,dx$$

$u = \sec(x)$

$du = \sec(x)\tan(x)\,dx$

EJERCICIO 4. Calcule $\int \operatorname{sen}^5(\blacksquare x)\cos^5(\blacksquare x)\,dx$.

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^4(x)\cos(x)\,dx$$

$u = \operatorname{sen}(x)$

$du = \cos(x)\,dx$

$$= \int \operatorname{sen}^5(x)\left(\cos^2(x)\right)^2\cos(x)\,dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^5(x)\left(1-\operatorname{sen}^2(x)\right)^2\cos(x)\,dx$$

Tomando $u = \operatorname{sen}(x)$, $du = \cos(x)\,dx$

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^5(x)\,dx = \int u^5(1-u^2)^2\,du$$

$$= \int u^5\left(1-2u^2+u^4\right)du$$

$$= \int \left(u^5-2u^7+u^9\right)du$$

$$= \frac{1}{6}u^6 - \frac{2}{8}u^8 + \frac{1}{10}u^{10} + C$$

$$= \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6(x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^8(x) + \frac{1}{10}\operatorname{sen}^{10}(x) + C.$$

$$\int \frac{x+3}{x}\,dx = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{3}{x}\right) dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{3}{x}\right) dx$$

$$= x + 3\ln|x| + C$$

$$\int \frac{x}{x-3}\,dx = \int \frac{u+3}{u}\,du$$

Tomemos $u = x-3$, $du = dx$

$$= u + 3\ln|u| + C$$

$$= x - 3 + 3\ln|x-3| + C$$

EJERCICIO 5. Calcule mediante integración por partes $\int \ln(3x+2)\,dx$.

Realizando integracion por partes

$$u = \ln(3x+2) \qquad du = \frac{3}{3x+2}\,dx$$

$$v = x \qquad dv = 1\,dx$$

tenemos

$$\int \ln(3x+2)\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2}\,dx$$

$$= x\ln(3x+2) - 3x + \frac{2}{3}\ln\left|-3 - \frac{9x}{2}\right| + C$$

$$= x\ln(3x+2) - \frac{3x+2}{3} + \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C$$

EJERCICIO 6. Calcule mediante integración por partes $\int \arctan(x)\,dx$.

EJERCICIO 7. Calcule mediante integración por partes

$$\int \exp(2x)\operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

Tomemos $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = \operatorname{sen}(2x)$ $\quad du = 2\cos(2x)\,dx$

Tomemos $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = \operatorname{sen}(2x) \qquad du = 2\cos(2x)\,dx$

$v = \exp(x) \qquad dv = \exp(x)\,dx$

Entonces

$$I = \int \exp(x)\operatorname{sen}(2x)\,dx = \exp(x)\operatorname{sen}(2x) - 2\int \exp(x)\cos(2x)\,dx$$

Tomemos

$u = \cos(2x) \qquad du = -2\operatorname{sen}(2x)\,dx$

$v = \exp(x) \qquad dv = \exp(x)\,dx$

Entonces

$$I = \exp(x)\operatorname{sen}(2x) - 2\left(\cos(2x)\exp(x) + 2\int \operatorname{sen}(2x)\exp(x)\,dx\right)$$

$$I = \exp(x)\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)\exp(x) - 4I$$

Entonces

$$I = \frac{1}{5}\left(\exp(x)\operatorname{sen}(2x) - 2\cos(2x)\exp(x)\right) + C.$$

EJERCICIO 8. Calcular $\int \frac{dx}{x^4 - 27x}$.

$$\frac{1}{x^4 - 27x} = \frac{1}{x(x^3 - 27)} = \frac{1}{x(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx+D}{x^2+3x+9}$$

$$= \frac{A(x-3)(x^2+3x+9) + Bx(x^2+3x+9) + (Cx+D)x(x-3)}{x(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^3 + (3B+D-3C)x^2 + (9B-3D)x - 27A}{x(x-3)(x^2+3x+9)}$$

De donde

$$A+B+C = 0$$
$$3B-3C+D = 0$$
$$9B - 3D = 0$$
$$-27A = 1$$

La sol. es $A=-\frac{1}{27}$, $B=\frac{1}{81}$, $C=\frac{2}{81}$, $D=\frac{1}{27}$

Por lo tanto

$$\frac{1}{x^4-27x} = -\frac{1}{27x} + \frac{1}{81(x-3)} + \frac{\frac{2}{81}x+\frac{1}{27}}{x^2+3x+9}.$$

$$\int \frac{1}{x^4-27x}dx = -\frac{1}{27}\int\frac{1}{x}dx + \frac{1}{81}\int\frac{1}{x-3}dx + \int\frac{\frac{2}{81}x+\frac{1}{27}}{x^2+3x+9}dx$$

$$= -\frac{1}{27}\ln|x| + \frac{1}{81}\ln|x-3| +$$

$$+\frac{2}{81}\int\frac{x}{x^2+3x+9}dx + \frac{1}{27}\int\frac{1}{x^2+3x+9}dx$$

Clase 2019/01/22

martes, 22 de enero de 2019 15:52

EJERCICIO 1. Calcular $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}\,dx$, donde $a > 0$.

Como

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$$

Entonces

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+a^2|\Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\ln|a^2+a^2| - \frac{1}{2}\ln|0^2+a^2|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2a^2| - \frac{1}{2}\ln|a^2| = \frac{1}{2}\ln|2| + \frac{1}{2}\ln|a^2| - \frac{1}{2}\ln|a^2|$$

PROPOSICIÓN 1. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones derivables. Se tiene que

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

para $x \in I$.

EJERCICIO 2. Calcular $\int_0^\pi x\cos(x)\,dx$.

Tomemos

$$u = x \qquad du = dx$$

$$v = \operatorname{sen}(x) \qquad dv = \cos(x)\,dx$$

Con esto

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,dx = x\operatorname{sen}(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$= \pi\operatorname{sen}(\pi) - 0\operatorname{sen}(0) + \cos(x)\Big|_0^\pi$$

$$= 0 - 0 + \big(\cos(\pi) - \cos(0)\big)$$

$= -1 - 1 = -2$.

TEOREMA 2: Cambio de variable

Sean $f: I \to \mathbb{R}$ una función con primitiva y $g: I \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $\text{img}(g) \subseteq I$. Se tiene que

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

EJERCICIO 3. Calcular $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Tomando

$$u = x^3 + 1 \qquad du = 3x^2\,dx$$

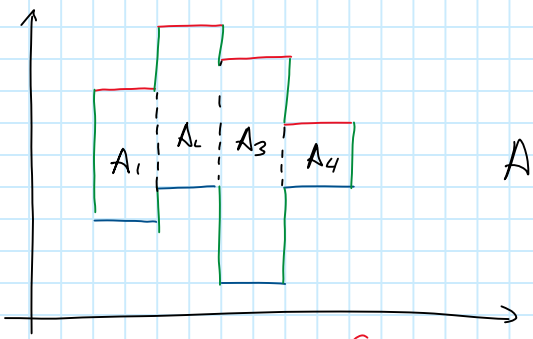
Tenemos

x	u
-1	0
1	2

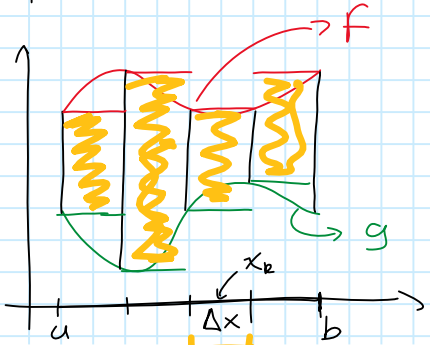
Entonces

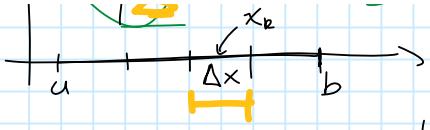
$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{u}\,du = \int_0^2 u^{1/2}\,du$$

$$= \frac{1}{3/2}u^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{3/2}(2)^{3/2} - \frac{1}{3/2}(0)^{3/2}$$



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$





$$\hookrightarrow A_k = |f(x_k) - g(x_k)|\Delta x$$

$$A \approx \sum A_k = \sum |f(x_k) - g(x_k)|\Delta x$$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum |f(x_k) - g(x_k)|\Delta x$$

$$= \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

2. Aplicaciones

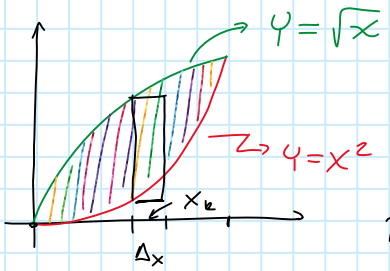
En esta sección consideraremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y una partición P regular de grosor $\Delta x > 0$ y de orden n, con etiquetado C.

Proposición 3. Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas, se tiene que el área delimitada por la gráfica de las funciones f y g entre las rectas de ecuación $x = a$ y $x = b$ puede ser aproximada por

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} |f(c_k) - g(c_k)|\Delta x,$$

por lo tanto

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(c_k) - g(c_k)|\Delta x = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$



$$A_k = (\sqrt{x_k} - x_k^2)\,\Delta x$$

$$A \approx \sum A_k$$

$$\approx \sum (\sqrt{x_k} - x_k^2)\,\Delta x$$

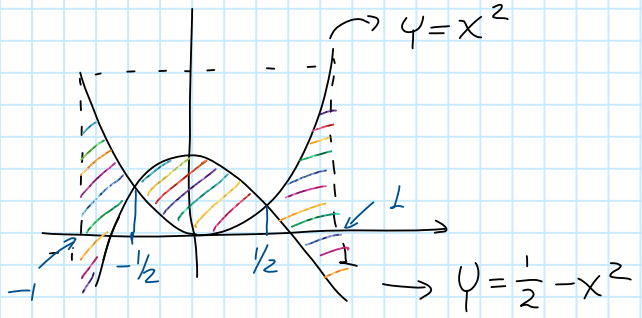
Tomando el límite

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1)^3} - \frac{1}{3}(1)^3 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{0^3} - \frac{1}{3}(0)^3\right)$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1)^3} - \frac{1}{3}(1)^3 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{0^3} - \frac{1}{3}(0)^3\right)$$



$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left| x^2 - \left(\frac{1}{2} - x^2\right)\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{-1/2} \left|x^2 - (1/2 - x^2)\right| dx + \int_{-1/2}^{1/2} \left|x^2 - (1/2 - x^2)\right| dx + \int_{1/2}^{1} \left|x^2 - (1/2 - x^2)\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{-1/2} x^2 - (1/2 - x^2)\, dx + \int_{-1/2}^{1/2} (1/2 - x^2) - x^2\, dx + \int_{1/2}^{1} \left(x^2 - (1/2 - x^2)\right) dx$$

PROPOSICIÓN 4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable, se tiene que la longitud de arco de la gráfica de la función f, denotado por $L(f)$, se puede aproximar por

$$\begin{aligned} L(f) &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x)^2 + (f(x_{k-1}) - f(x_k))^2} \\ &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x}\right)^2}\, \Delta x, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} L(f) &= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{\Delta x}\right)^2}\, \Delta x \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \end{aligned}$$

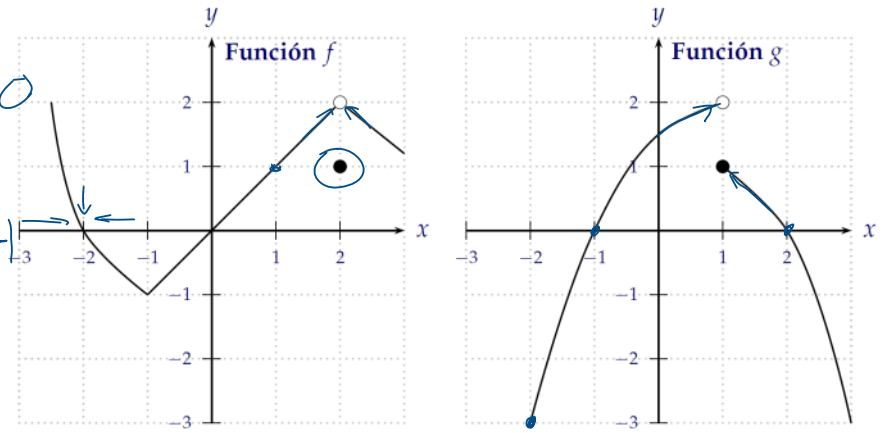
Solución Prueba 01

martes, 27 de noviembre de 2018 15:51

1. Las siguientes son las gráficas de las funciones f y g:

$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -1$



Sobre la base de estas gráficas y apoyándose en el teorema del límite de funciones localmente iguales, conjeture los valores adecuados para los límites de f y g en los puntos -2, -1, 1 y 2. A partir de los valores conjeturados, justifique si existe cada uno de los siguientes límites; en el caso afirmativo, calcule el límite y justifique cada uno de los pasos realizados para el cálculo.

a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \to 1} [f(x) g(x)]$

c) $\lim_{x \to -1} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

d) $\lim_{x \to -2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

a) Como $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$, existe

$\lim_{x \to 2} g(x) = 0$, existe

Entonces $\lim_{x \to 2} f(x) + g(x) = 2$ existe

$\lim_{x \to 1} f(x) g(x)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) g(x) = \left(\lim_{x \to 1^+} f(x) \right) \left(\lim_{x \to 1^+} g(x) \right)$

$= 1 \cdot 1 = 1$

2. Suponga que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función tal que $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

   a) Determine si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$; en el caso afirmativo, determine su valor.

   b) Determine si existe $\lim_{y\to 1} f(y^2-1)$, de existir, determine su valor.

   c) Determine si existe $\lim_{z\to 1}\dfrac{f(z^2-1)}{z-1}$, de existir, determine su valor.

$$f(x)=\frac{f(x)}{x}\cdot x$$

$$\lim_{y\to 1} f(y^2-1)=\lim_{x\to 0} f(x)=0 \qquad x=y^2-1$$

$$\frac{f(z^2-1)}{z-1}=\frac{f\left((z-1)(z+1)\right)(z+1)}{(z-1)(z+1)}$$

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$-x^2<2f(x)-3<\frac{2x^2}{\operatorname{sen}(2x)}\cdot\frac{x}{2}$$

para todo $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$. Demuestre que existe el límite

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

y calcule su valor.

4. Demuestre que para todo $n\in\mathbb{N}^*$, se verifica la igualdad

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0.$$

Sugerencia: utilice inducción matemática.

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ $\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\end{array}\right.$

ii) Suponemos que $\lim \dfrac{1}{x^n}=0$

ii) Suponemos que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

Recuperación

viernes, 4 de enero de 2019 15:39

1. **Límite y continuidad:** ¿La función

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si } x < 0, \\ 1+x^2 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$?

Sol:

Si $x<0$, entonces $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ por lo tanto, f es continua en x

Si $x>0$, entonces $f(x)=1+x^2$ por lo tanto, por ser un polinomio f es continua en x

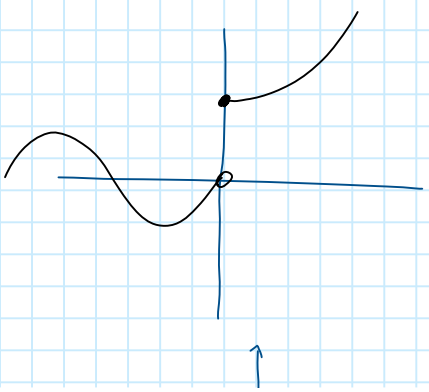
Para $x=0$, busquemos si el límite existe, calculemos los límites laterales.

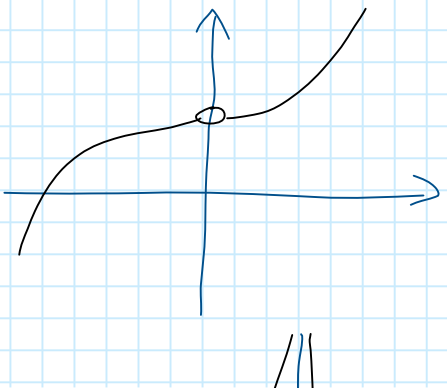
* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 1+x^2 = 1$

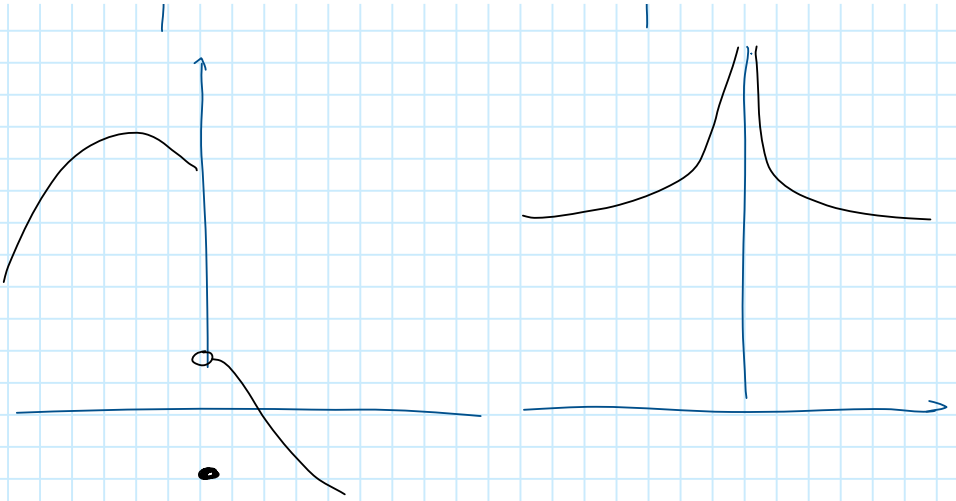
* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0$

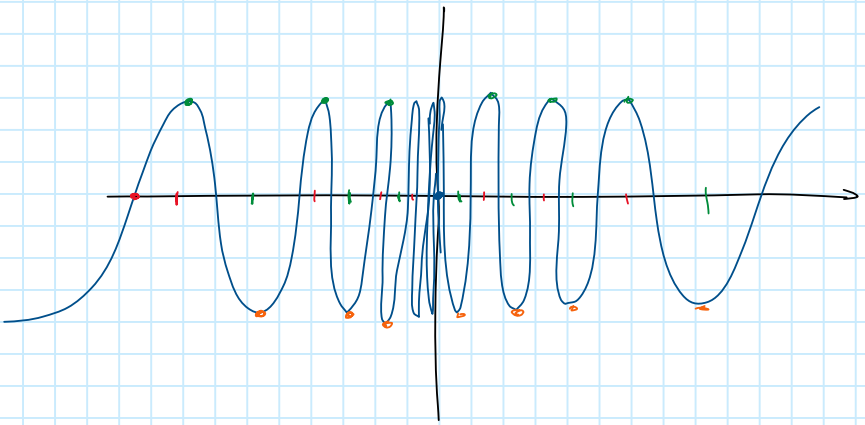
Como los límites son diferentes, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Por lo tanto, no es continua en 0.

Con esto, f es cont en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.









2. **Límite y continuidad:** Sea la función

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Muestre que f es una función acotada, sin embargo

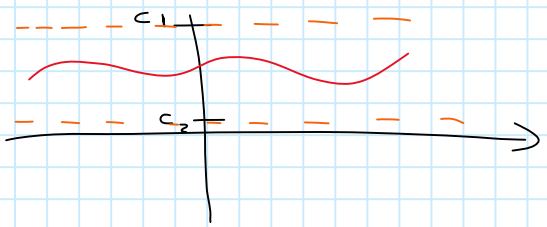
$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

no existe.

Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es acotada si existen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$c_2 \leq f(x) \leq c_1$$

para todo $x \in A$.



Como

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

se cumple para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, f es acotada.

No temos que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \iff \frac{1}{x} = \pi/2 + 2k\pi$$

$$\iff x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \iff \frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\iff x = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$$

Tenemos que

x	$f(x)$
$\frac{2}{\pi}$	1
$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}$	1

x	$f(x)$
$\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi}$	-1
$\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+4\pi}$	-1

3. **Límite y continuidad:** Sea la función

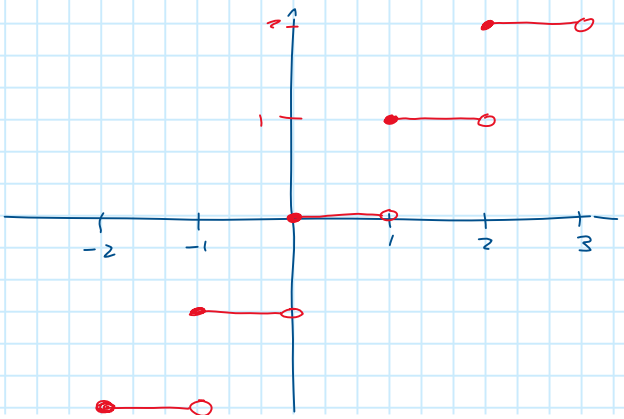
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \lfloor x^2 - 2x \rfloor.$$

Determine la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -1} f(x)$.
b) $\lim_{x\to 0} f(x)$.
c) $\lim_{x\to 2} f(x)$.
d) $\lim_{x\to \sqrt{3}} f(x)$.

$\lfloor 3.2 \rfloor = 3 \quad \lfloor 2 \rfloor = 2$

$\lfloor 2.8 \rfloor = 2 \quad \lfloor -0.1 \rfloor = -1$



Calculemos

1) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \lfloor x^2 - 2x \rfloor$

2) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \lfloor x^2 - 2x \rfloor$

Para 1), tomemos $y = x^2 - 2x$,

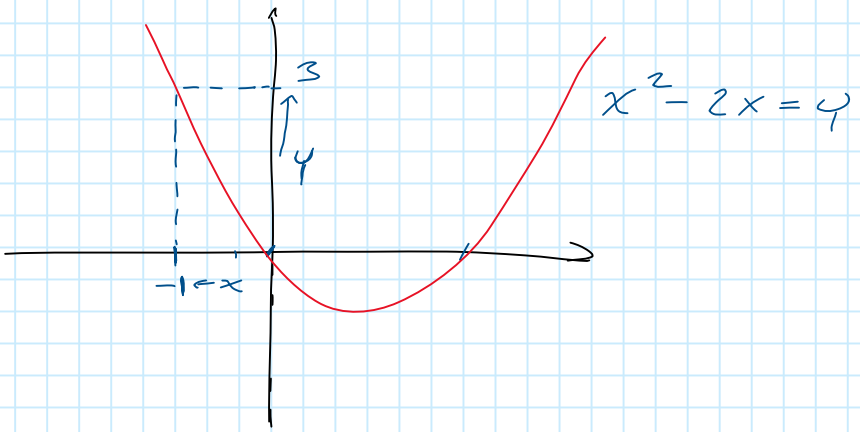
$$\lim_{x \to -1^+} x^2 - 2x = 3$$

$-2 < x - 1 < -1$

Notemos que $-1 < x < 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 = \underbrace{x^2 - 2x}_{y} < 3$

Entonces

$$\lim_{x \to -1^+} \lfloor x^2 - 2x \rfloor = \lim_{y \to 3^-} \lfloor y \rfloor = 2$$



$$\lim_{x \to \sqrt{3}} \lfloor x^2 - 2x \rfloor$$

Tenemos que $\lim_{x \to \sqrt{3}} x^2 - 2x = 3 - 2\sqrt{3}$

Como la función parte entera es cont

Como la función parte entera es cont en $3-2\sqrt{3}$, entonces

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \lfloor x^2-2x \rfloor = \lfloor \lim_{x\to\sqrt{3}} x^2-2x \rfloor$$
$$= \lfloor 3-2\sqrt{3} \rfloor$$

4. **Límite y continuidad:** Halle los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x} & \text{si } x<0, \\ \alpha x^2+\beta x+1 & \text{si } x\geq 0, \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

La función es continua en $x<0$...

La función es cont en $x>0$...

Para analizar en $x=0$, calculemos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x+\alpha)e^{-\beta x} = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \alpha x^2+\beta x+1 = 1$$

Para que el límite exista, necesito $\alpha = 1$

Además, $f(0)=1=\lim_{x\to 0} f(x)$, por lo tanto es cont en 0.

5. **Límite y continuidad:** Determine $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \lfloor -3x^2 \rfloor - a & \text{si } x<0, \\ 2 & \text{si } x=0, \\ \dfrac{x+b}{(x+1)^2}-3 & \text{si } x>0. \end{cases}$$

sea continua en 0.

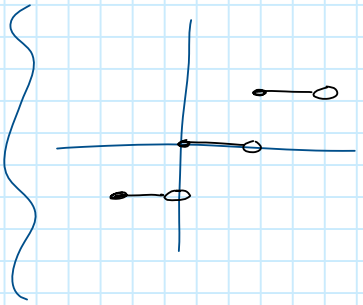
Para ver si el límite existe, calculemos los límites laterales

Para ver si el límite existe, calculemos los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \lfloor -3x^2 \rfloor - a$$

Tomemos $y = -3x^2$,

$$\lim_{x\to 0^-} -3x^2 = 0$$



$$x < 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow -3x^2 < 0$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} \lfloor -3x^2 \rfloor - a = \lim_{y\to 0^-} \lfloor y \rfloor - a = -1 - a$$

Para el otro lateral

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \cdots = b - 3$$

Para que el límite exista, necesito que

$$-1 - a = b - 3$$

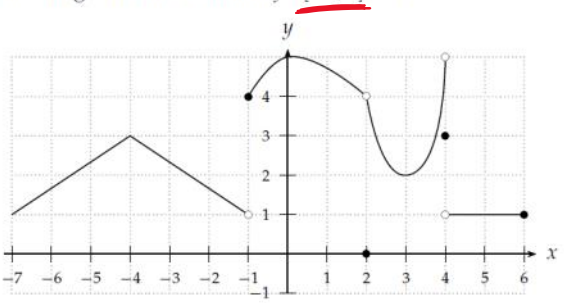
Finalmente, para que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$-1 - a = b - 3 = 2$$

Por lo tanto, la función es continua si

$$a = -3 \qquad b = 5$$

6. **Límite y continuidad:** Dada la gráfica de la función $f : [-7, 6] \to \mathbb{R}$:



Conjeture si existen o no los siguientes límites; en el caso de que el límite exista, conjeture también su valor y si la función es continua o no en tal punto:

a) $\lim_{x\to -4} f(x) = 3$

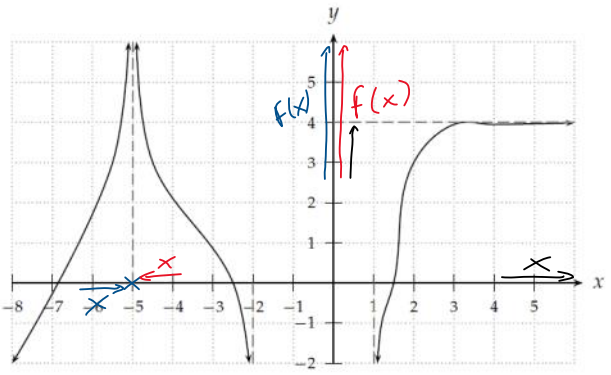
d) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

su valor y si la función es continua o no en tal punto:

a) $\lim_{x\to -4} f(x)$ = 3
b) $\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe
c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ = 5
d) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$
e) $\lim_{x\to 4} f(x)$ no existe
f) $\lim_{x\to 6} f(x) = 1$

Como al tomar x valores cercanos a -4 f(x) toma valores cercanos a 3, entonces, $\lim_{x\to -4} f(x) = 3$.

7. **Límite y continuidad:** Dado la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \setminus ([-2,1] \cup \{-5\}) \to \mathbb{R}$:



Conjeture la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
b) $\lim_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$
c) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$
d) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$
e) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 4$

8. **Funciones derivables:** Halle los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} (x+\alpha)e^{-\beta x} & \text{si } x < 0, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

sea derivable en $\mathbb{R}$.

Para $x<0$, f es derivable ...
Para $x>0$, f es derivable ...

Para que sea derivable en 0, necesito que $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ exista.

Tambien necesitaria que sea continua

$h \to 0$ $\quad$ n

Tambien necesitariu que sea continua.

Analicemos los limites laterales

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \alpha x^2 + \beta x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (x+\alpha) e^{-\beta x} = \alpha$$

Con esto, si $\alpha = 1$, el limite existe y es continua

Ahora, para que sea derivable, analicemos los límites laterales

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha h^2 + \beta h + 1 - (\alpha 0^2 + \beta 0 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + \beta h}{h} = \lim_{h \to 0} h + \beta = \beta$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(h+1) e^{-\beta h} - (\alpha 0^2 + \beta 0 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(h+1)e^{-\beta h} - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\beta h} + (h+1)e^{-\beta h}(-\beta)}{1} = 1 - \beta$$

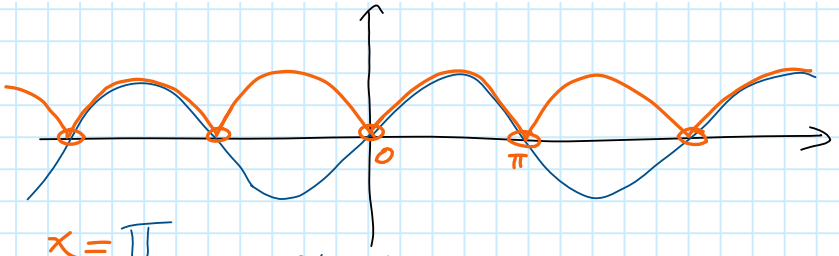
Necesito que $\beta = 1 - \beta$, es decir $\beta = \frac{1}{2}$

9. **Funciones derivables:** ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, la función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |\operatorname{sen}(x)|$$

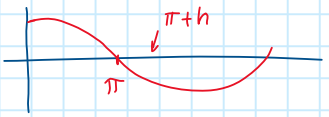
es derivable en a?

↑



$x = \pi$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$$



$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|\operatorname{sen}(\pi+h)|-|\operatorname{sen}(\pi)|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\pi+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(\pi+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cos(\pi+h)}{1} = -\cos(\pi) = 1.$$

10. **Regla de la cadena:** Suponga que las funciones

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

son derivables en $\mathbb{R}$ y que

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x)\operatorname{sen}(h(x)).$$

Suponga, además, que

$$g(0) = 1, \quad h(0) = \pi, \quad g'(0) = -1 \quad \text{y} \quad h'(0) = 2.$$

a) Utilizando los teoremas para la derivada del producto y la composición de funciones (regla de la cadena), determine la derivada de f en función de las derivadas de g y de h.

b) Calcule la derivada de f en 0 utilizando el resultado anterior.

c) Alrededor del punto 0, ¿qué podría decir de la monotonía de f?

d) ¿Podría afirmar lo mismo que en el literal anterior pero alrededor del punto 1?

Derivemos f

$$f'(x) = \Big(g(x)\cdot \operatorname{sen}(h(x))\Big)'$$

$$= \Big(g(x)\Big)' \operatorname{sen}(h(x)) + g(x)\Big(\operatorname{sen}(h(x))\Big)'$$

$$= g'(x)\operatorname{sen}\big(h(x)\big) + g(x)\cos(h(x))\cdot\big(h(x)\big)'$$

$$= g'(x)\operatorname{sen}(h(x)) + g(x)\cos(h(x))\,h'(x).$$

Evaluando en 0

$$f'(0) = g'(0)\operatorname{sen}(h(0)) + g(0)\cos(h(0))\,h'(0)$$
$$= (-1)\operatorname{sen}(\pi) + 1\cos(\pi)\,2$$
$$= -2.$$

11. **Derivación implícita:** Suponga que las funciones

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{y} \quad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

son derivables en todo $\mathbb{R}$ y que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f^3(x) = g^2(x) \cdot h(x) - h(x) \quad \left\{ (f(x))^3 = (g(x))^2 h(x) - h(x) \right.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. (La expresión $f^3(x)$ es la abreviación de $(f(x))^3$ y $g^2(x)$ de $(g(x))^2$).

Si se conoce que

$$g(1) = 2, \quad h(1) = 1, \quad g'(1) = -1, \quad \text{y} \quad h'(1) = 2,$$

determine la monotonía de f "alrededor" del punto 1.

Derivando implicitamente, tenemos que

$$3(f(x))^2 f'(x) = \left((g(x))^2\right)' h(x) + (g(x))^2 (h(x))' - (h(x))'$$
$$= 2(g(x))g'(x)h(x) + (g(x))^2 h'(x) - h'(x).$$

Evaluando en 1:

$$3(f(1))^2 f'(1) = 2g(1)g'(1)h(1) + (g(1))^2 h'(1) - h'(1)$$

Para encontrar $f(1)$, evaluemos (1) en 1

$$(f(1))^3 = (g(1))^2 h(1) - h(1)$$
$$= 2^2 1 - 1 = 3$$

Entonces $f(1) = \sqrt[3]{3}$.

Por lo tanto

$$3(\sqrt[3]{3})^2 f'(1) = 2(2)(-1)(1) + (2)^2(2) - 2 = 2$$

Despejando

$$f'(1) = \frac{2}{3\sqrt[3]{9}}$$

Como $f'(1)>0$, f es creciente alrededor de 1.

12. **Razón de cambio:** Las dimensiones de un rectángulo de 3 centímetros de base por 5 centímetros de altura empiezan a variar de tal forma que la longitud de la base aumenta a razón de 0,5 centímetros por segundo y la longitud de la altura disminuye a una tasa de 0,3 centímetros por segundo.

a) Nombremos con:

- x al tiempo medido en segundos; cuando $x = 0$, la base y la altura del rectángulo 3 y 5 centímetros, respectivamente; luego x representará siempre un número mayor o igual que 0;
- $b(x)$ a la longitud de la base en el tiempo x, medido en centímetros;
- $h(x)$ a la longitud de la altura en el tiempo x, medido en centímetros; y
- $A(x)$ al área del rectángulo en el tiempo x, medido en centímetros cuadrados.

Tenemos que

$$A(x) = b(x)\,h(x)$$

se cumple para $x \geq 0$

Encuentre una igualdad que relaciones estas funciones.

b) Suponga que las funciones b y h son derivables en todo su dominio. Determine los valores de $b(0)$, $h(0)$, $b'(0)$ y $h'(0)$.

c) Determine una expresión que relacione las derivadas de las funciones A, b y h.

d) Sobre la base de los literales anteriores, determine el valor de $A'(0)$.

e) Determine si el área del rectángulo aumenta o disminuye el momento en que las dimensiones del rectángulo empiezan a variar.

b) Tenemos

$$b(0) = 3 \qquad b'(0) = 0.5$$

$$h(0) = 5 \qquad h'(0) = -0.3$$

c) Derivo implícitamente:

$$A'(x) = b'(x)h(x) + b(x)h'(x)$$

para $x \geq 0$

d) Evaluemos en 0

$$A'(0) = b'(0)h(0) + b(0)h'(0) = 0.5(5) + 3(-0.3)$$

$$= 1.6$$

e) Como $A'(0) > 0$, el area aumenta.

13. **Razón de cambio:** Las dimensiones de un cono recto, cuyo radio y altura miden 3 y 5 centímetros, respectivamente, empiezan a variar de tal forma que la longitud de su altura aumenta a razón de 0,3 centímetros por segundo y la longitud del radio de la base disminuye a una tasa de 0,5 centímetros por segundo. Determine si el volumen del cono aumenta o disminuye el momento que sus dimensiones empiezan a cambiar.

segundo. Determine si el volumen del cono aumenta o disminuye el momento que sus dimensiones empiezan a cambiar.

Nombramos

* t tiempo
* $r(t)$ el radio del cono en el tiempo t, en cm
* $h(t)$ la altura del cono en el tiempo t, en cm
* $V(t)$ el volumen del cono en el tiempo t, en cm

Tenemos que

$$V(t) = \frac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t)$$

para todo $t \geq 0$.

Derivamos implícitamente

$$V'(t) = \frac{\pi}{3}\left(2r(t)r'(t)h(t) + (r(t))^2 h'(t)\right)$$

Evaluamos en 0

$$V'(0) = \frac{\pi}{3}\left(2r(0)r'(0)h(0) + (r(0))^2 h'(0)\right)$$

Del enunciado tenemos

$r(0) = 3$ $\quad$ $r'(0) = -0.5$

$h(0) = 5$ $\quad$ $h'(0) = 0.3$

Por lo tanto:

$$V'(0) = \frac{\pi}{3}\left(2(3)(-0.5)(5) + (3)^2(0.3)\right) = -\frac{12.3}{3}\pi$$

Como $V'(0) < 0$, el volumen disminuye cuando empiezan a variar.

14. **Modelización:** Determine las dimensiones de un rectángulo de 9 centímetros cuadrados de área que tenga el menor perímetro posible. Para esto, aplique el siguiente procedimiento:

a) Nombremos con:

- x a la base del rectángulo, medida en centímetros; luego $x > 0$.
- P a la función de $[0, +\infty)$ en sí mismo tal que $P(x)$ mide en centímetros el perímetro del rectángulo cuando la base de este mide x centímetros.

Determine la ley de asignación de la función P.

b) Determine la derivada de P.

c) Encuentre los puntos críticos de P.

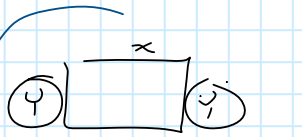
d) Determine la segunda derivada de P.

e) Mediante el criterio de la segunda derivada, determine qué tipos de extremos se alcanzan en los puntos críticos de P.

f) Escriba la solución del problema.

a) $P :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$

$x \longmapsto 2x + \frac{18}{x}$



$2x + 2y = 18$ $\left(y = \frac{9}{x}\right)$

$y = \frac{9}{x}$ $\quad xy = 9$

b) Derivando, tenemos

$P'(x) = 2 - \frac{18}{x^2}$

c) Para encontrar los puntos críticos, igualo la derivada a 0.

$P'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{18}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ o $x = -3$

El punto crítico es 3.

d) Derivando nuevamente

$P''(x) = \frac{36}{x^3}$

e) Evaluando en 3

$P''(3) = \frac{36}{3^3} = \frac{4}{3}$

como $P''(3) > 0$, la función alcanza un mínimo en 3.

f) Las dim. para tener perímetro mínimo son 3 cm de base y 3 cm de altura.

1) Las dim. para tener perímetro mínimo son 3 cm de base y 3 cm de altura.