

1. Demuestre que la ecuación

$$x^4 + 3x = 2$$

tiene al una solución en $[-2, -1]$ y otra en $[0, 1]$.Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^4 + 3x - 2 \quad (1)$$

 f es continua y $f(-2) = 10$

$$f(-1) = -2,$$

por el teorema de valor medio para funciones continuas existe $c \in [-2, -1]$ tal que $f(c) = 2$, es decir

$$c_1^4 + 3c_1 = 2$$

 f es continua y $f(0) = 0$

$$f(1) = 4$$

por el teorema de valor medio para funciones continuas existe $c_2 \in [0, 1]$ tal que $f(c_2) = 2$, es decir

$$c_2^4 + 3c_2 = 2$$

Por lo tanto c_1, c_2 son soluciones de (1)3. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Hallar:

a) La derivada de f en 0 si $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ y para todo $x \in A$, $f(x) = \frac{x-x^2+1}{x-1}$.

Como f es derivable pues es el cociente de derivadas y su denominador es distinto de 0. Para cada $x \neq 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-2x)(x-1) - (x-x^2+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-1+3x-2x^2-x+x^2-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x-2}{(x-1)} \end{aligned}$$

En particular, $f'(0) = 2$,

c) La función derivada de f si $A = \mathbb{R}$ y para todo $x \in A$, $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^8$.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x^2 - 3x + 1)^8$$

Definimos $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Como g y h son derivables, $g'(x) = 8x^7$ y $h'(x) = 2x - 3$
para todo $x \in \mathbb{R}$

Por regla de la cadena

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(g \cdot h)(x) \\ &= f'(g(h(x)) \cdot h'(x)) \\ &= 8(h(x))^7 (2x-3) \\ &= 8(x^2 - 3x + 1)^7 (2x-3) \\ &= 8(x^2 - 3x + 1)^7 (2x-3) \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

d) La función derivada de f si $A = [0, +\infty[$ y para todo $x \in A$, $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{2 + x^2}}$.

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

\mathbb{R}^+ reales positivos

\mathbb{R}_+ reales no negativos

$$\text{Definimos } f_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ y } f_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$$

$$\text{Como } f_1, f_2, f_3 \text{ son derivables } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'_2 = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'_3 = 2x \quad \text{en } x \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \text{Por RC } f'(x) &= D(f_1 \circ f_2 \circ f_3)(x) \\ &= Df_1(f_2(f_3(x))) \cdot D(f_2(f_3(x))) \cdot Df_3(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f_2(f_3(x))}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{f_3(x)}} \cdot 2x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+f_3(x)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \\ &= \frac{x}{2\sqrt{1+\sqrt{2+x^2}} \cdot \sqrt{2+x^2}} \quad \text{en } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Determine si f es derivable en a y de ser el caso halle el valor de su derivada, si

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + 1 & \text{si } x < 0, \\ \cos(x) & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

Para que f sea derivable en 0 debe existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Para } h > 0 \quad \frac{f(h) - 1}{h} &= \frac{\cos(h) - 1}{h} \cdot \frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \\ &= \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} \Rightarrow -\frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Por localidad } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{\sin(h)}{\cos(h) + 1} = -1 \cdot 0 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Para } h < 0 \quad \frac{f(h) - 1}{h} = \frac{\frac{1}{4}h + 1 - 1}{h} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Por localidad } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - 1}{h} = \frac{1}{4} \quad (3)$$

De (1), (2) y (3) f no es derivable en 0

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -3, \\ \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4 & \text{si } x > -3, \end{cases} \quad a = -3.$$

Para que f sea derivable en $a = -3$ debe existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - 1}{h} \quad (4)$$

$$\text{Para } h > 0 \quad \frac{f(-3+h) - 1}{h} = \frac{\frac{1}{3}(-3+h)^2 + 2(-3+h) + 3 - 1}{h} = \frac{\frac{1}{3}(9 - 6h + h^2) - 6 + h + 3}{h} = \frac{\frac{1}{3}h^2 - 2h + \frac{1}{3}}{h} \dots$$

$$\text{Para } h > 0 \quad \frac{f(-3+h) - 1}{h} = \frac{\frac{1}{3}(-3+h)^2 + 2(-3+h) + 3}{h} = \frac{\frac{1}{3}(9-6h+h^2) - 6+h+3}{h} = \frac{h^2-2h+3}{h} = \frac{h(h-2)+3}{h}$$

$$\text{Por localidad } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3}h \right) \Rightarrow (2)$$

$$*\text{ Para } h < 0 \quad \frac{f(-3+h) - 1}{h} = \frac{1-1}{h} = 0$$

$$\text{Por localidad } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - 1}{h} = 0 \quad (3)$$

Por (1), (2) y (3) f es derivable en 0 y $f'(0) = 0$

6. Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que $n > 1$, definimos

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^n \end{aligned}$$

a) Usando el teorema del binomio, calcule la razón de cambio promedio de la función f entre a y $a+h$.

Para $a \in \mathbb{R}$ y $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot h^k - a^n}{h} \\ &= \frac{\binom{n}{0} a^n h^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} h^1 + \dots + \binom{n}{n} a^0 h^n - a^n}{h} \\ &= \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} h + \binom{n}{2} a^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 h^{n-1}}{h} \\ &= \frac{(\binom{n}{1} a^{n-1} h^0 + \binom{n}{2} a^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 h^{n-2}) h}{h} \\ &= \binom{n}{1} a^{n-1} h^0 + \binom{n}{2} a^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 h^{n-2} \end{aligned}$$

$$\text{Es la razón de cambio de } f \text{ en } a \quad = \binom{n}{1} a^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! 1!} a^{n-1} = n a^{n-1}$$

7. Sea

$$f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Supongamos que f describe la altura, medida en metros, de una gota de pintura mientras se desliza sobre una pared, partiendo de una altura de 2 metros hasta llegar al suelo.

a) Calcule la razón de cambio promedio de la altura de la gota, entre el punto cuando la gota se encuentra a 1 metro del suelo y cuando la gota se encuentra a medio metro del suelo.

Para $a \in [0, 2]$ $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{4-(a+h)^2} - \sqrt{4-a^2}}{h} \\ &= \frac{(4-(a+h)^2) - (4-a^2)}{h (\sqrt{4-(a+h)^2} + \sqrt{4-a^2})} \\ &= \frac{-a^2 - 2ah - h^2 + a^2}{h (\sqrt{4-(a+h)^2} + \sqrt{4-a^2})} \\ &= \frac{h(-2a-h)}{h (\sqrt{4-(a+h)^2} + \sqrt{4-a^2})} = \frac{-2a}{\sqrt{4-(a+h)^2} + \sqrt{4-a^2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{h(-2a-h)}{h\sqrt{4-(a+h)^2} + \sqrt{4-a^2}} = \frac{-2ah}{\cancel{h}\sqrt{4-a^2}}$$

$$= \frac{-2a}{\sqrt{4-a^2}}$$

Es la razón de cambio de f en a

8. Sea la función biyectiva

$$\begin{array}{rcl} f: [-\infty, 1] & \longrightarrow & [-\infty, -2] \\ x & \mapsto & x^2 - 3x \end{array}$$

Determine el valor de $(f^{-1})'(4)$, mediante la derivada de la función inversa.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Se tiene que $f(x) = 2x-3$ si $x < 1$

$$\text{si } f^{-1}(4) = z \quad f(z) = 4$$

$$z^2 - 3z = 4$$

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

$$(z-4)(z+1) = 0$$

$$z = 4 \vee \boxed{z = -1}$$

Por el teorema de la función inversa

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(4))}$$

$$= \frac{1}{f'(-1)}$$

$$= -\frac{1}{5}$$

$$\text{La derivada } (f^{-1})'(4) = -\frac{1}{5}$$

9. Supongamos que la ecuación

$$y^2 - \cos(x^2 - y) = x + 1$$

define implícitamente y como una o varias funciones de x . Encuentre la derivada de esa o esas funciones.

Suponiendo que son derivables.

Supongo que existe $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x)^2 - \cos(x^2 - f(x)) = x + 1 \quad \text{en } I$$

Sea $g: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)^2 - \cos(x^2 - f(x)) - x - 1$$

De (1), $g=0$ Así, $Dg(x)=0$ y

$$\begin{aligned} Dg(x) &= D(f^2(x) - \cos(x^2 - f(x)) - x - 1) \\ &= 2f(x) \cdot Df(x) + \sin(x^2 - f(x)) \cdot D(x^2 - f(x)) - 1 \end{aligned}$$

$$= 2f(x) \cdot Df(x) + \text{sem} (x^2 - f(x)) \cdot (2x - Df(x)) -$$
$$= 0$$