Escuela Politécnica Nacional
Hoja de enunciados
Complementos de Álgebra Lineal • Primera Prueba

Martes 7 de mayo de 2019 (120 minutos) Departamento de Matemática

Preguntas

1. Sea $G = \left\{ a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Verifique si G es un grupo abeliano respecto a la suma. (1pt)

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{K}$. Si S y T son subconjuntos de V, determine si los siguientes enunciados son verdaderos o presente un contraejemplo.

   - $\text{Span}(S) \cap \text{Span}(T) \subseteq \text{Span}(S \cap T)$.
   - $\text{Span}(S) \cup \text{Span}(T) \subseteq \text{Span}(S \cup T)$.

   (1.2pt)

3. Sea V un espacio vectorial y sea $\mathbb{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base que genera al espacio V. Demuestre que algún conjunto C de V con más de m vectores es linealmente dependiente. (1pt)

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre un campo $\mathbb{K}$ y suponga que $S_1, \dots, S_k$ son subespacios de V con $dim(S_i) \leq m < n$, para todo $i = 1, \dots, k$.

   - Probar que existe un subespacio T de V de dimensión $n - m$ para el cual $T \cap S_i = \{0\}$, para todo i.
   - Probar que $V = S_i \oplus T$, para algún subespacio S_i con dimensión

   $$dim(S_i) = m = \text{máx}\,\{dim(S_i) 1 \leq i \leq k\}\,.$$

   (1.2pt)

Profesor: Dr. Ramiro Torres

Jueves 30 de mayo de 2019 (120 minutos) Departamento de Matemática

PREGUNTAS

1. Sea V un espacio vectorial y S un subconjunto de V. Si S linealmente dependiente, demuestre que
$$\mathrm{Span}(S) = \mathrm{Span}(S \setminus \{v\})$$
con $v \in S$. (1.1pt)

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{W_1, \ldots, W_k\}$ subespacios vectoriales con $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Demuestre que
$$\dim(V) = \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i).$$
(1.1pt)

3. Sea V, W espacios vectoriales de dimensión finita, S_1 un subespacio de V S_2 un subespacio de W. Presente que existe un $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$ con $N_{\mathcal{T}} = S_1$ y $\mathrm{Img}(\mathcal{T}) = S_2$. (1.1pt)

4. Sea $A \in \mathcal{M}^{m\times n}$ una matriz cuadrada y $\mathcal{T}_A$ la transformación lineal asociada. demuestre que $\mathcal{T}_A$ es invertible si y solo si la ecuación $Ax = 0$ tiene solo la solución trivial $x = 0$. (1.1pt)

Profesor: Dr. Ramiro Torres

Martes 16 de Julio 2019 (120 minutos) Departamento de Matemática

PREGUNTAS

1. Sea V un espacio vectorial y S, T dos subespacios de V y sea la aplicación lineal $\mathcal{T}: (S+T) \to S/(S \cap T)$ definida por:
$$\mathcal{T}(s+t) = s + (S \cap T).$$
   - Determine si $\mathcal{T}$ es una transformación lineal.
   - Si $\mathcal{T}$ es una transformación lineal, ¿Cuál es el núcleo?.
   - Si el subespacio $\mathcal{T}$ es el complemento de S, que se puede decir de V/T y S.

2. Sea V un espacio vectorial, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea $B^* = \{\psi_1, \ldots, \ldots, \psi_m\}$ una base de V^*. Si $v \in V$ y $f \in V^*$, entonces demuestre que
$$v = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(v) v_j \qquad \text{y} \qquad f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\psi_i.$$

3. Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V)$ y λ un valor propio.
   - Determinar un valor propio de $\mathcal{T}^2$.
   - Determinar un valor propio de $\mathcal{T}^{-1}$.

4. Sea V un espacio vectorial y M, N dos subconjuntos no vacíos de V. Probar que si $M \subseteq N$, entonces se tiene que
$$ann(N) \subseteq ann(M)$$

Profesor: Dr. Ramiro Torres

Martes 25 de Julio 2019 (120 minutos) Departamento de Matemática

PREGUNTAS

1. Sea V un espacio vectorial y S, T subespacios de V con $S \subset T$. Probar:
   - $\operatorname{Span}(S) \subset \operatorname{Span}(y) \subseteq V$.
   - Si S genera a V, entonces T genera a V.
   - Si T es linealmente independiente, entonces S es linealmente independiente.

2. Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$ y se define $S : V/\mathcal{N}_{\mathcal{T}} \to \operatorname{Img}(\mathcal{T})$ por
$$S(v + \mathcal{N}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}(v).$$
   Determinar si S es una aplicación lineal. Si S es una aplicación lineal, entonces es un isomorfismo.?

3. Presente que si $\mathcal{T}, \sigma \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\mathcal{T}(\sigma)$ y $\sigma(\mathcal{T})$ tienen los mismos valores propios.

4. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Probar que
   - Si $u, v \in V$ son ortogonales, entonces
$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$
   - Para todo $u, v, w \in V$ se tiene que
$$\|w + u\|^2 + \|w - v\|^2 = \frac{1}{2}\|u - v\|^2 + s\left\|w - \frac{u + v}{2}\right\|^2.$$

Profesor: Dr. Ramiro Torres