ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
HOJA DE ENUNCIADOS
COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL • TALLER N° 1

Jueves 23 de mayo de 2019 (120 minutos) — Departamento de Matemática

PREGUNTAS

1. Sea G el conjunto de los números reales distintos de cero. Defínase para $a, b \in G$, la multiplicación $a \cdot b = a^2 \cdot b$. Determine si G es un grupo.

2. Sea V un espacio vectorial, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$ y $u \in V$. demuestre que si S es linealmente independiente y $u \notin \operatorname{Span}(S)$, entonces $S \cup \{y\}$ es linealmente independiente.

3. Un vector $u = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \in \mathbb{R}^m$ es llamado fuertemente positivo si $a_i > 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Probar que si un subespacio $S \in \mathbb{R}^n$ contiene vectores fuertemente positivos, entonces S tiene una base de vectores fuertemente positivos.

4. Sea $\mathcal{M}_n$ el conjunto de matrices cuadradas que pueden ser escritas de la forma
$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$$
donde $A \in \mathcal{M}_n$.
   - Demuestre que $\mathcal{M}_n$ es un espacio vectorial.
   - Determine los subespacios vectoriales S y T, tal que $M_n = S \oplus T$.

Profesor: Dr. Ramiro Torres

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
HOJA DE ENUNCIADOS
COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL • TALLER N° 2

Jueves 23 de mayo de 2019 (120 minutos) Departamento de Matemática

PREGUNTAS

1. Sea $A \in \mathcal{M}^{m\times n}$ de rango k. rpobar que existen 2 matrices $X \in \mathcal{M}^{m\times k}$ y $Y \in \mathcal{M}^{k\times n}$ de rango k tal que
$$A = XY.$$

2. Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$. Probar que $\mathcal{T}$ es un isomorfismo si y solo si una base de V se traslada a una base de W.

3. Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(U, V)$ y $\sigma \in \mathcal{L}(V, W)$. Presente que
$$rk(\sigma(\mathcal{T})) \leq \text{mín}\,\{rk(\mathcal{T}), rk(\sigma)\}\,.$$

4. Sea V un espacio vectorial y S un subespacio vectorial de V. Presente que existe una transformación lineal $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V)$ para la cual $\operatorname{img}(\mathcal{T}) = S$

Profesor: Dr. Ramiro Torres

Martes 25 de mayo de 2019 (120 minutos) Departamento de Matemática

PREGUNTAS

1. Dadas dos matrices $A, B \in \mathcal{M}^n$. Las matrices se dicen similares si existe una matriz invertible tal que:

$$A = PBP^{-1}$$

Determine si es una relación de equivalencia.

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión ny sea S un subespacio vectorial de V. Supongamos que $B_s = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es una base de S y que $B = \{v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$ es una base de V. Entonces demuestre que una base de V/S es $\{v_{r+1} + S, \ldots, v_n + S\}$. aplique el resultado a $V = \mathbb{R}^3$ y $S = \{(x, y, z) : x + y + 3z = 0\}$

3. Sea V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$. Usando el primer teorema de isomorfismos presente que

$$rk(\mathcal{T}) + null(\mathcal{T}) = \dim(V).$$

4. Sea V un espacio vectorial. Demostrar que

   a) V^* es un espacio vectorial;

   b) $v \in V$ y es iugal a 0 si y solo si $f(v) = 0$, para todo $f \in V^*$.

Profesor: Dr. Ramiro Torres