CLUB DE MATEMÁTICA EPN
COMPLEMENTOS DE CÁLCULO • SEMANA 13-2
CONTINUIDAD

Semestre 2019-A Daniel Lara

Estos apuntes se basan en las clases de la materia "Complementos de Cálculo", dictadas en la carrera de Matemática de la EPN durante el semestre 2019-A por el profesor Paúl Acevedo. Los apuntes son elaborados por Daniel Lara, alumno de esta materia y revisados por el profesor Andrés Merino.

1. FUNCIONES CONTINUAS

En esta sección se considerará $A \subseteq \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 1

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se dice que f *es continua en* a si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, que puede depender de ε, tal que para todo $x \in A$, se cumple que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Es importante recalcar que la definición anterior trata exclusivamente la continuidad de una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ en un punto $a \in A$, es decir un punto de su dominio.

DEFINICIÓN 2

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. Si f no es continua en a se dice que f *es discontinua en* a.

Si un punto no pertenece al dominio de una función entonces la función no es ni continua ni discontinua en este punto.

EJEMPLO 1. Para ilustrar la idea de continuidad en un punto, consideremos la siguiente función $f\colon [0, b] \to \mathbb{R}$ ilustrada en la Figura 1.

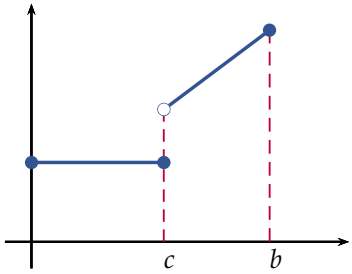

Figura 1: Gráfico de una función discontinua en c.

Notemos que $c \in \text{dom}(f)$ sin embargo, por la definición de continuidad en un punto, f es discontinua en c.

EJEMPLO 2. Ahora, consideremos la siguiente función $f\colon [0,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ ilustrada en la Figura 2.

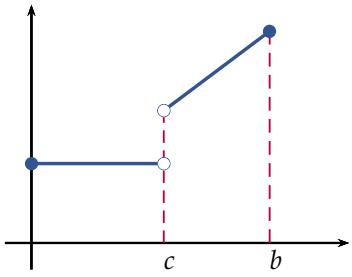

Figura 2: Gráfico de una función no definida en c.

Notemos que $c \notin \text{dom}(f)$, por lo tanto, la función no es ni continua ni discontinua en c.

DEFINICIÓN 3

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Se dice que f *es continua en* B si para todo $x \in A$, f es continua en x. Además, se dice que f *es continua* si es continua en su dominio.

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Si A es un **intervalo**, la idea intuitiva de que f es continua es que su gráfica no presenta "rupturas", es decir, no presenta saltos. Esta idea no se preserva si A no es un intervalo, por ejemplo, se tiene que la función representada en la Figura 2 es una función continua.

TEOREMA 1: Caracterización de continuidad por sucesiones

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se tiene que f es continua en a si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A, que converge a a, se cumple que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.

Es decir, se tiene que f es continua en $a \in A$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A se cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{implica} \qquad f(x_n) \to f(a).$$

TEOREMA 2

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$. La función f es continua en a si y solo si dada una vecindad $V_\varepsilon(f(a))$ de $f(a)$, existe una vecindad $V_\delta(a)$ de a tal que si $x \in A \cap V_\delta(a)$, entonces $f(x)$ pertenece a la vecindad $V_\varepsilon(f(a))$, es decir

$$f(A \cap V_\delta(a)) \subseteq V_\varepsilon(f(a)).$$

TEOREMA 3: Caracterización de discontinuidad

Sean $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se tiene que f es discontinua en a si y solo existe un sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A, que converge a a, tal que la $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(a)$.

Es decir, se tiene que f es discontinua en $a \in A$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tal que cumple que

$$x_n \to a \qquad \text{y} \qquad f(x_n) \nrightarrow f(a).$$

OBSERVACIÓN 1. Existen funciones que no son continuas en ningún punto de su dominio.

EJEMPLO 3. Consideremos la siguiente función, llamada la función de Dirichlet;

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene que f no es continua en ningún punto de su dominio.

OBSERVACIÓN 2. Existen funciones que son continuas en un punto y discontinuas en los puntos restantes de su domino.

EJEMPLO 4. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene que esta función es continua únicamente en 0 y discontinua en el resto de su dominio.

Ahora, consideremos el siguiente ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es discontinua en todo su domino y sin embargo, $|f|$ si es continua.

EJEMPLO 5. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que f, al igual que la función de Dirichlet, es discontinua en $\mathbb{R}$. Sin embargo, si tomamos $g = |f|$, se tiene que

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

Así, f es discontinua en todo su dominio, mientras que g es continua en todo su dominio.

1.1 Extensión continua de una función

Consideremos una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$ pero $a \notin A$. Por la definición, no se puede hablar de la continuidad de f en a. Sin embargo, si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, es decir, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

Podemos definir una nueva función que sea una extensión de f. Esta función es

$$\begin{aligned} F\colon A \cup \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Notemos que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in A$ y, además, F es continua en a.

EJEMPLO 6. Consideremos la siguiente función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La gráfica de esta la podemos ver en la Figura 3.

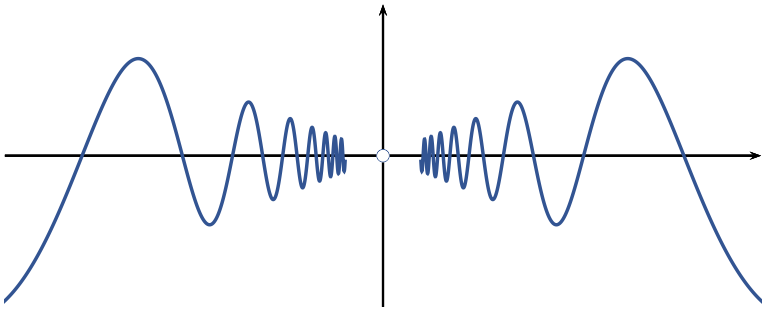

Figura 3: Gráfica de la función $x \mapsto x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \neq 0$.

Notemos que f es continua pero su dominio no es $\mathbb{R}$ al no estar definida en 0. Por otro lado,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

por lo tanto, podemos definir una extensión de f que sea continua en $\mathbb{R}$, así, tomemos la función

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

la cual es continua en su dominio, es decir, es continua en $\mathbb{R}$.

1.2 Continuidad en Intervalos

De las definiciones dadas anteriormente, sabemos que si f es continua en a, entonces f es acotada localmente. Sin embargo, el teorema del acotamiento nos da condiciones suficientes para que una función continua en su dominio, sea acotada globalmente.

DEFINICIÓN 4

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se dice que f *es acotada*, si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M,$$

para todo $x \in A$.

En lo subsiguiente, tomaremos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

TEOREMA 4: Teorema del acotamiento

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es continua, entonces f es acotada.

DEFINICIÓN 5: Máximo y mínimo de una función

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función.

- Se dice que f tiene *máximo absoluto* si existe $x_M \in A$ tal que

$$f(x_M) \geq f(x),$$

para todo $x \in A$. A $f(x_M)$ se lo conoce como el *máximo absoluto* de f.

- Se dice que f tiene *mínimo absoluto* si existe $x_m \in A$ tal que

$$f(x_n) \leq f(x),$$

para todo $x \in A$.A $f(x_m)$ se lo conoce como el *mínimo absoluto* de f.

Con esta definición tenemos que

$$f(x_m) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{y} \qquad f(x_n) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

TEOREMA 5

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se tiene que si f es continua, entonces f tiene un máximo y un mínimo absoluto .

TEOREMA 6: Teorema de Bolzano

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un $c \in]a,b[$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Este teorema da condiciones suficientes para que una función continua se anule en un punto (esto último también se expresa diciendo que la función tiene una raíz).

OBSERVACIÓN 3. En teorema anterior, la hipótesis de continuidad es esencial. En efecto, consideremos la función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se encuentra en la Figura 4.

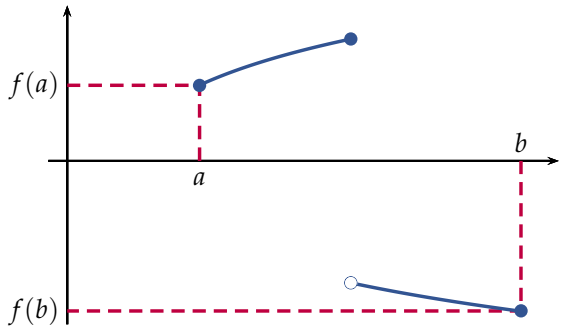

Figura 4: Ejemplo de función que no cumple la hipótesis del Teorema de Bolzano.

Así, es fácil ver que la función f no tienen ninguna raíz en $[a, b]$.

TEOREMA 7: Teorema del valor intermedio

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que para todo $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{mín}\{f(a), f(b)\} \leq r \leq \text{máx}\{f(a), f(b)\},$$

existe un $x_r \in]a, b[$ tal que

$$f(x_r) = r.$$

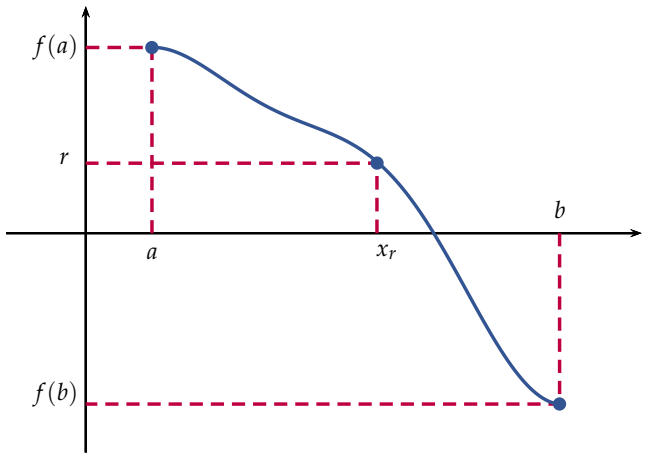

Figura 5: Ilustración del Teorema del valor intermedio.

PROPOSICIÓN 8. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Se tiene que si f es estrictamente monótona en $[a, b]$, entonces f posee una

única raíz en $[a, b]$.

PROPOSICIÓN 9. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si f es estrictamente monótona en $[a, b]$, entonces f es inyectiva.

TEOREMA 10: Teorema de la inversa continua

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que si f es estrictamente monótona en A, entonces f posee una inversa de $f(A)$ en A, además, la función

$$f^{-1}\colon f(A) \to A$$

es continua y estrictamente monótona en A.

PROPOSICIÓN 11. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona en A. Tomando la función $f^{-1}\colon f(A) \to A$ se tiene que:

- si f es estrictamente creciente, entonces f^{-1} es estrictamente creciente;
- si f es estrictamente decreciente, entonces f^{-1} es estrictamente decreciente.