Semestre 2019-B

Andrés Merino

Este ejercicio está basado en un ejercicio de la prueba número 2 de la materia de "Análisis de Fourier y EDP" de la Escuela Politécnica Nacional del semestre 2019-A. La solución del ejercicio fue elaborado por el profesor Andrés Merino.

EJERCICIO 1. Sean

$$L > 0, \qquad c > 0, \qquad u\colon [0,L]\times[0,+\infty[\,\to \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad f\colon [0,L]\to\mathbb{R}$$

tales que

$$u \in \mathcal{C}^2\big([0,L]\times[0,+\infty[\,\big) \qquad \text{y} \qquad f\in\mathcal{C}([0,L]).$$

El objetivo de esta ejercicio es hallar la solución de la **ecuación de la onda unidimensional** con las condiciones mixtas siguientes:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t), & (x,t)\in[0,L]\times[0,+\infty[\,, \\ u(0,t)=0, \quad u_x(L,t)=0, & t\geq 0, \\ u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq L. \end{cases}$$

a) Suponga que existen dos funciones

$$X\colon [0,L]\to\mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad T\colon [0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$$

tales que la solución al problema (P) puede expresarse como

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

para todo $(x,t)\in[0,L]\times[0,+\infty[$. Muestre existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que X y T son soluciones de los problemas:

$$(A)\begin{cases} X''(x)-\alpha X(x)=0, & 0<x<L, \\ X(0)=0, \quad X'(L)=0. \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} T''(t)-\alpha c^2 T(t)=0, & t>0, \\ T'(0)=0. \end{cases}$$

b) Muestre que, para $\alpha\geq 0$, la solución u es trivial.

c) Muestre que, para $\alpha<0$, existe un número $k\in\mathbb{N}$ tal que:

$$\alpha = -\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2$$

y, además, que X y T están dados por:

$$X_k(x) = C_k \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right), \qquad T_k(t) = F_k\cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{2L}t\right)$$

para todo $x \in [0, L]$ y $t \in [0, +\infty[$ y para $C_k, F_k \in \mathbb{R}$.

d) Utilice el principio de superposición para mostrar que la solución del problema (P) está dada por:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} x\right) \cos\left(\frac{(2k+1)c\pi}{2L} t\right)$$

para $(x,t) \in [0, L] \times [0, +\infty[$, donde, para $k \in \mathbb{N}$,

$$c_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} x\right) dx.$$

Solución.

a) Sea $(x,t) \in [0, L] \times [0, +\infty[$, notemos que

$$u_{tt}(x,t) = X(x)T''(t) \qquad \text{y} \qquad u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

por lo tanto,

$$X(x)T''(t) = u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) = c^2 X''(x)T(t),$$

de donde, suponiendo que $X(x)$ y $T(t)$ son diferentes de 0,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}.$$

Dado que (x,t) es arbitrario, se tiene que la igualdad anterior solo es posible si ambos lados son contantes, es decir, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \alpha$$

y por ende:

$$X''(x) = \alpha X(x) \qquad \text{y} \qquad T''(t) = \alpha c^2 T(t),$$

que equivale a

$$X''(x) - \alpha X(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad T''(t) - \alpha c^2 T(t) = 0.$$

Por otro lado, las condiciones iniciales se transforman en:

$$\begin{aligned} 0 = u(0,t) = X(0)T(t), &\qquad 0 = u_x(L,t) = X'(L)T(t), \\ f(x) = u(x,0) = X(x)T(0), &\qquad 0 = u_t(x,0) = X(x)T'(0). \end{aligned}$$

Ya que suponemos que $X(x)$ y $T(t)$ son diferentes de 0, tenemos que

$$X(0) = 0, \qquad X'(L) = 0, \qquad T'(0) = 0$$

y

$$X(x)T(0) = f(x).$$

Así, se tiene que para el problema (P), existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que puede expresarse como los problemas (A) y (B).

b) Tomaremos dos casos, primero $\alpha = 0$ y luego $\alpha > 0$.

- Si $\alpha = 0$, tenemos que
$$\begin{cases} X''(x) = 0, & 0 < x < L, \\ X(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \end{cases}$$
De donde, resolviendo esta ecuación, tenemos que
$$X(x) = 0$$
para todo $x \in [0, L]$ y por lo tanto,
$$u(x,t) = X(x)T(t) = 0$$
para todo $(x,t) \in [0, L] \times [0, +\infty[$, es decir u es trivial.
- Si $\alpha > 0$, tenemos que la solución de la ecuación del problema (A) es
$$X(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x}$$
para todo $x \in [0, L]$ con $A, B \in \mathbb{R}$. Utilizando las condiciones iniciales, tenemos que
$$A = B = 0,$$
por lo tanto,
$$X(x) = 0$$
para todo $x \in [0, L]$ y, en consecuencia,
$$u(x,t) = X(x)T(t) = 0$$
para todo $(x,t) \in [0, L] \times [0, +\infty[$, es decir u es trivial.

c) Tenemos que la solución de la ecuación del problema (A) es
$$X(x) = C \operatorname{sen}(x\sqrt{-\alpha}) + D \cos(x\sqrt{-\alpha})$$
para todo $x \in [0, L]$ con $C, D \in \mathbb{R}$. Con la condición inicial $X(0) = 0$, tenemos que
$$D = 0.$$
Con esto y derivando X, tenemos que
$$X'(x) = C\sqrt{-\alpha} \cos(x\sqrt{-\alpha})$$
para todo $x \in [0, L]$. Con la condición inicial $X'(L) = 0$, tenemos que
$$C\sqrt{-\alpha} \cos(L\sqrt{-\alpha}) = 0.$$
Dado que si $C = 0$ tendríamos que $u = 0$, supondremos que $C \neq 0$, por lo tanto
$$\cos(L\sqrt{-\alpha}) = 0,$$

de donde, al resolver esta ecuación, tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$L\sqrt{-\alpha} = \frac{(2k+1)\pi}{2}$$

(notemos que el lado izquierdo de la igualdad anterior es positivo, por lo tanto el lado izquierdo también debe ser positivo, por esta razón consideramos $k \in \mathbb{N}$ y no $k \in \mathbb{Z}$), esto equivale a

$$\alpha = -\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2.$$

Ahora, dado que para cualquier $k \in \mathbb{N}$, si tomamos α como en la expresión anterior, X sigue siento solución del problema (A), hemos encontrado una familia de soluciones dadas por, para $k \in \mathbb{N}$:

$$X_k(x) = C_k \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)$$

para todo $x \in [0, L]$, con $C_k \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, con la información obtenida, resolvamos el problema (B), es decir, resolvamos la ecuación:

$$T''(t) + \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2 c^2 T(t) = t$$

para $t \in [0, +\infty[$. Como k es un parámetro en la ecuación anterior, obtenemos también una familia de soluciones:

$$T_k(t) = E_k \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi c}{2L}t\right) + F_k \cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{2L}t\right)$$

para todo $t \in [0, +\infty[$ con $E_k, F_k \in \mathbb{R}$. Para utilizar la condición inicial del problema, derivemos T:

$$T'(t) = E_k \frac{(2k+1)\pi c}{2L} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{2L}t\right) - F_k \frac{(2k+1)\pi c}{2L} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi c}{2L}t\right).$$

Con esto, dado que $T'(0) = 0$, tenemos que

$$0 = E_k \frac{(2k+1)\pi c}{2L},$$

por lo tanto, $E_k = 0$, así

$$T(t) = F_k \cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{2L}t\right)$$

para todo $t \in [0, +\infty[$, con $F_k \in \mathbb{R}$.

d) Por el literal anterior, tenemos que, para $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = c_k \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{2L}t\right)$$

para $(x,t) \in [0, L] \times [0, +\infty[$, con $c_k \in \mathbb{R}$ es una solución de la EDP del problema (P). Ahora, por el principio de superposición, tenemos que la suma de soluciones también es una solución, por lo tanto

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi c}{2L}t\right)$$

para $(x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty[$ es solución de la EDP del problema (P).

Por otro lado, para determinar las constantes c_k, vamos a utilizar la condición inicial del problema (P) que aún no hemos utilizado, es decir:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right),$$

de aquí y tomando $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)\,dx.$$

Por ortogonalidad, tenemos que

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)\,dx = \begin{cases} \frac{L}{2} & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

por lo tanto, para $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\,dx = c_k\frac{L}{2},$$

es decir,

$$c_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\,dx. \qquad \square$$